

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐOÀN TRỌNG HIẾU

VỀ SỰ TỒN TẠI TOÁN TỬ PICARD TRONG MỘT SỐ LỚP
KHÔNG GIAN METRIC SUY RỘNG

Ngành: Toán Giải tích
Mã số: 946 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2023

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học:

- 1. PGS. TS. Hà Trần Phương**
- 2. TS. Bùi Thế Hùng**

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường
Hợp tại: Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Vào hồi giờ ngày tháng năm 2023

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia;
- Trung tâm số - Đại học Thái Nguyên;
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm.

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Năm 1922, S. Banach đã chứng minh một định lý nổi tiếng mà ngày nay ta thường gọi là "Nguyên lý ánh xạ co Banach".

Định lý 1. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là ánh xạ. Giả sử tồn tại $r \in [0, 1)$ sao cho

$$\rho(Ta, Tb) \leq r\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X. \quad (0.1)$$

Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$ và với mỗi $a \in X$, dãy lặp $\{T^n a\}$ hội tụ đến $\bar{a}$.

Công trình này của S. Banach được đánh giá hết sức quan trọng, nó mở ra hướng nghiên cứu mới trong việc phát triển lý thuyết điểm bất động, đó là lý thuyết điểm bất động metric. Trong những thập kỷ gần đây, lý thuyết điểm bất động metric được đánh giá là một trong những thành tựu của toán học. Lý thuyết điểm bất động đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước thu được nhiều kết quả quan trọng và có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học như nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân, hệ phương trình tuyến tính, phương trình tích phân,....

Nguyên lý ánh xạ co Banach cho chúng ta một điều kiện đủ để một ánh xạ từ không gian metric đầy đủ X vào chính nó có điểm bất động duy nhất. Có rất nhiều tác giả đã tìm cách phát triển Nguyên lý ánh xạ co Banach với các điều kiện co khác nhau và trong các lớp không gian khác nhau. Chẳng hạn M. Edelstein năm 1962, E. Rakotch năm 1962, A. Meir và E. Keeler năm 1969, Lj. B. Ćirić năm 1974, A. C. M. Ran và cộng sự năm 2004, M. Berinde và V. Berinde năm 2007, G. L. Huang và X. Zhang năm 2007, T. Suzuki năm 2007, Sh. Rezapour và R. Hamlbarani năm 2008, T. Suzuki năm 2009, W. S. Du năm 2010, D. Wardowski năm 2012, R. Pant năm 2016, S.-i. Ri năm 2016 và nhiều tác giả khác. Khi nghiên cứu về điểm bất động

của ánh xạ, năm 1983, I. A. Rus đã giới thiệu khái niệm toán tử Picard và toán tử Picard yếu trong không gian metric. Khái quát khái niệm đó cho lớp các không gian tôpô ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1. Cho X là một không gian tôpô. Một ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được gọi là *toán tử Picard yếu* nếu T có điểm bất động và với mỗi $a \in X$, dãy $\{T^n a\}$ hội tụ đến điểm bất động của T . Nếu T là toán tử Picard yếu và có duy nhất điểm bất động thì T được gọi là *toán tử Picard*.

Từ định nghĩa trên ta thấy, toán tử Picard và toán tử Picard yếu liên quan chặt chẽ đến điểm bất động của ánh xạ, chẳng hạn ánh xạ co Banach là một toán tử Picard trên không gian metric đầy đủ. Trong các công trình của I. A. Rus, M. Berinde và V. Berinde và một số công trình khác, các tác giả đã nghiên cứu một số tính chất của toán tử Picard và toán tử Picard yếu liên quan đến tập các điểm bất động của ánh xạ đơn và đa trị. Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu về sự tồn tại của các toán tử Picard gắn với điều kiện co. Các kết quả nghiên cứu theo hướng này trong thời gian gần đây được chia thành ba vấn đề chủ yếu:

1. Xây dựng các điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard hay toán tử Picard yếu trên lớp các không gian metric liên quan đến các điều kiện co.
2. Xây dựng một số không gian có cấu trúc được mở rộng từ lớp không gian metric (ta thường gọi là không gian metric suy rộng) và xây dựng các điều kiện đủ liên quan đến điều kiện co, để một ánh xạ là toán tử Picard hay toán tử Picard yếu trên các lớp không gian này.
3. Nghiên cứu các ứng dụng khác nhau của các lớp toán tử Picard và toán tử Picard yếu.

Theo hướng nghiên cứu thứ nhất, các tác giả tập trung vào cải tiến điều kiện co Banach và xây dựng các điều kiện co mới để một ánh xạ là toán tử Picard hay toán tử Picard yếu. Năm 1962, M. Edelstein đã thiết lập điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard cho không gian metric compact: Với (X, ρ) là không gian metric compact thì một ánh xạ $T : X \rightarrow X$ thỏa mãn $\rho(Ta, Tb) < \rho(a, b)$ với mọi $a, b \in X, a \neq b$, là toán tử Picard. Ở đây, điều kiện co của M. Edelstein nhẹ hơn điều kiện co của S. Banach, tuy nhiên điều kiện về không gian lại nặng hơn. Tiếp theo công trình của M. Edelstein, đã có nhiều tác giả phát triển Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian metric bằng cách thay thế hằng số r trong điều kiện (0.1) bởi hằng số, tham số hay hàm số khác hoặc giới hạn điều kiện (0.1) chỉ cần đúng với một số phần tử $a, b \in X$. Chẳng hạn như A. Meir và E. Keeler thiết lập điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trong không gian đầy đủ (X, ρ) dưới điều kiện: Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại

$\delta > 0$ sao cho $\varepsilon \leq \rho(a, b) < \varepsilon + \delta$ kéo theo $\rho(Ta, Tb) < \varepsilon$ với mọi $a, b \in X$; năm 2016, S.-i. Ri thay thế hằng số co bởi hàm tham số và thu được: Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là ánh xạ. Giả sử tồn tại hàm $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ thỏa mãn $\varphi(t) < t$, $\limsup_{s \rightarrow t^+} \varphi(s) < t$ với mọi $t > 0$ và $\rho(Ta, Tb) \leq \varphi(\rho(a, b))$ với mọi $a, b \in X$. Khi đó, T là toán tử Picard.... Năm 2007, bằng cách sử dụng hàm tham số không tăng, T. Suzuki đã thu được kết quả sau.

Định lý 2. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Hàm không tăng $\varphi : [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1]$ được định nghĩa bởi

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ (1-r)r^{-2} & \text{nếu } \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq 2^{-\frac{1}{2}}, \\ (1+r)r^{-1} & \text{nếu } 2^{-\frac{1}{2}} \leq r < 1. \end{cases}$$

Giả sử tồn tại $r \in [0, 1)$ sao cho

$$\varphi(r)\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } \rho(Ta, Tb) \leq r\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$. Khi đó, T là toán tử Picard.

Việc xây dựng các điều kiện co mới, khác với điều kiện co Banach cũng thu hút được nhiều tác giả. Chẳng hạn J. Górnicki, G. E. Hardy và T. D. Rogers, S. Reich Trong luận án này chúng tôi quan tâm đến lớp ánh xạ co Kannan. Cụ thể, năm 1968, R. Kannan đã chứng minh.

Định lý 3. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử tồn tại $r \in [0, \frac{1}{2})$ sao cho

$$\rho(Ta, Tb) \leq r(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)) \text{ với mọi } a, b \in X. \quad (0.2)$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Ánh xạ thỏa mãn giả thiết của Định lý 3 được gọi là ánh xạ Kannan. Trong công trình của R. Kannan đã chỉ ra một trường hợp cụ thể của ánh xạ Kannan không liên tục, đây là một tính chất khác với các ánh xạ co Banach. Một ứng dụng quan trọng khác của ánh xạ Kannan là có thể mô tả tính đầy đủ của không gian metric theo tính chất điểm bất động của ánh xạ. Điều này được P. V. Subramanyam chứng minh năm 1975, cụ thể là: “Không gian metric (X, ρ) là đầy đủ nếu và chỉ nếu mọi ánh xạ Kannan đều có điểm bất động duy nhất”. Chú ý rằng lớp ánh xạ co của Banach không có tính chất này. Vì thế, lớp ánh xạ trong Định lý 3 ngay lập tức đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học, chẳng hạn L. S. Dube và S. P. Singh, J. Górnicki, G. Hiranmoy và cộng sự và nhiều tác giả khác.

Kí hiệu

$$\mathcal{S} = \{f : (0, \infty) \rightarrow [0, \frac{1}{2}) : f(t_n) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ kéo theo } t_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty\},$$

$$\mathcal{H} = \{\varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \frac{1}{3}) : \varphi(t_n) \rightarrow \frac{1}{3} \text{ kéo theo } t_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty\}.$$

Bằng việc sử dụng hàm điều khiển trên, năm 2018, J. Górnicki đã thu được các kết quả sau:

Định lý 4. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại hàm $f \in \mathcal{S}$ sao cho với mỗi $a, b \in X, a \neq b$, ta luôn có

$$\rho(Ta, Tb) \leq f(\rho(a, b))(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Định lý 5. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{H}$ sao cho với mỗi $a, b \in X, a \neq b$, ta luôn có

$$\rho(Ta, Tb) \leq \varphi(\rho(a, b))(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + \rho(a, b)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Có thể thấy kết quả trên của J. Górnicki là sự mở rộng và phát triển Định lý 3 của R. Kannan. Năm 2014, với ý tưởng kết hợp giữa điều kiện co Banach và Kannan, K. Farshid và các cộng sự đã thiết lập điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu.

Định lý 6. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$ thỏa mãn điều kiện

$$\rho(Ta, Tb) \leq M(a, b)\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X,$$

trong đó

$$M(a, b) = \frac{\rho(a, Tb) + \rho(b, Ta)}{\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + 1}.$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{1}{2}.$$

Năm 2017, Y. U. Gaba đã thiết lập kết quả tương tự của K. Farshid và các cộng sự trong không gian G -metric. Cùng với việc nghiên cứu ánh xạ Kannan đơn trị, trong thời gian gần đây có một số tác giả nghiên cứu ánh xạ Kannan đa trị. Cho

(X, D, K) là không gian b -metric mạnh, kí hiệu $CB(X)$ là tập hợp tất cả các tập con khác rỗng, đóng và bị chặn của X . Hàm H xác định bởi

$$H(A, B) := \max\{\sup_{a \in B} d(a, A), \sup_{a \in A} d(a, B)\},$$

trong đó $A, B \in CB(X)$ và $d(a, A) := \inf_{b \in A} \rho(a, b)$, được gọi là *metric Hausdorff* trên $CB(X)$ cảm sinh bởi b -metric mạnh D . Tương tự như trường hợp ánh xạ đơn trị, năm 1991, I. A. Rus đã giới thiệu toán tử Picard yếu đa trị. Khái quát khái niệm đó cho lớp các không gian b -metric mạnh ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Một ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow CB(X)$ được gọi là *toán tử Picard yếu đa trị* nếu T có điểm bất động (tức là tồn tại phần tử $\bar{a} \in X$ sao cho $\bar{a} \in T\bar{a}$) và với mỗi $a \in X$, với mỗi $b \in Ta$, tồn tại dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn:

- (i) $a_0 = a, a_1 = b$;
- (ii) $a_{n+1} \in Ta_n$ với mọi $n = 0, 1, \dots$;
- (iii) dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến điểm bất động của X .

Nếu T là toán tử Picard yếu đa trị và có duy nhất một điểm bất động thì T được gọi là *toán tử Picard đa trị*.

Năm 1970, L. S. Dube và S. P. Singh đã chứng minh một dạng của Định lý 3 cho trường hợp ánh xạ đa trị:

Định lý 7. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ đa trị liên tục $T : X \rightarrow CB(X)$. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ sao cho

$$H(Ta, Tb) \leq s(d(a, Ta) + d(b, Tb)) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard yếu đa trị.

Ngoài công trình của L. S. Dube và S. P. Singh còn có một số công trình của các tác giả khác về sự tồn tại của toán tử Picard yếu đa trị. Chẳng hạn M. Berinde và V. Berinde, A. Felhi, I. A. Rus và cộng sự và một số công trình khác.

Theo hướng nghiên cứu thứ hai, các tác giả tập trung vào việc xây dựng và nghiên cứu tính chất của một số không gian có cấu trúc tương tự hoặc mở rộng từ không gian metric và thiết lập các điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard hay toán tử Picard yếu trên các không gian này. Một số ví dụ tiêu biểu về các không gian đã xây dựng là không gian b -metric, không gian G -metric, không gian 2-metric, không gian b -metric mạnh, không gian metric riêng và một số không gian khác. Đặc biệt, năm 2007, L. G. Huang và X. Zhang giới thiệu không gian metric nón bằng cách thay tập số thực $\mathbb{R}$ trong định nghĩa metric thông thường bằng một nón định

hướng trong không gian Banach. Các tác giả đã thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard dưới giả thiết nón chuẩn tắc, các kết quả này là mở rộng thực sự của Định lý 1 và Định lý 3. Năm 2008, Sh. Rezapour và R. Hamlbarani đã chứng minh lại kết quả của L. G. Huang và X. Zhang mà không cần tính chuẩn tắc của nón. Năm 2014, khi nghiên cứu về định lý điểm bất động trong không gian b -metric mạnh, W. Kirk và N. Shahzad đặt ra câu hỏi: “Liệu mọi không gian b -metric mạnh X có trù mật trong không gian b -metric mạnh đầy đủ X' hay không?” Các tác giả nhận xét rằng, nếu câu trả lời là có thì mọi ánh xạ co $T : X \rightarrow X$ có thể mở rộng thành ánh xạ co $T' : X' \rightarrow X'$ mà T' có duy nhất điểm bất động trong không gian b -metric mạnh đầy đủ. Câu hỏi trên được trả lời bởi T. V. An và N. V. Dung năm 2016.

Định lý 8. *Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Khi đó*

- (i) *(X, D, K) có bổ sung đủ;*
- (ii) *Bổ sung đủ của (X, D, K) là duy nhất theo nghĩa nếu (X_1^*, D_1^*, K_1) , (X_2^*, D_2^*, K_2) là hai bổ sung đủ của (X, D, K) thì tồn tại một song ánh đẳng cự $\phi : X_1^* \rightarrow X_2^*$ đồng nhất trên X .*

Theo hướng nghiên cứu ứng dụng của toán tử Picard và toán tử Picard yếu. Các tác giả đã tìm được những ứng dụng sâu sắc của các định lý điểm bất động cho các ánh xạ co suy rộng trên các không gian có cấu trúc kiểu không gian metric vào những lĩnh vực khác nhau của Toán học. Một số công trình có thể kể đến như của E. Berstovanská, V. Muresan, I. M. Oluru, I. A. Rus, J. Wang và cộng sự.... Từ đó cho thấy, việc tiếp tục phát triển và nghiên cứu các không gian metric suy rộng, cùng với các tính chất về tôpô cho các không gian này là rất cần thiết.

Sự lựa chọn đề tài luận án: “**Về sự tồn tại toán tử Picard trong một số lớp không gian metric suy rộng**” của chúng tôi nhằm làm phong phú các kết quả nghiên cứu về tính chất của các không gian metric, metric suy rộng và các điều kiện đủ cho ánh xạ là toán tử Picard và toán tử Picard yếu trên các lớp không gian này.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

• Mục đích nghiên cứu

Mục đích thứ nhất: Thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu trên không gian metric đầy đủ.

Mục đích thứ hai: Thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard và toán tử Picard yếu trên không gian b -metric mạnh.

Mục đích thứ ba: Xây dựng không gian b -TVS metric nón mạnh và nghiên cứu một số tính chất của không gian này, đặc biệt là thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard và chứng minh nguyên lý bổ sung đủ trong không gian này.

• **Đối tượng nghiên cứu**

Trong luận án này chúng tôi tập trung nghiên cứu:

1. Không gian metric, không gian b -metric mạnh, không gian b -TVS metric nón mạnh.
2. Toán tử Picard và toán tử Picard yếu.

3. Tổng quan về luận án

Với các mục đích trên, trong luận án này chúng tôi đã thu được một số kết quả chính như sau:

(1) *Đối với mục đích thứ nhất:* Dựa trên ý tưởng của Định lý 2 và Định lý 6, chúng tôi thiết lập được một số kết quả mới về điều kiện đủ để một ánh xạ trong không gian metric đầy đủ là toán tử Picard yếu như sau:

Định lý 1.1.1. *Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho*

$$\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } \rho(Ta, Tb) \leq M(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó

$$M(a, b, \alpha) = \frac{\rho(a, Tb) + \rho(b, Ta) + \rho(a, b)}{2\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + \alpha}.$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}.$$

Định lý 1.1.1 của chúng tôi là một dạng định lý điểm bất động của ánh xạ phát triển từ điều kiện co Banach kết hợp với co Kannan. Ví dụ 1.1.2 trong luận án cho thấy, lớp ánh xạ co trong Định lý 1.1.1 và lớp ánh xạ trong Định lý 6 là không trùng nhau. Bằng việc sử dụng khoảng cách Hausdorff, chúng tôi chứng minh một dạng Định lý 1.1.1 cho trường hợp ánh xạ đa trị.

Định lý 1.2.4. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow CB(X)$ là ánh xạ đa trị. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ sao cho

$$\frac{1}{2}d(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } H(Ta, Tb) \leq P(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó

$$P(a, b, \alpha) = \frac{d(a, Tb) + d(b, Ta) + \rho(a, b)}{2\delta(a, Ta) + \delta(b, Tb) + \alpha}, \quad \delta(a, A) := \sup_{b \in A} \rho(a, b).$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu đa trị;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động của T thì

$$\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b}).$$

(2) Đối với mục đích thứ hai: Bằng việc sử dụng các hàm điều khiển, năm 2021, chúng tôi chứng minh một dạng kết quả của J. Górnicki cho không gian b -metric mạnh.

Định lý 2.1.4. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử rằng tồn tại hàm $f \in \mathcal{S}$ sao cho với mỗi $a, b \in X, a \neq b$, ta luôn có

$$D(Ta, Tb) \leq f(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Định lý 2.1.6. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử rằng tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{H}$ sao cho với mỗi $a, b \in X, a \neq b$, ta luôn có

$$D(Ta, Tb) \leq \varphi(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb) + D(a, b)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Dễ thấy, khi $K = 1$ thì Định lý 2.1.4 nhận lại Định lý 4 và Định lý 2.1.6 trở về Định lý 5. Hơn nữa, Ví dụ 2.1.5 và Ví dụ 2.1.7 cho thấy lớp ánh xạ thỏa mãn các định lý của chúng tôi là mở rộng thực sự lớp ánh xạ trong các Định lý 4 và Định lý 5.

Tiếp theo, từ điều kiện co của Định lý 2 và Định lý 3 đã gợi ý cho chúng tôi đề xuất khái niệm *Ánh xạ Kannan-Suzuki* trong Định nghĩa 3 và thiết lập điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard.

Định nghĩa 3. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Ta nói rằng $T : X \rightarrow X$ là ánh xạ *Kannan-Suzuki* nếu tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn

$$D(Ta, Tb) \leq s(D(a, Ta) + D(b, Tb)),$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}D(a, Ta) \leq D(a, b)$.

Định lý 2.1.8. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và T là ánh xạ Kannan-Suzuki. Khi đó, T là toán tử Picard.

Từ Định lý 2.1.8 ta có hệ quả sau là điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trên lớp không gian metric đầy đủ.

Hệ quả 2.1.9. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại $r \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) \leq r(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)), \quad (0.3)$$

với $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b)$. Khi đó, T là toán tử Picard.

Có thể thấy rằng, trong Định lý 3, giả thiết cần điều kiện (0.3) thỏa mãn với mọi $a, b \in X$, trong Hệ quả 2.1.9 của chúng tôi, điều kiện (0.3) chỉ cần thỏa mãn với $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b)$. Tức là mọi ánh xạ thỏa mãn Định lý 3 đều thỏa mãn Hệ quả 2.1.9.

Định nghĩa 4. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Ta nói rằng $T : X \rightarrow X$ là ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki nếu

$$D(Ta, Tb) < \frac{1}{2}(D(a, Ta) + D(b, Tb)),$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}D(a, Ta) < D(a, b)$.

Kết hợp kiểu co của T. Suzuki và của J. Górnicki chúng tôi thu được kết quả sau về sự tồn tại của toán tử Picard trong không gian b -metric mạnh compact.

Định lý 2.1.13. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh compact và T là ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Hơn thế, nếu T liên tục thì T là toán tử Picard.

Ví dụ 2.1.16 chỉ ra rằng để T là toán tử Picard trong Định lý 2.1.13 thì tính liên tục của ánh xạ T không thể bỏ được. Ngoài ra, dễ thấy rằng lớp ánh xạ thỏa mãn định lý của J. Górnicki thì cũng thỏa mãn điều kiện ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki. Kết hợp với Ví dụ 2.1.14 cho thấy Định lý 2.1.13 là mở rộng thực sự kết quả của Górnicki.

Định nghĩa 5. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh và $k \in (0, \frac{1}{2})$. Ánh xạ $T : X \rightarrow CB(X)$ được gọi là ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị nếu tồn tại $s \in (0, k)$ thỏa mãn

$$H(Ta, Tb) \leq s(d(a, Ta) + d(b, Tb)), \quad (0.4)$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}d(a, Ta) \leq D(a, b)$.

Năm 2021, chúng tôi mở rộng Định lý 7 của L. S. Dube và S. P. Singh không gian b -metric mạnh đầy đủ dưới điều kiện của ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị.

Định lý 2.2.2. *Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và T là ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị. Khi đó, T là toán tử Picard yếu đa trị.*

Có thể thấy rằng, trong Định lý 7, giả thiết cần điều kiện (0.4) thỏa mãn với mọi $a, b \in X$, trong Định lý 2.2.2 của chúng tôi, điều kiện (0.4) chỉ cần thỏa mãn với $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}d(a, Ta) \leq D(a, b)$. Tức là mọi ánh xạ thỏa mãn Định lý 7 đều thỏa mãn Định lý 2.2.2. Kết hợp với Ví dụ 2.2.3 cho thấy Định lý 2.2.2 là mở rộng thực sự kết quả của L. S. Dube và S. P. Singh.

(3) *Đối với mục đích thứ ba:* Chúng tôi giới thiệu khái niệm không gian b -TVS metric nón mạnh và nghiên cứu một số tính chất đối với không gian này. Hơn nữa, chúng tôi mở rộng kết quả của Sh. Rezapour và R. Hamlbarani cho không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ với thứ tự sinh bởi nón ($\preceq$) và chứng minh định lý bổ sung đủ cho lớp không gian này. Các kết quả cụ thể như sau:

Định lý 3.3.1. *Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại $s \in [0, 1)$ thỏa mãn*

$$\rho(Ta, Tb) \preceq s\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Định lý 3.3.3. *Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn*

$$\rho(Ta, Tb) \preceq s(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Chú ý rằng, Định lý 3.3.1 là mở rộng của Định lý 2.3 và Định lý 3.3.3 là mở rộng của Định lý 2.6 trong công trình của Sh. Rezapour và R. Hamlbarani năm 2008. Hơn nữa, Ví dụ 3.3.2 và Ví dụ 3.3.4 cho thấy các mở rộng đó là mở rộng thực sự.

Sử dụng tính chất lân cận của nón trong không gian vectơ tôpô lỗi địa phương Hausdorff thực, chúng tôi thiết lập Nguyên lý bổ sung đủ cho không gian b -TVS metric nón mạnh.

Định lý 3.4.7. *Cho (X, E, C, K, ρ) là một không gian b -TVS metric nón mạnh và nón C thỏa tính chất lân cận trong không gian vectơ tôpô lỗi địa phương Hausdorff thực E đầy đủ. Khi đó*

- (i) (X, E, C, K, ρ) có bổ sung đủ;
- (ii) *Bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) là duy nhất theo nghĩa là nếu $(X_1^*, E, C, K_1, \rho_1^*)$*

và $(X_2^*, E, C, K_2, \rho_2^*)$ là hai bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) thì tồn tại một song ánh đẳng cự $\phi : X_1^* \rightarrow X_2^*$ đồng nhất trên X .

Kết quả trên của chúng tôi trả lời cho câu hỏi của W. Kirk và N. Shahzad cho trường hợp trong không gian b -TVS metric nón mạnh. Ngoài ra, Ví dụ 3.4.8 cho thấy Định lý 3.4.7 là mở rộng thực sự của Định lý 8.

Các kết quả chính của luận án chúng tôi đã công bố trong các bài báo [A1], [A2], [A3], [A4] và [A5] trong danh mục các công trình liên qua đến luận án.

4. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản: Trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu theo hướng nghiên cứu, chúng tôi phát hiện các vấn đề mở có tính thời sự cần phải giải quyết và sử dụng các kiến thức, kỹ thuật của Giải tích hàm, lý thuyết điểm bất động và lý thuyết phương trình vi phân để giải quyết các vấn đề đặt ra.

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.
- Hội thảo Tối ưu và tính toán khoa học lần thứ 19, Ba Vì, 22-24/04/2021.

Tác giả

Chương 1

Toán tử Picard yếu trong không gian metric đầy đủ

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu đơn trị và toán tử Picard yếu đa trị trong không gian metric đầy đủ. Các kết quả chính của chương này được chúng tôi công bố trong bài báo [A2] thuộc danh mục các công trình liên quan đến luận án.

1.1 Toán tử Picard yếu đơn trị

Định lý 1.1.1. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho

$$\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } \rho(Ta, Tb) \leq M(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó $M(a, b, \alpha) = \frac{\rho(a, Tb) + \rho(b, Ta) + \rho(a, b)}{2\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + \alpha}$. Khi đó

(1) T là toán tử Picard yếu;

(2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì $\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}$.

Ví dụ 1.1.2. Cho X là tập hợp có ít nhất 2 phần tử. Hàm $\rho(a, b)$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a = b, \\ \frac{1}{3} & \text{nếu } a \neq b. \end{cases}$$

Khi đó (X, ρ) là không gian metric đầy đủ.

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được xác định bởi $Ta = a$ với mọi $a \in X$. Dễ dàng kiểm tra được T không thỏa mãn Định lý 6. Tuy nhiên, ánh xạ T thỏa mãn các điều kiện

của Định lý 1.1.1 với $\alpha = 1$. Hơn nữa, T là toán tử Picard yếu và nếu $\bar{a}, \bar{b}$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì $\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{1}{3}$.

Ví dụ 1.1.3. Giả sử $X = \{0, 1, 2\}$. Xét metric $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi $\rho(a, a) = 0$ với $a \in X$, $\rho(0, 1) = \rho(1, 0) = \frac{1}{2}$, $\rho(0, 2) = \rho(2, 0) = \frac{3}{2}$, $\rho(1, 2) = \rho(2, 1) = 2$. Khi đó (X, ρ) là không gian metric đầy đủ. Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ bởi $T0 = 0, T1 = 1$ và $T2 = 1$. Với $\alpha = 1$, bằng tính toán trực tiếp, ta thấy T thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1.1.1. Dễ thấy T là toán tử Picard yếu với tập điểm bất động là $\{0, 1\}$ và $\frac{1}{2} = \rho(0, 1) \geq \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$.

Hệ quả 1.1.4. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và T là ánh xạ từ X vào chính nó. Giả sử tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho T thỏa mãn giả thiết của Định lý 1.1.1. Khi đó T có điểm bất động duy nhất nếu $M(a, b, \alpha) < 1$ với mọi $a, b \in X$.

Ví dụ 1.1.5. Giả sử $X = \{0, 1, 2\}$ và $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\rho(0, 0) = \rho(1, 1) = \rho(2, 2) = 0, \rho(0, 1) = \rho(1, 0) = \frac{1}{2}, \rho(0, 2) = \rho(2, 0) = 1,$$

$\rho(1, 2) = \rho(2, 1) = \frac{1}{2}$. Khi đó (X, ρ) là không gian metric đầy đủ. Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ bởi $T0 = 0, T1 = 0$ và $T2 = 0$. Với $\alpha = 2$, bằng tính toán trực tiếp ta có $M(a, b, \alpha) < 1$ với mọi $a, b \in X$. Hơn nữa, vì $\rho(Ta, Tb) = 0$ với mọi $a, b \in X$ nên $\rho(Ta, Tb) \leq M(a, b, 2) \cdot \rho(a, b)$, với mọi $a, b \in X$. Vì vậy T thỏa mãn các điều kiện của Hệ quả 1.1.4 với $\alpha = 2$. Dễ thấy, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} = 0$.

Định lý 1.1.6. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2}\rho(Ta, a) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } \rho(Ta, Tb) \leq N(a, b, \alpha)\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X,$$

trong đó $N(a, b, \alpha) = \frac{\rho(a, Tb) + \rho(b, Ta) + \rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + \rho(a, b)}{3\rho(a, Ta) + 2\rho(b, Tb) + \alpha}$. Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì $\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}$.

1.2 Toán tử Picard đa trị

Định nghĩa 1.2.1. Cho hai tập hợp bất kỳ A, B và 2^B là họ tất cả các tập con của B . Một ánh xạ T đi từ tập hợp A vào tập hợp 2^B được gọi là ánh xạ đa trị từ A vào B , kí hiệu là $T : A \rightarrow 2^B$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow 2^X$. Điểm $a_0 \in X$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ T nếu $a_0 \in Ta_0$.

Bổ đề 1.2.3. Cho (X, ρ) là không gian metric và $A, B \in CB(X)$. Khi đó nếu $H(A, B) > 0$ thì với mỗi $q > 1$ và $a \in A$, tồn tại $b \in B$ sao cho

$$\rho(a, b) < q \cdot H(A, B).$$

Định lý 1.2.4. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow CB(X)$ là ánh xạ đa trị. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2}d(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } H(Ta, Tb) \leq P(a, b, \alpha)\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X,$$

$$P(a, b, \alpha) = \frac{d(a, Tb) + d(b, Ta) + \rho(a, b)}{2\delta(a, Ta) + \delta(b, Tb) + \alpha}, \quad \delta(a, A) := \sup_{b \in A} \rho(a, b). \text{ Khi đó}$$

(1) T là toán tử Picard yếu đa trị;

(2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động của T thì $\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b})$.

Ví dụ 1.2.5. Giả sử $X = \{0, 1, 2\}$ và $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } a = b \in X, \\ 2, & \text{nếu } a \neq b \in X. \end{cases}$$

Khi đó (X, ρ) là không gian metric đầy đủ. Xét ánh xạ $T : X \rightarrow CB(X)$ được xác định bởi $T0 = \{0\}, T1 = \{1\}, T2 = \{1, 2\}$. Với $\alpha = 2$, dễ dàng kiểm tra được T thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 1.2.4 với $\alpha = 2$. Hiển nhiên T là toán tử Picard yếu đa trị với tập điểm bất động là $\{0, 1, 2\}$ và nếu $\bar{a}, \bar{b}$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì $\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{2}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b})$.

Hệ quả 1.2.6. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow CB(X)$ là ánh xạ đa trị. Giả sử tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho T thỏa mãn giả thiết của Định lý 1.2.4. Khi đó T có điểm bất động duy nhất nếu $P(a, b, \alpha) < 1$ với mọi $a, b \in X$.

Định lý 1.2.7. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow CB(X)$ là ánh xạ đa trị. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2}d(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } H(Ta, Tb) \leq Q(a, b, \alpha)\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X,$$

$$\text{trong đó } Q(a, b, \alpha) = \frac{d(a, Tb) + d(b, Ta) + d(a, Ta) + d(b, Tb) + \rho(a, b)}{3\delta(a, Ta) + 2\delta(b, Tb) + \alpha}. \text{ Khi đó}$$

(1) T là toán tử Picard yếu đa trị;

(2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động của T thì $\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b})$.

Chương 2

Toán tử Picard và Picard yếu trong không gian b -metric mạnh

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard đơn trị và toán tử Picard yếu đa trị trong lớp không gian b -metric mạnh. Kết quả chính của chương được viết dựa trên bài báo [A1] và bài báo [A4] trong danh mục các công trình liên quan đến luận án.

2.1 Toán tử Picard đơn trị

Trong mục này, chúng tôi mở rộng các kết quả của J. Górcnicki và của R. Kannan cho không gian b -metric mạnh. Trước tiên, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm trong không gian b -metric mạnh.

Định nghĩa 2.1.1. Cho X là một tập khác rỗng và số thực $K \geq 1$. Một ánh xạ $D : X \times X \rightarrow [0; +\infty)$ được gọi là b -metric mạnh trên X nếu:

- (D1) $D(a, b) = 0$ nếu và chỉ nếu $a = b$;
- (D2) $D(a, b) = D(b, a)$ với mọi $a, b \in X$;
- (D3) $D(a, b) \leq D(a, c) + KD(c, b)$ với mọi $a, b, c \in X$.

Khi đó, bộ ba (X, D, K) được gọi là không gian b -metric mạnh.

Định nghĩa 2.1.2. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh, $\{a_n\}$ là một dãy các phần tử trong X và $a \in X$. Khi đó:

(i) Dãy $\{a_n\}$ được gọi là hội tụ đến x nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} D(a_n, a) = 0$. Ta kí hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ hoặc $a_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$.

(ii) $\{a_n\}$ được gọi là dãy Cauchy trong X nếu $\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(a_n, a_m) = 0$.

(iii) Không gian b -metric mạnh (X, D, K) được gọi là không gian b -metric mạnh đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong X là hội tụ.

(iv) Không gian b -metric mạnh (X, D, K) được gọi là không gian b -metric mạnh compact nếu mọi dãy trong X đều chứa một dãy con hội tụ.

Mệnh đề 2.1.3. Cho $\{a_n\}$ là một dãy các phần tử trong không gian b -metric mạnh (X, D, K) và giả sử

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(a_i, a_{i+1}) < \infty.$$

Khi đó $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy.

2.1.1 Toán tử Picard cho một số lớp ánh xạ kiểu Kannan đối với hàm điều khiển

Định lý 2.1.4. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử rằng tồn tại hàm $f \in \mathcal{S}$ sao cho với mỗi $a, b \in X$ và $a \neq b$, ta luôn có

$$D(Ta, Tb) \leq f(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Ví dụ 2.1.5. Lấy $X = \{0, 1, 2\}$ và $D : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi

$$D(0, 0) = D(1, 1) = D(2, 2) = 0,$$

$$D(0, 1) = D(1, 0) = \frac{1}{2},$$

$$D(0, 2) = D(2, 0) = 6,$$

$$D(1, 2) = D(2, 1) = 5.$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi $T0 = 0, T1 = 0, T2 = 1$, hàm $f \in \mathcal{S}$ được cho bởi $f(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{6}}, t > 0$ và $f(0) \in [0, \frac{1}{2})$. Khi đó $(X, D, K = 2)$ là không gian b -metric mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric vì

$$6 = D(2, 0) > D(2, 1) + D(1, 0) = \frac{11}{2}.$$

Do đó, Định lý 4 không áp dụng được. Mặt khác, dễ thấy ánh xạ T thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.1.4 và T là toán tử Picard.

Định lý 2.1.6. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử rằng tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{H}$ sao cho với mỗi $a, b \in X$ và $a \neq b$, ta luôn có

$$D(Ta, Tb) \leq \varphi(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb) + D(a, b)),$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Ví dụ 2.1.7. Xét không gian b -metric mạnh đầy đủ (X, D, K) và ánh xạ T trong Ví dụ 2.1.5. Hiển nhiên, Định lý 5 không áp dụng được.

Ta xây dựng hàm $\varphi \in \mathcal{H}$ bởi $\varphi(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}}$, $t > 0$ và $\varphi(0) \in [0, \frac{1}{3})$. Như vậy, ánh xạ T thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.1.6. Hiển nhiên, T là toán tử Picard.

2.1.2 Toán tử Picard cho ánh xạ Kannan-Suzuki

Định lý 2.1.8. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và T là ánh xạ Kannan-Suzuki. Khi đó, T là toán tử Picard.

Hệ quả 2.1.9. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) \leq s(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)),$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b)$. Khi đó, T là toán tử Picard.

Định lý 2.1.10. Giả sử $f : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm thực liên tục thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$|f(t, a) - f(t, b)| \leq k|a(t) - b(t)| \quad (2.1)$$

với mọi $(t, a), (t, b) \in [0, 1] \times X$ và

$$|f(t, a)| \leq k \text{ với mọi } (t, a) \in [0, 1] \times X. \quad (2.2)$$

Khi đó, bài toán phương trình vi phân Cauchy

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = f(t, a) \\ a(0) = a_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

có nghiệm duy nhất $\bar{a}$ trên X .

Lớp các hàm điều khiển phụ thuộc tham số $\mathcal{F}_q$ được xây dựng bởi:

$$\mathcal{F}_q = \{\psi : (0, \infty) \rightarrow [0, q) : \psi(t_n) \rightarrow q \text{ kéo theo } t_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty\},$$

ở đây $q \in (0, \frac{1}{2})$. Sử dụng hàm điều khiển phụ thuộc tham số cho ánh xạ Kannan-Suzuki, chúng tôi thu được kết quả sau đây cho không gian b -metric mạnh.

Định lý 2.1.11. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ $D : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại hàm $\psi \in \mathcal{F}_q$ thỏa mãn

$$\frac{1}{K+1}D(a, Ta) \leq D(a, b)$$

kéo theo

$$D(Ta, Tb) \leq \psi(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb)),$$

với mọi $a, b \in X, a \neq b$. Khi đó, T là toán tử Picard.

Ví dụ 2.1.12. Cho $X = \{0, 1, 2\}$ và hàm $D : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi $D(a, b) = (a - b)^2$. Khi đó $(X, D, K = 3)$ là không gian b -metric mạnh đầy đủ.

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi $T0 = 1, T1 = 1, T2 = 0$ và hàm ψ xác định bởi $\psi(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{8}}, t > 0, \psi(0) \in [0, \frac{1}{3})$. Khi đó $\psi \in \mathcal{F}_{\frac{1}{3}}$. Dễ dàng kiểm tra được T thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.1.11. Hiển nhiên, T là toán tử Picard.

2.1.3 Toán tử Picard cho ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki

Định lý 2.1.13. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh compact và T là ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki. Khi đó, T có một điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Hơn thế, nếu T liên tục thì T là toán tử Picard.

Ví dụ 2.1.14. Cho $X = \{0, 1, 2\}$ và hàm $D : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= D(1, 1) = D(2, 2) = 0, \\ D(0, 1) &= D(1, 0) = \frac{1}{2} \\ D(0, 2) &= D(2, 0) = 6, \\ D(1, 2) &= D(2, 1) = 5. \end{aligned}$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi $T0 = 0, T1 = 0$ và $T2 = 1$. Dễ thấy $(X, D, K = 2)$ là không gian b -metric mạnh compact nhưng không là metric compact vì $6 = D(2, 0) > D(2, 1) + D(1, 0) = \frac{11}{2}$. Do đó, Định lý 2.2 của Górnicki không áp dụng được. Tuy nhiên, ta dễ dàng kiểm tra được T thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.1.13 và T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} = 0$. Hơn nữa, với mỗi $a \in X$ thì $T^n a = 0$ với mọi $n \geq 2$. Do đó T là toán tử Picard.

Hệ quả 2.1.15. Cho (X, ρ) là không gian metric compact và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) < \frac{1}{2}(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb))$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) < \rho(a, b)$. Khi đó, T có một điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Hơn nữa, nếu T liên tục thì T là toán tử Picard.

Ví dụ 2.1.16. Cho $X = [-4, -3] \cup \{0\} \cup [3, 4]$, hàm $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi $\rho(a, b) = |a - b|$ với mọi $a, b \in X$. Ta dễ dàng thấy rằng (X, ρ) là không gian metric compact. Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi

$$Ta = \begin{cases} \frac{4a+9}{a+2}, & \text{nếu } a \in [-4, -3), \\ 0, & \text{nếu } a \in \{-3, 0, 3\}, \\ \frac{-4a+9}{a-2}, & \text{nếu } a \in (3, 4], \end{cases}$$

Bằng tính toán trực tiếp ta thấy T thỏa mãn tất cả các điều kiện trong Hệ quả 2.1.15 trừ tính liên tục của ánh xạ T . Dễ dàng thấy rằng T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} = 0$. Hơn nữa, nếu $a \notin \{-3, 0, 3\}$ thì dãy $\{T^n a\}$ không hội tụ đến $\bar{a} = 0$. Do đó T không là toán tử Picard.

Chúng minh hoàn toàn tương tự như chứng minh Định lý 2.1.13, ta thu được kết quả dưới đây.

Định lý 2.1.17. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh compact và ánh xạ $T : X \rightarrow X$ thỏa mãn

$$D(Ta, Tb) < \frac{1}{3}(D(a, Ta) + D(b, Tb) + D(a, b))$$

với $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}D(a, Ta) < D(a, b)$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Hơn thế, nếu T là ánh xạ liên tục thì T là toán tử Picard.

2.2 Toán tử Picard yếu cho ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị

Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Kí hiệu $CB(X)$ là tập hợp tất cả các tập con khác rỗng, đóng và bị chặn của X . Hàm H xác định bởi

$$H(A, B) := \max\{\sup_{a \in B} d(a, A); \sup_{a \in A} d(a, B)\},$$

trong đó $A, B \in CB(X)$ và $d(a, A) := \inf_{b \in A} D(a, b)$ được gọi là *metric Hausdorff* trên $CB(X)$ cảm sinh bởi D .

Chúng minh tương tự như chứng minh Bổ đề 1.2.3, ta thu được.

Bổ đề 2.2.1. Giả sử rằng (X, D, K) là không gian b -metric mạnh và $A, B \in CB(X)$. Nếu $H(A, B) > 0$ thì với mỗi $h > 1$ và $a \in A$ tồn tại $b \in B$ sao cho

$$D(a, b) < h \cdot H(A, B).$$

Định lý 2.2.2. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ, $T : X \rightarrow CB(X)$ là ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị. Khi đó T là toán tử Picard yếu đa trị.

Ví dụ 2.2.3. Giả sử $X = \{1, 2, 3\}$, $K = 3$ và $D : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ được định nghĩa bởi

$$D(1, 2) = 1, D(1, 3) = 4, D(2, 3) = 2 \text{ và } D(1, 1) = D(2, 2) = D(3, 3) = 0.$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow CB(X)$ được xác định bởi

$$T1 = \{2\}, T2 = \{2\}, T3 = \{1, 2\}.$$

Khi đó (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric bởi vì

$$D(1, 3) > D(1, 2) + D(2, 3).$$

Do đó, Định lý 7 không áp dụng được. Mặt khác, bằng tính toán trực tiếp ta thấy T thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.2.2 và T là toán tử Picard yếu đa trị.

Chương 3

Toán tử Picard và bổ sung đủ đối với không gian b -TVS metric nón mạnh

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu không gian b -TVS metric nón mạnh. Sau đó, chúng tôi mở rộng kết quả của Sh. Rezapour và R. Hamlbarani trong không gian này. Phần cuối chương, dành để thiết lập Nguyên lý bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh. Nội dung chính của chương được viết dựa trên các bài báo [A3] và [A5] trong danh mục các công trình liên quan đến luận án.

3.1 Tính chất lân cận của nón

Định nghĩa 3.1.1. Cho E là không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực, θ là vectơ gốc của E và $C \subset E$. Ta nói, tập C là nón của E nếu:

- (i) C là tập đóng, khác rỗng, $C \neq \{\theta\}$;
- (ii) $ax + by \in C$ với mọi $x, y \in C$, a, b là các số thực không âm;
- (iii) $C \cap (-C) = \{\theta\}$.

Định nghĩa 3.1.2. Cho E là không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực và nón $C \subset E$ với phần trong khác rỗng. Ta định nghĩa quan hệ thứ tự bộ phận $\preceq$ trên E sinh bởi nón C như sau

$$x, y \in E : x \preceq y \text{ nếu } y - x \in C.$$

Nếu $x \preceq y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x \prec y$. Nếu $y - x \in \text{int } C$ thì ta viết $x \ll y$.

Trong các phần tiếp theo, ta luôn giả sử E là không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực và $\preceq$ là quan hệ thứ tự bộ phận trên E sinh bởi nón có phần trong

khác rỗng. Từ định nghĩa của nón và quan hệ thứ tự bộ phận trên E , ta dễ dàng chứng minh được một số tính chất sau.

Mệnh đề 3.1.3. Cho C là một nón trong E . Khi đó

- (i) $C + C = C$;
- (ii) $\text{int } C + C = \text{int } C$;
- (iii) $\text{int } C + \text{int } C = \text{int } C$;
- (iv) Với mọi $a \in \text{int } C$ và $\beta > 0$ thì $\beta a \in \text{int } C$.

Mệnh đề 3.1.4. Cho C là một nón trong E . Khi đó

- (i) Nếu $a \preceq b$ và $c \preceq d$ thì $a + c \preceq b + d$ với mọi $a, b, c, d \in E$;
- (ii) Nếu $a \preceq b$ và $c \ll d$ thì $a + c \ll b + d$ với mọi $a, b, c, d \in E$;
- (iii) Nếu $a \ll b$ và $c \ll d$ thì $a + c \ll b + d$ với mọi $a, b, c, d \in E$;
- (iv) Nếu $a \preceq \lambda a, a \in C$ và $0 \leq \lambda < 1$ thì $a = \theta$.

Mệnh đề 3.1.5. Cho C là một nón trong E . Khi đó

- (i) Nếu $a \preceq b$ và $b \ll c$ thì $a \ll c$ với mọi $a, b, c \in E$;
- (ii) Nếu $a \ll b$ và $b \preceq c$ thì $a \ll c$ với mọi $a, b, c \in E$;
- (iii) Nếu $a \ll b$ và $b \ll c$ thì $a \ll b$ với mọi $a, b, c \in E$.

Mệnh đề 3.1.6. Giả sử $e \in \text{int } C, \theta \preceq a_n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \theta$. Khi đó, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \ll e$ với mọi $n > N$.

Định nghĩa 3.1.7. Cho C là một nón trong E . Ta nói rằng nón C thỏa mãn tính chất lân cận nếu với mỗi lân cận U của θ trong E có một lân cận V của θ trong E sao cho

$$(V + C) \cap (V - C) \subset U.$$

Định nghĩa 3.1.8. Cho C là một nón trong E . Ta nói rằng $B \subseteq E$ là tập sinh của nón C và viết $C = \text{cone}(B)$ nếu

$$C = \{tb : b \in B, t \geq 0\}.$$

Nếu B không chứa điểm gốc θ và mỗi $c \in C \setminus \{\theta\}$ đều tồn tại duy nhất $b \in B, t > 0$ sao cho $c = tb$ thì B được gọi là cơ sở của nón C .

Nhận xét 3.1.9. Nếu nón C có một cơ sở lồi, đóng và bị chặn thì nón C thỏa mãn tính chất lân cận.

Ví dụ 3.1.10. Cho $E = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}_+$. Khi đó C thỏa mãn tính chất lân cận.

Mệnh đề 3.1.11. Giả sử rằng nón C thỏa mãn tính chất lân cận. Khi đó với mỗi lân cận U của θ trong E , tồn tại phần tử $e \in E, \theta \ll e$ sao cho

$$C \cap (e - C) \subset U.$$

Bổ đề 3.1.12. Giả sử nón C thỏa mãn tính chất lân cận trong không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực E . Cho $\{u_n\}, \{v_n\}, \{a_n\}$ là các dãy trong E sao cho $a_n \preceq u_n \preceq v_n$ với mọi $n \geq 1$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \theta.$$

Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \theta$.

Ví dụ 3.1.13. Giả sử $E = C_{[0,1]}^1$ với chuẩn

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

và nón $C = \{f \in E : f(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]\}$. Khi đó nón C không thỏa mãn tính chất lân cận. Thật vậy, xét $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$ và $g_n(t) = \frac{1}{n}$ với mọi $t \in [0, 1]$. Khi đó $\theta \preceq f_n \preceq g_n$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \theta$. Mặt khác, ta có

$$\|f_n\| = \max_{t \in [0,1]} \frac{t^n}{n} + \max_{t \in [0,1]} t^{n-1} = 1 + \frac{1}{n} > 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Do đó f_n không hội tụ đến θ . Theo Bổ đề 3.1.12, suy ra nón C không có tính chất lân cận.

3.2 Không gian b -TVS metric nón mạnh

Định nghĩa 3.2.1. Cho X là một tập khác rỗng và $K \geq 1$. Ánh xạ $\rho : X \times X \rightarrow E$ được gọi là một b -TVS metric nón mạnh trên X nếu

(d1) $\theta \preceq \rho(a, b)$ với mọi $a, b \in X$

và $\rho(a, b) = \theta$ nếu và chỉ nếu $a = b$;

(d2) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ với mọi $a, b \in X$;

(d3) $\rho(a, b) \preceq \rho(a, c) + K\rho(c, b)$ với mọi $a, b, c \in X$.

Khi đó (X, E, C, K, ρ) được gọi là một không gian b -TVS metric nón mạnh.

Định nghĩa 3.2.2. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh và $\{a_n\}$ là một dãy các phần tử của X . Ta nói rằng

(i) a là giới hạn của dãy $\{a_n\}$ nếu với mọi $e \in E$, $\theta \ll e$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\rho(a_n, a) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Kí hiệu là $a_n \rightarrow a$ hoặc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(ii) $\{a_n\}$ là dãy Cauchy nếu với mọi $e \in E$, $\theta \ll e$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\rho(a_n, a_m) \ll e$ với mọi $n, m \geq n_0$.

(iii) Nếu mọi dãy Cauchy là hội tụ trong X thì (X, E, C, K, ρ) được gọi là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ.

Bổ đề 3.2.3. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh và $\{a_n\}$ là một dãy các phần tử của X . Khi đó, ta có:

(i) Nếu $\{a_n\}$ hội tụ đến $a \in X$ thì $\{a_n\}$ là dãy Cauchy.

(ii) Nếu $\{a_n\}$ hội tụ đến $a \in X$ và $\{a_n\}$ hội tụ đến $y \in X$ thì $a = b$.

Bổ đề 3.2.4. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh, nón C thỏa mãn tính chất lân cận và $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ là hai dãy trong X . Khi đó

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$ nếu và chỉ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, a) = \theta$.

(ii) $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy nếu và chỉ nếu $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = \theta$.

(iii) Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in X$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) = \rho(a, b).$$

Nhận xét 3.2.5. Chú ý rằng trong công trình của L. G. Huang và X. Zhang, Bổ đề 3.2.4 được chứng minh dưới điều kiện C là nón chuẩn tắc trong không gian Banach, ở đây chúng tôi giả thiết C là nón thỏa mãn tính chất lân cận trong không gian lồi địa phương Hausdorff thực. Ví dụ sau cho thấy Bổ đề 3.2.4 không còn đúng nếu nón C không có tính chất lân cận trong E .

Ví dụ 3.2.6. Giả sử $E = C_{[0,1]}^1$ với chuẩn

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Xét nón $C = \{f \in E : f(t) \geq 0 \text{ với mọi } t \in [0, 1]\}$. Khi đó nón C không có tính chất lân cận (xem ví dụ 3.1.13).

Giả sử $X = \{0, \frac{1}{n} : n \geq 1\}$ và $\rho : X \times X \rightarrow E$ được xác định bởi

$$\rho(a, b) = \begin{cases} \theta, & \text{nếu } a = b, \\ |f_n - f_m|, & \text{nếu } a \neq b \in \{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}, \\ f_n, & \text{nếu } a \neq b \in \{\frac{1}{n}, 0\}, \end{cases}$$

ở đây $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$ với mọi $t \in [0, 1]$ và $n \geq 1$.

Dễ dàng kiểm tra được ρ là b -TVS metric nón mạnh trên X với $K = 1$ và $(X, E, C, K = 1, \rho)$ là không gian b -TVS metric nón mạnh. Hơn nữa, ta có

$$\rho\left(\frac{1}{n}, 0\right) = f_n \preceq \frac{I_E}{n} \text{ với mọi } n \geq 1,$$

ở đây $I_E \in E$ bởi $I_E(t) = t$ với $t \in [0, 1]$. Từ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_E}{n} = \theta$, theo Mệnh đề 3.1.6, với mọi $e \in E, \theta \ll e$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\frac{I_E}{n} \ll e \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Vì vậy, $\rho\left(\frac{1}{n}, 0\right) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Mặt khác, ta có

$$\left\| \rho\left(\frac{1}{n}, 0\right) - \theta \right\| = \|f_n - \theta\| = \max_{t \in [0, 1]} \frac{t^n}{n} + \max_{t \in [0, 1]} t^{n-1} = 1 + \frac{1}{n} > 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Do đó $\rho\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ không hội tụ đến θ trong E . Vậy Bổ đề 3.2.4(i) không còn đúng.

3.3 Toán tử Picard trong không gian b -TVS metric nón mạnh

Định lý 3.3.1. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại $s \in [0, 1)$ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) \preceq s\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Ví dụ 3.3.2. Cho $X = \{0, 1, 2\}$, $E = \mathbb{R}^2$ và

$$C = \{(a, b) \in E : a \geq 0, b \geq 0\}.$$

Hàm $\rho : X \times X \rightarrow E$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, a) = \theta \text{ với } a \in X, \quad \rho(a, b) = \rho(b, a) \text{ với mọi } a, b \in X$$

và

$$\rho(0, 1) = (4, 4), \quad \rho(0, 2) = \rho(1, 2) = (1, 1).$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ xác định bởi $T1 = T2 = T0 = 0$. Rõ ràng $(X, E, C, K = 3, \rho)$ là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric nón vì

$$\rho(0, 2) + \rho(2, 1) = (2, 2) \preceq (4, 4) = \rho(0, 1).$$

Do đó, kết quả của Sh. Rezapour và R. Hamlbarani không áp dụng được. Tuy nhiên, dễ dàng kiểm tra được tất cả các giả thiết của Định lý 3.3.1 thỏa mãn và T là toán tử Picard.

Định lý 3.3.3. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) \preceq s(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Ví dụ 3.3.4. Cho $X = \{0, 2, 3\}$, $E = \mathbb{R}^2$ và

$$C = \{(a, b) \in E : a \geq 0, b \geq 0\}.$$

Hàm $\rho : X \times X \rightarrow E$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, a) = \theta = (0, 0) \text{ với } a \in X, \quad \rho(3, 0) = \rho(0, 3) = (3, 3),$$

$$\rho(2, 0) = \rho(0, 2) = \rho(2, 3) = \rho(3, 2) = (1, 1).$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ xác định bởi $T0 = T2 = T3 = 0$. Rõ ràng $(X, E, C, K = 2, \rho)$ là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric nón. Do đó, kết quả của Sh. Rezapour và R. Hamlbarani không áp dụng được. Tuy nhiên, dễ dàng kiểm tra được tất cả các giả thiết của Định lý 3.3.3 thỏa mãn và T là toán tử Picard.

3.4 Bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh

Định nghĩa 3.4.1. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh. Với $a_0 \in X$ và $e \in E, \theta \ll e$, tập con $B(a_0, e) := \{a \in X : \rho(a_0, a) \ll e\}$ của X được gọi là hình cầu mở tâm a_0 bán kính e . Ta nói rằng:

- (i) Một tập $A \subset X$ là mở nếu với mỗi $a \in A$, tồn tại $e_a \in E, \theta \ll e_a$ sao cho $B(a, e_a) \subset A$. Một tập $B \subset X$ là đóng nếu phần bù của nó là tập mở.
- (ii) Giao của tất cả các tập đóng chứa A là bao đóng của A , kí hiệu là $\bar{A}$. Tập A được gọi là trù mật trong X nếu $\bar{A} = X$.

Nhận xét 3.4.2. Nếu (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh. Khi đó các khẳng định sau đây là đúng:

- (i) Tập $\emptyset$ và cả không gian X là các tập mở và cũng là các tập đóng.

- (ii) Hình cầu mở $B(a_0, e)$ là tập mở, hình cầu đóng $\bar{B}(a_0, e)$ là tập đóng, ở đây $\bar{B}(a_0, e) := \{a \in X : \rho(a_0, a) \preceq e\}$, $e \in E$, $\theta \ll e$, $a_0 \in X$.
- (iii) Hợp của các tập mở là mở, giao của các tập đóng là đóng.
- (iv) Giao của một số hữu hạn các tập mở là mở, hợp của một số hữu hạn các tập đóng là đóng.

Mệnh đề 3.4.3. *Dãy các phần tử $\{a_n\}$ của X là hội tụ đến a trong (X, E, C, K, ρ) nếu và chỉ nếu mọi tập mở W chứa a , tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $a_n \in W$ với mọi $n \geq n_0$.*

Mệnh đề 3.4.4. *Cho A là một tập con của không gian b -TVS metric nón mạnh (X, E, C, K, ρ) . Khi đó, $a \in \bar{A}$ nếu và chỉ nếu tồn tại một dãy $\{a_n\} \subset A$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.*

Mệnh đề 3.4.5. *Cho A là tập con của không gian b -TVS metric nón mạnh (X, E, C, K, ρ) . Khi đó A là tập trừ mật trong X nếu và chỉ nếu với mỗi $a \in X$ và $e \in E$, $\theta \ll e$, tồn tại $a \in A$ sao cho $\rho(a, A) \ll e$.*

Định nghĩa 3.4.6. (i) Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ một không gian b -TVS metric nón mạnh (X, E, C, K, ρ) đến một không gian b -TVS metric nón mạnh (Y, E, C, K', ρ') được gọi là phép đẳng cự nếu $\rho'(f(a), f(b)) = \rho(a, b)$ với mọi $a, b \in X$.

(ii) Một không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ (X^*, E, C, K^*, ρ^*) được gọi là bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh (X, E, C, K, ρ) nếu tồn tại một phép đẳng cự $f : X \rightarrow X^*$ sao cho $\overline{f(X)} = X^*$.

Định lý 3.4.7. *Cho (X, E, C, K, ρ) là một không gian b -TVS metric nón mạnh và nón C thỏa tính chất lân cận trong không gian vectơ tôpô rời địa phương Hausdorff thực E đầy đủ. Khi đó*

- (i) (X, E, C, K, ρ) có bổ sung đủ;
- (ii) *Bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) là duy nhất theo nghĩa là nếu $(X_1^*, E, C, K_1, \rho_1^*)$ và $(X_2^*, E, C, K_2, \rho_2^*)$ là hai bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) thì tồn tại một song ánh đẳng cự $\phi : X_1^* \rightarrow X_2^*$ đồng nhất trên X .*

Ví dụ 3.4.8. Giả sử $X = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{R}^2$, $C = \{(t, 0) \in E : t \geq 0\}$, $K \geq 1$ và $\rho : X \times X \rightarrow E$ bởi $\rho(a, b) = (|a - b|, 0)$ với mọi $a, b \in X$. Vì (X, E, C, K, ρ) không là không gian b -metric mạnh. Do đó Định lý 8 không áp dụng được. Dễ dàng kiểm tra được (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh và tất cả các giả thiết trong Định lý 3.4.7 được thỏa mãn. Hơn nữa, ta có $(X^* = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2, C, K, \rho^*)$ là bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) , ở đây $\rho^*(a^*, b^*) = (|a^* - b^*|, 0)$ với mọi $a^*, b^* \in X^*$.

KẾT LUẬN CHUNG

Luận án nghiên cứu về sự tồn tại một số lớp toán Picard yếu và toán tử Picard trên không gian metric và metric suy rộng.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu đơn trị và toán tử Picard yếu đa trị trong không gian metric đầy đủ.
2. Thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard và toán tử Picard yếu đa trị trong không gian b -metric mạnh.
3. Giới thiệu không gian b -TVS metric nón mạnh và thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trong không gian này.
4. Thiết lập Nguyên lý bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo cho kết quả của luận án như sau:

1. Nghiên cứu toán tử Picard và toán tử Picard yếu cho các không gian metric suy rộng không đầy đủ.
2. Nghiên cứu một số ứng dụng của toán tử Picard và Picard yếu vào các bài toán về sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân, hệ phương trình tuyến tính, phương trình tích phân.
3. Nghiên cứu bài toán cân bằng không cộng tác trong trò chơi trên không gian metric suy rộng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA NGHIÊN CỨU SINH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

- [A1] Hieu Doan (2021), “A new type of Kannan’s fixed point theorem in strong b -metric spaces”, *AIMS Mathematics*, 6 (7), 7895–7908. (SCIE)
- [A2] Doan Trong Hieu and Bui The Hung (2022), “Some fixed point theorems for weakly Picard operators in complete metric spaces and applications”, *Commun. Korean Math. Soc.* Vol. 37, No. 1, 75-89. (ESCI)
- [A3] Doan Trong Hieu, Bui The Hung, Muhammad Sirajo Abdullahi, Poom Kumam (2022), “On Answer to Kirk-Shahzad’s Question for Strong b -TVS cone metric spaces”, *Science & Technology Asia*, Vol. 27, No. 1, 20-30. (Scopus)
- [A4] Ha Tran Phuong, Bui The Hung and Doan Trong Hieu (2023), “Fixed point theorems of Kannan type contractive mappings in strong b -metric spaces”, submitted to *Miskolc Mathematical Notes*. (SCIE)
- [A5] Bui The Hung and Doan Trong Hieu (2023), “Picard operators in strong b -TVS cone metric spaces”, submitted to *East-West Journal of Mathematics*.