

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐOÀN TRỌNG HIẾU

VỀ SỰ TỒN TẠI TOÁN TỬ PICARD TRONG MỘT SỐ LỚP
KHÔNG GIAN METRIC SUY RỘNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2023

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐOÀN TRỌNG HIẾU

VỀ SỰ TỒN TẠI TOÁN TỬ PICARD TRONG MỘT SỐ LỚP
KHÔNG GIAN METRIC SUY RỘNG

Ngành: Toán giải tích

Mã số: 9 46 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: 1. PGS. TS. Hà Trần Phương
2. TS. Bùi Thế Hùng

Thái Nguyên - 2023

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Hà Trần Phương và TS. Bùi Thế Hùng. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học nào khác.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 08 năm 2023

Tác giả

Đoàn Trọng Hiếu

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS Hà Trần Phương và TS. Bùi Thế Hùng. Tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến hai thầy.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán, Phòng Đào tạo, Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo, bạn bè trong các seminar tại Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã luôn trao đổi, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Khoa Khoa học cơ bản, Ban Giám hiệu Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tác giả về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành luận án này.

Tác giả
Đoàn Trọng Hiếu

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Mục lục	iii
Một số ký hiệu và viết tắt	v
Mở đầu	1
Chương 1. Toán tử Picard yếu trong không gian metric đầy đủ	16
1.1. Toán tử Picard yếu đơn trị	16
1.2. Toán tử Picard yếu đa trị	23
1.3. Kết luận chương 1	30
Chương 2. Toán tử Picard và Picard yếu trong không gian b-metric mạnh	31
2.1. Toán tử Picard đơn trị	31
2.1.1. Toán tử Picard cho một số lớp ánh xạ kiểu Kannan đối với hàm điều khiển	32
2.1.2. Toán tử Picard cho ánh xạ Kannan-Suzuki	37
2.1.3. Toán tử Picard cho ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki	45
2.2. Toán tử Picard yếu cho ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị	52

2.3. Kết luận chương 2	57
Chương 3. Toán tử Picard và bổ sung đủ đối với không gian b-TVS metric nón mạnh	58
3.1. Tính chất lân cận của nón.....	58
3.2. Không gian b -TVS metric nón mạnh	62
3.3. Toán tử Picard trong không gian b -TVS metric nón mạnh ..	67
3.4. Bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh.....	72
3.5. Kết luận chương 3	80
Kết luận chung.....	81
Danh mục các công trình đã công bố	82
Tài liệu tham khảo	83

Một số ký hiệu và viết tắt

$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm
(X, ρ)	không gian metric
$\{a_n\}$	dãy các phần tử của X
$\{T^n a\}$	dãy lặp của ánh xạ T tại a
$CB(X)$	tập tất cả các tập con khác rỗng, đóng và bị chặn của X
$H(A, B)$	khoảng cách Hausdorff
$A := B$	A được định nghĩa bằng B
$d(a, A)$	khoảng cách từ điểm a đến tập A
(X, D, K)	không gian b -metric mạnh
(X, E, C, K, ρ)	không gian b -TVS metric nón mạnh
TVS	không gian vectơ tôpô
E	không gian vectơ tôpô lỗi địa phương Hausdorff thực
θ	vectơ gốc trong không gian E
C	nón trong không gian E

$\text{int } C$	phần trong của nón C
$\preceq$	quan hệ thứ tự bộ phận trên E
$T : A \rightarrow 2^B$	ánh xạ đa trị T
$A \subset B$	A là tập con của B
$\cap$	phép giao
$A \times B$	tích Descartes của hai tập hợp A và B
$\bar{A}$	bao đóng của A
$C_{[0,1]}$	không gian các hàm liên tục trên $[0,1]$
$C_{[0,1]}^1$	không gian các hàm khả vi liên tục cấp một trên $[0,1]$
I_E	ánh xạ đồng nhất trên E
$\ f\ _\infty := \sup_{t \in [0,1]} f(t) $	chuẩn supremum của hàm f trên $C_{[0,1]}$
$\square$	kết thúc chứng minh

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Năm 1922, S. Banach đã chứng minh một định lý nổi tiếng mà ngày nay ta thường gọi là "Nguyên lý ánh xạ co Banach".

Định lý 1. [3] Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là ánh xạ. Giả sử tồn tại $r \in [0, 1)$ sao cho

$$\rho(Ta, Tb) \leq r\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X. \quad (0.1)$$

Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$ và với mỗi $a \in X$, dãy lặp $\{T^n a\}$ hội tụ đến $\bar{a}$.

Công trình này của S. Banach được đánh giá hết sức quan trọng, nó mở ra hướng nghiên cứu mới trong việc phát triển lý thuyết điểm bất động, đó là lý thuyết điểm bất động metric. Trong những thập kỷ gần đây, lý thuyết điểm bất động metric được đánh giá là một trong những thành tựu của toán học. Lý thuyết điểm bất động đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước thu được nhiều kết quả quan trọng và có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học như nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân, hệ phương trình tuyến tính, phương trình tích phân,....

Nguyên lý ánh xạ co Banach cho chúng ta một điều kiện đủ để một ánh xạ từ không gian metric đầy đủ X vào chính nó có điểm bất động duy nhất. Có rất nhiều tác giả đã tìm cách phát triển Nguyên lý ánh xạ

co Banach với các điều kiện co khác nhau và trong các lớp không gian khác nhau. Chẳng hạn M. Edelstein [11] năm 1962, E. Rakotch [35, 36] năm 1962, A. Meir và E. Keeler [28] năm 1969, Lj. B. Ćirić [6] năm 1974, A. C. M. Ran và cộng sự [34] năm 2004, M. Berinde và V. Berinde [5] năm 2007, G. L. Huang và X. Zhang [21] năm 2007, T. Suzuki [56] năm 2007, Sh. Rezapour và R. Hambarani [41] năm 2008, T. Suzuki [57] năm 2009, W. S. Du [9] năm 2010, D. Wardowski [60] năm 2012, R. Pant [33] năm 2016, S.-i. Ri [40] năm 2016 và nhiều tác giả khác. Khi nghiên cứu về điểm bất động của ánh xạ, năm 1983, I. A. Rus [42] đã giới thiệu khái niệm toán tử Picard và toán tử Picard yếu trong không gian metric (có thể xem thêm trong [43], [44], [45], [46]). Khái quát khái niệm đó cho lớp các không gian tôpô ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 1. Cho X là một không gian tôpô. Một ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được gọi là *toán tử Picard yếu* nếu T có điểm bất động và với mỗi $a \in X$, dãy $\{T^n a\}$ hội tụ đến điểm bất động của T . Nếu T là toán tử Picard yếu và có duy nhất điểm bất động thì T được gọi là *toán tử Picard*.

Từ định nghĩa trên ta thấy, toán tử Picard và toán tử Picard yếu liên quan chặt chẽ đến điểm bất động của ánh xạ, chẳng hạn ánh xạ co Banach là một toán tử Picard trên không gian metric đầy đủ. Trong các công trình [42], [43], [44], [45], [48] của I. A. Rus, [5] của M. Berinde và V. Berinde và một số công trình khác, các tác giả đã nghiên cứu một số tính chất của toán tử Picard và toán tử Picard yếu liên quan đến tập các điểm bất động của ánh xạ đơn và đa trị. Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu về sự tồn tại của các toán tử Picard gắn với điều kiện co. Các kết quả nghiên cứu theo hướng này trong thời gian gần đây được chia thành ba vấn đề chủ yếu:

1. Xây dựng các điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard hay toán tử Picard yếu trên lớp các không gian metric liên quan đến các điều kiện co.

2. Xây dựng một số không gian có cấu trúc được mở rộng từ lớp không gian metric (ta thường gọi là không gian metric suy rộng) và xây dựng các điều kiện đủ liên quan đến điều kiện co, để một ánh xạ là toán tử Picard hay toán tử Picard yếu trên các lớp không gian này.

3. Nghiên cứu các ứng dụng khác nhau của các lớp toán tử Picard và toán tử Picard yếu.

Theo hướng nghiên cứu thứ nhất, các tác giả tập trung vào cải tiến điều kiện co Banach và xây dựng các điều kiện co mới để một ánh xạ là toán tử Picard hay toán tử Picard yếu. Năm 1962, M. Edelstein [11] đã thiết lập điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard cho không gian metric compact: *Với (X, ρ) là không gian metric compact thì một ánh xạ $T : X \rightarrow X$ thỏa mãn $\rho(Ta, Tb) < \rho(a, b)$ với mọi $a, b \in X, a \neq b$, là toán tử Picard.* Ở đây, điều kiện co của M. Edelstein nhẹ hơn điều kiện co của S. Banach, tuy nhiên điều kiện về không gian lại nặng hơn. Tiếp theo công trình của M. Edelstein, đã có nhiều tác giả phát triển Nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian metric bằng cách thay thế hằng số r trong điều kiện (0.1) bởi hằng số, tham số hay hàm số khác hoặc giới hạn điều kiện (0.1) chỉ cần đúng với một số phần tử $a, b \in X$. Chẳng hạn như A. Meir và E. Keeler [28] thiết lập điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trong không gian đầy đủ (X, ρ) dưới điều kiện: *Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\varepsilon \leq \rho(a, b) < \varepsilon + \delta$ kéo theo $\rho(Ta, Tb) < \varepsilon$ với mọi $a, b \in X$;* năm 2016, S.-i. Ri [40] thay thế hằng số co bởi hàm tham số và thu được: *Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là ánh xạ. Giả sử tồn tại hàm $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ thỏa mãn $\varphi(t) < t, \limsup_{s \rightarrow t^+} \varphi(s) < t$ với mọi $t > 0$ và $\rho(Ta, Tb) \leq \varphi(\rho(a, b))$ với mọi $a, b \in X$. Khi đó, T là toán tử Picard.* Một số kết quả khác xem trong [18, 54, 60].... Năm 2007, bằng cách sử dụng hàm tham số không tăng, T. Suzuki đã thu được kết quả sau.

Định lý 2. [56] Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Hàm không tăng $\varphi : [0, 1) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1]$ được định nghĩa bởi

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \\ (1-r)r^{-2} & \text{nếu } \frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq r \leq 2^{-\frac{1}{2}}, \\ (1+r)r^{-1} & \text{nếu } 2^{-\frac{1}{2}} \leq r < 1. \end{cases}$$

Giả sử tồn tại $r \in [0, 1)$ sao cho

$$\varphi(r)\rho(a, Tb) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } \rho(Ta, Tb) \leq r\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$. Khi đó, T là toán tử Picard.

Việc xây dựng các điều kiện co mới, khác với điều kiện co Banach cũng thu hút được nhiều tác giả. Chẳng hạn J. Górnicki [16, 17], G. E. Hardy và T. D. Rogers [19], S. Reich [37, 38, 39].... Trong luận án này chúng tôi quan tâm đến lớp ánh xạ co Kannan. Cụ thể, năm 1968, R. Kannan đã chứng minh.

Định lý 3. [22] Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử tồn tại $r \in [0, \frac{1}{2})$ sao cho

$$\rho(Ta, Tb) \leq r(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)) \text{ với mọi } a, b \in X. \quad (0.2)$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Ánh xạ thỏa mãn giả thiết của Định lý 3 được gọi là ánh xạ Kannan. Ví dụ 2 trong [23], R. Kannan đã chỉ ra một trường hợp cụ thể của ánh xạ Kannan không liên tục, đây là một tính chất khác với các ánh xạ co Banach. Một ứng dụng quan trọng khác của ánh xạ Kannan là có thể mô tả tính đầy đủ của không gian metric theo tính chất điểm bất động của ánh xạ. Điều này được P. V. Subramanyam [55] chứng minh năm 1975, cụ thể là: “Không gian metric (X, ρ) là đầy đủ nếu và chỉ nếu mọi ánh xạ Kannan đều có điểm bất động duy nhất”. Chú ý rằng lớp ánh xạ co của Banach không có tính chất này (xem [7]). Vì thế, lớp ánh xạ trong

Định lý 3 ngay lập tức đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học, chẳng hạn L. S. Dube và S. P. Singh [10], J. Górnicki [16, 17], G. Hiranmoy và cộng sự [20] và nhiều tác giả khác.

Kí hiệu

$$\mathcal{S} = \{f : (0, \infty) \rightarrow [0, \frac{1}{2}) : f(t_n) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ kéo theo } t_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty\},$$

$$\mathcal{H} = \{\varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \frac{1}{3}) : \varphi(t_n) \rightarrow \frac{1}{3} \text{ kéo theo } t_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty\}.$$

Bằng việc sử dụng hàm điều khiển trên, năm 2018, J. Górnicki đã thu được các kết quả sau:

Định lý 4. [17] *Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại hàm $f \in \mathcal{S}$ sao cho với mỗi $a, b \in X, a \neq b$, ta luôn có*

$$\rho(Ta, Tb) \leq f(\rho(a, b))(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Định lý 5. [17] *Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{H}$ sao cho với mỗi $a, b \in X, a \neq b$, ta luôn có*

$$\rho(Ta, Tb) \leq \varphi(\rho(a, b))(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + \rho(a, b)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Có thể thấy kết quả trên của J. Górnicki là sự mở rộng và phát triển Định lý 3 của R. Kannan. Năm 2014, với ý tưởng kết hợp giữa điều kiện co Banach và Kannan, K. Farshid và các cộng sự [12] đã thiết lập điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu.

Định lý 6. [12] *Cho (X, ρ) là một không gian metric đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$ thỏa mãn điều kiện*

$$\rho(Ta, Tb) \leq M(a, b)\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X,$$

trong đó $M(a, b) = \frac{\rho(a, Tb) + \rho(b, Ta)}{\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + 1}$. Khi đó

(1) T là toán tử Picard yếu;

(2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{1}{2}.$$

Năm 2017, Y. U. Gaba [14] đã thiết lập kết quả tương tự của K. Farshid và các cộng sự trong không gian G -metric. Cùng với việc nghiên cứu ánh xạ Kannan đơn trị, trong thời gian gần đây có một số tác giả nghiên cứu ánh xạ Kannan đa trị. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh, kí hiệu $CB(X)$ là tập hợp tất cả các tập con khác rỗng, đóng và bị chặn của X . Hàm H xác định bởi

$$H(A, B) := \max\{\sup_{a \in B} d(a, A), \sup_{a \in A} d(a, B)\},$$

trong đó $A, B \in CB(X)$ và $d(a, A) := \inf_{b \in A} \rho(a, b)$, được gọi là *metric Hausdorff* trên $CB(X)$ cảm sinh bởi b -metric mạnh D . Tương tự như trường hợp ánh xạ đơn trị, năm 1991, I. A. Rus [47] đã giới thiệu toán tử Picard yếu đa trị (có thể xem thêm trong [50]). Khái quát khái niệm đó cho lớp không gian b -metric mạnh ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow CB(X)$ được gọi là *toán tử Picard yếu đa trị* nếu T có điểm bất động (tức là tồn tại phần tử $\bar{a} \in X$ sao cho $\bar{a} \in T\bar{a}$) và với mỗi $a \in X$, với mỗi $b \in Ta$, tồn tại dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn:

- (i) $a_0 = a, a_1 = b$;
- (ii) $a_{n+1} \in Ta_n$ với mọi $n = 0, 1, \dots$;
- (iii) dãy $\{a_n\}$ hội tụ đến điểm bất động của X .

Nếu T là toán tử Picard yếu đa trị và có duy nhất một điểm bất động thì T được gọi là *toán tử Picard đa trị*.

Năm 1970, L. S. Dube và S. P. Singh [10] đã chứng minh một dạng của Định lý 3 cho trường hợp ánh xạ đa trị:

Định lý 7. [10] *Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ đa trị liên tục $T : X \rightarrow CB(X)$. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ sao cho*

$$H(Ta, Tb) \leq s(d(a, Ta) + d(b, Tb)) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard yếu đa trị.

Ngoài công trình của L. S. Dube và S. P. Singh còn có một số công trình của các tác giả khác về sự tồn tại của toán tử Picard yếu đa trị. Chẳng hạn M. Berinde và V. Berinde [5], A. Felhi [13], I. A. Rus và cộng sự [49] và một số công trình khác.

Theo hướng nghiên cứu thứ hai, các tác giả tập trung vào việc xây dựng và nghiên cứu tính chất của một số không gian có cấu trúc tương tự hoặc mở rộng từ không gian metric và thiết lập các điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard hay toán tử Picard yếu trên các không gian này. Một số ví dụ tiêu biểu về các không gian đã xây dựng là không gian b -metric [8], không gian G -metric [14], không gian 2-metric [15], không gian b -metric mạnh [24], không gian metric riêng [26, 27] và một số không gian khác. Đặc biệt, năm 2007, L. G. Huang và X. Zhang [21] giới thiệu không gian metric nón bằng cách thay tập số thực $\mathbb{R}$ trong định nghĩa metric thông thường bằng một nón định hướng trong không gian Banach. Các tác giả đã thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard dưới giả thiết nón chuẩn tắc, các kết quả này là mở rộng thực sự của Định lý 1 và Định lý 3. Năm 2008, Sh. Rezapour và R. Hambarani [41] đã chứng minh lại kết quả của L. G. Huang và X. Zhang mà không cần tính chuẩn tắc của nón. Năm 2014, khi nghiên cứu về định lý điểm bất động trong không gian b -metric mạnh, W. Kirk và N. Shahzad [24] đặt ra câu hỏi: “Liệu mọi không gian b -metric mạnh X có trù mật trong một không

gian b -metric mạnh đầy đủ X' hay không?” Trong ([24], trang 128) các tác giả nhận xét rằng, nếu câu trả lời là có thì mọi ánh xạ co $T : X \rightarrow X$ có thể mở rộng thành ánh xạ co $T' : X' \rightarrow X'$ mà T' có duy nhất điểm bất động trong không gian b -metric mạnh đầy đủ. Câu hỏi trên được trả lời bởi T. V. An và N. V. Dung [2] năm 2016.

Định lý 8. [2] *Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Khi đó*

- (i) *(X, D, K) có bổ sung đủ;*
- (ii) *Bổ sung đủ của (X, D, K) là duy nhất theo nghĩa nếu (X_1^*, D_1^*, K_1) và (X_2^*, D_2^*, K_2) là hai bổ sung đủ của (X, D, K) thì tồn tại một song ánh đẳng cự $\phi : X_1^* \rightarrow X_2^*$ đồng nhất trên X .*

Theo hướng nghiên cứu ứng dụng của toán tử Picard và toán tử Picard yếu. Các tác giả đã tìm được những ứng dụng sâu sắc của các định lý điểm bất động cho các ánh xạ co suy rộng trên các không gian có cấu trúc kiểu không gian metric vào những lĩnh vực khác nhau của Toán học. Một số công trình có thể kể đến như của E. Berstovanská [4], V. Muresan [29, 30], I. M. Oluru [31, 32], I. A. Rus [51, 52, 53], J. Wang và cộng sự [58, 59].... Từ đó cho thấy, việc tiếp tục phát triển và nghiên cứu các không gian metric suy rộng, cùng với các tính chất về tôpô cho các không gian này là rất cần thiết.

Sự lựa chọn đề tài luận án: “**Về sự tồn tại toán tử Picard trong một số lớp không gian metric suy rộng**” của chúng tôi nhằm làm phong phú các kết quả nghiên cứu về tính chất của các không gian metric, metric suy rộng và các điều kiện đủ cho ánh xạ là toán tử Picard và toán tử Picard yếu trên các lớp không gian này.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

- Mục đích nghiên cứu

Mục đích thứ nhất: Thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu trên không gian metric đầy đủ.

Mục đích thứ hai: Thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard và toán tử Picard yếu trên không gian b -metric mạnh.

Mục đích thứ ba: Xây dựng không gian b -TVS metric nón mạnh và nghiên cứu một số tính chất của không gian này, đặc biệt là thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard và chứng minh nguyên lý bổ sung đủ trong không gian này.

• Đối tượng nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi tập trung nghiên cứu:

1. Không gian metric, không gian b -metric mạnh, không gian b -TVS metric nón mạnh.
2. Toán tử Picard và toán tử Picard yếu.

3. Tổng quan về luận án

Với các mục đích trên, trong luận án này chúng tôi đã thu được một số kết quả chính như sau:

(1) *Đối với mục đích thứ nhất:* Dựa trên ý tưởng của Định lý 2 và Định lý 6, chúng tôi thiết lập được một số kết quả mới về điều kiện đủ để một ánh xạ trong không gian metric đầy đủ là toán tử Picard yếu như sau:

Định lý 1.1.1. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho

$$\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } \rho(Ta, Tb) \leq M(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó

$$M(a, b, \alpha) = \frac{\rho(a, Tb) + \rho(b, Ta) + \rho(a, b)}{2\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + \alpha}.$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}.$$

Định lý 1.1.1 của chúng tôi là một dạng định lý điểm bất động của ánh xạ phát triển từ điều kiện co Banach kết hợp với co Kannan. Ví dụ 1.1.2 trong luận án cho thấy, lớp ánh xạ co trong Định lý 1.1.1 và lớp ánh xạ trong Định lý 6 là không trùng nhau. Bằng việc sử dụng khoảng cách Hausdorff, chúng tôi chứng minh một dạng Định lý 1.1.1 cho trường hợp ánh xạ đa trị.

Định lý 1.2.4. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow CB(X)$. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ sao cho

$$\frac{1}{2}d(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } H(Ta, Tb) \leq P(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó

$$P(a, b, \alpha) = \frac{d(a, Tb) + d(b, Ta) + \rho(a, b)}{2\delta(a, Ta) + \delta(b, Tb) + \alpha}, \quad \delta(a, A) := \sup_{b \in A} \rho(a, b).$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu đa trị;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động của T thì

$$\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b}).$$

(2) Đối với mục đích thứ hai: Bằng việc sử dụng các hàm điều khiển, năm 2021, chúng tôi chứng minh một dạng kết quả của J. Górnicki [17] cho không gian b -metric mạnh.

Định lý 2.1.4. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử rằng tồn tại hàm $f \in \mathcal{S}$ sao cho với

mỗi $a, b \in X, a \neq b$, ta luôn có

$$D(Ta, Tb) \leq f(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Định lý 2.1.6. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử rằng tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{H}$ sao cho với mỗi $a, b \in X, a \neq b$, ta luôn có

$$D(Ta, Tb) \leq \varphi(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb) + D(a, b)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Dễ thấy, khi $K = 1$ thì Định lý 2.1.4 nhận lại Định lý 4 và Định lý 2.1.6 trở về Định lý 5. Hơn nữa, Ví dụ 2.1.5 và Ví dụ 2.1.7 cho thấy lớp ánh xạ thỏa mãn các định lý của chúng tôi là mở rộng thực sự lớp ánh xạ trong các Định lý 4 và Định lý 5.

Tiếp theo, từ điều kiện co của Định lý 2 và Định lý 3 đã gợi ý cho chúng tôi đề xuất khái niệm *Ánh xạ Kannan-Suzuki* trong Định nghĩa 3 và thiết lập điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard.

Định nghĩa 3. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Ta nói rằng $T : X \rightarrow X$ là *ánh xạ Kannan-Suzuki* nếu tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn

$$D(Ta, Tb) \leq s(D(a, Ta) + D(b, Tb)),$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}D(a, Ta) \leq D(a, b)$.

Định lý 2.1.8. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và T là ánh xạ Kannan-Suzuki. Khi đó, T là toán tử Picard.

Từ Định lý 2.1.8 ta có hệ quả sau là điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trên lớp không gian metric đầy đủ.

Hệ quả 2.1.9. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) \leq s(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)), \quad (0.3)$$

với $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b)$. Khi đó, T là toán tử Picard.

Có thể thấy rằng, trong Định lý 3, giả thiết cần điều kiện (0.3) thỏa mãn với mọi $a, b \in X$, trong Hệ quả 2.1.9 của chúng tôi, điều kiện (0.3) chỉ cần thỏa mãn với $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b)$. Tức là mọi ánh xạ thỏa mãn Định lý 3 đều thỏa mãn Hệ quả 2.1.9.

Định nghĩa 4. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Ta nói rằng $T : X \rightarrow X$ là ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki nếu

$$D(Ta, Tb) < \frac{1}{2}(D(a, Ta) + D(b, Tb)),$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}D(a, Ta) < D(a, b)$.

Kết hợp kiểu co của T. Suzuki [57] và của J. Górnicki [16] chúng tôi thu được kết quả sau về sự tồn tại của toán tử Picard trong không gian b -metric mạnh compact.

Định lý 2.1.13. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh compact và T là ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Hơn thế, nếu T liên tục thì T là toán tử Picard.

Ví dụ 2.1.16 chỉ ra rằng để T là toán tử Picard trong Định lý 2.1.13 thì tính liên tục của ánh xạ T không thể bỏ được. Ngoài ra, dễ thấy rằng lớp ánh xạ thỏa mãn định lý của J. Górnicki thì cũng thỏa mãn điều kiện ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki. Kết hợp với Ví dụ 2.1.14 cho thấy Định lý 2.1.13 là mở rộng thực sự kết quả của Górnicki [16].

Định nghĩa 5. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh và $k \in (0, \frac{1}{2})$. Ánh xạ $T : X \rightarrow CB(X)$ được gọi là ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị nếu tồn tại $s \in (0, k)$ thỏa mãn

$$H(Ta, Tb) \leq s(d(a, Ta) + d(b, Tb)), \quad (0.4)$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}d(a, Ta) \leq D(a, b)$.

Năm 2021, chúng tôi mở rộng Định lý 7 của L. S. Dube và S. P. Singh

trong không gian b -metric mạnh đầy đủ dưới điều kiện của ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị.

Định lý 2.2.2. *Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và T là ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị. Khi đó, T là toán tử Picard yếu đa trị.*

Có thể thấy rằng, trong Định lý 7, giả thiết cần điều kiện (0.4) thỏa mãn với mọi $a, b \in X$, trong Định lý 2.2.2 của chúng tôi, điều kiện (0.4) chỉ cần thỏa mãn với $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}d(a, Ta) \leq D(a, b)$. Tức là mọi ánh xạ thỏa mãn Định lý 7 đều thỏa mãn Định lý 2.2.2. Kết hợp với Ví dụ 2.2.3 cho thấy Định lý 2.2.2 là mở rộng thực sự kết quả của L. S. Dube và S. P. Singh [10].

(3) *Đối với mục đích thứ ba:* Chúng tôi giới thiệu khái niệm không gian b -TVS metric nón mạnh và nghiên cứu một số tính chất đối với không gian này. Hơn nữa, chúng tôi mở rộng kết quả của Sh. Rezapour và R. Hamlbarani [41] cho không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ với thứ tự sinh bởi nón ($\preceq$) và chứng minh định lý bổ sung đủ cho lớp không gian này. Các kết quả cụ thể như sau:

Định lý 3.3.1. *Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại $s \in [0, 1)$ thỏa mãn*

$$\rho(Ta, Tb) \preceq s\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Định lý 3.3.3. *Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn*

$$\rho(Ta, Tb) \preceq s(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Chú ý rằng, Định lý 3.3.1 là mở rộng của Định lý 2.3 trong [41] và Định lý 3.3.3 là mở rộng của Định lý 2.6 trong [41]. Hơn nữa, Ví dụ 3.3.2 và Ví dụ 3.3.4 cho thấy các mở rộng đó là mở rộng thực sự.

Sử dụng tính chất lân cận của nón trong không gian vectơ tôpô lỗi địa phương Hausdorff thực, chúng tôi thiết lập Nguyên lý bổ sung đủ cho không gian b -TVS metric nón mạnh.

Định lý 3.4.7. *Cho (X, E, C, K, ρ) là một không gian b -TVS metric nón mạnh và nón C thỏa tính chất lân cận trong không gian vectơ tôpô lỗi địa phương Hausdorff thực E đầy đủ. Khi đó*

- (i) (X, E, C, K, ρ) có bổ sung đủ;
- (ii) *Bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) là duy nhất theo nghĩa là nếu $(X_1^*, E, C, K_1, \rho_1^*)$ và $(X_2^*, E, C, K_2, \rho_2^*)$ là hai bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) thì tồn tại một song ánh đẳng cự $\phi : X_1^* \rightarrow X_2^*$ đồng nhất trên X .*

Kết quả trên của chúng tôi trả lời cho câu hỏi của W. Kirk và N. Shahzad [24] cho trường hợp trong không gian b -TVS metric nón mạnh. Ngoài ra, Ví dụ 3.4.8 cho thấy Định lý 3.4.7 là mở rộng thực sự của Định lý 8.

Các kết quả chính của luận án chúng tôi đã công bố trong các bài báo [A1], [A2], [A3], [A4] và [A5] trong danh mục các công trình liên qua đến luận án.

4. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản: Trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu theo hướng nghiên cứu, chúng tôi phát hiện các vấn đề mở có tính thời sự cần phải giải quyết và sử dụng các kiến thức, kỹ thuật của Giải tích hàm, lý thuyết điểm bất động và lý thuyết phương trình vi phân để giải quyết các vấn đề đặt ra.

5. Cấu trúc luận án

Luận án gồm phần mở đầu, ba chương nội dung, kết luận luận án và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 có tên là *Toán tử Picard yếu trong không gian metric đầy đủ*. Trong chương này chúng tôi thiết lập điều kiện đủ để một ánh xạ là toán tử Picard yếu trong không gian metric đầy đủ. Cụ thể, thiết lập hai định lý đối với toán tử Picard yếu đơn trị và thiết lập hai định lý đối với toán tử Picard yếu đa trị. Ngoài ra còn có các hệ quả tương ứng.

Chương 2 có tên là *Toán tử Picard và Picard yếu trong không gian b -metric mạnh*. Nhằm thiết lập một số kết quả về toán tử Picard cho một số lớp ánh xạ kiểu Kannan đối với hàm điều khiển, ánh xạ Kannan-Suzuki, ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki và toán tử Picard yếu cho ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị trong không gian b -metric mạnh.

Chương 3 với tên *Toán tử Picard và bổ sung đủ đối với không gian b -TVS metric nón mạnh*. Mục đích của chúng tôi trong chương này là đề xuất khái niệm không gian b -TVS metric nón mạnh và một số tính chất trong không gian này. Hơn nữa, chúng tôi thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard và Nguyên lý bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh.

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.
- Hội thảo Tối ưu và tính toán khoa học lần thứ 19, Ba Vì, 22-24/04/2021.

Tác giả

Chương 1

Toán tử Picard yếu trong không gian metric đầy đủ

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu đơn trị và toán tử Picard yếu đa trị trong không gian metric đầy đủ. Các kết quả chính của chương này được chúng tôi công bố trong bài báo [A2] thuộc danh mục các công trình liên quan đến luận án.

1.1. Toán tử Picard yếu đơn trị

Trong mục này, chúng tôi thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu đơn trị trong không gian metric đầy đủ. Ngoài ra, một số ví dụ số để minh họa cho kết quả lý thuyết cũng được thiết lập.

Định lý 1.1.1. *Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho*

$$\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } \rho(Ta, Tb) \leq M(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó

$$M(a, b, \alpha) = \frac{\rho(a, Tb) + \rho(b, Ta) + \rho(a, b)}{2\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + \alpha}.$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}.$$

Chứng minh. (1) Lấy $a_0 \in X$ tùy ý, ta xây dựng dãy $\{a_n\}$ bởi công thức $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Đặt $\rho_n = \rho(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$. Từ

$$\frac{1}{2}\rho(a_n, Ta_n) = \frac{1}{2}\rho(a_n, a_{n+1}) \leq \rho(a_n, a_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

nên theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho(Ta_n, Ta_{n+1}) \\ &\leq M(a_n, a_{n+1}, \alpha)\rho(a_n, a_{n+1}) \\ &= \left(\frac{\rho(a_n, Ta_{n+1}) + \rho(a_{n+1}, Ta_n) + \rho(a_n, a_{n+1})}{2\rho(a_n, Ta_n) + \rho(a_{n+1}, Ta_{n+1}) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_n, a_{n+1}) \\ &= \left(\frac{\rho(a_n, a_{n+2}) + \rho(a_n, a_{n+1})}{2\rho(a_n, a_{n+1}) + \rho(a_{n+1}, a_{n+2}) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_n, a_{n+1}) \\ &\leq \left(\frac{2\rho(a_n, a_{n+1}) + \rho(a_{n+1}, a_{n+2})}{2\rho(a_n, a_{n+1}) + \rho(a_{n+1}, a_{n+2}) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_n, a_{n+1}) \\ &= \left(\frac{2\rho_n + \rho_{n+1}}{2\rho_n + \rho_{n+1} + \alpha} \right) \cdot \rho_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Ta đặt

$$c_n = \frac{2\rho_n + \rho_{n+1}}{2\rho_n + \rho_{n+1} + \alpha}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Khi đó $0 \leq c_n < 1$ và $\rho_{n+1} \leq c_n \rho_n$ với mọi $n \geq 0$. Điều đó chứng tỏ

$$\rho_n \leq c_{n-1} \dots c_1 c_0 \rho_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Do hàm số $f(t) = \frac{t}{t+\alpha}$ là tăng trên $[0, +\infty)$ nên $c_n \leq c_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

Vì vậy

$$\rho_n \leq c_0^n \rho_0 \text{ với } n \geq 1.$$

Bởi $c_0 \in [0, 1)$ nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_0^n \rho_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0.$$

Mặt khác, với mọi $m > n$, ta có

$$\begin{aligned}
\rho(a_n, a_m) &\leq \rho(a_n, a_{n+1}) + \rho(a_{n+1}, a_{n+2}) + \dots + \rho(a_{m-1}, a_m) \\
&= \rho_n + \rho_{n+1} + \dots + \rho_{m-1} \\
&\leq c_{n-1} \dots c_0 \rho_0 + c_n \dots c_0 \rho_0 + \dots + c_{m-2} \dots c_0 \rho_0 \\
&= (1 + c_n + \dots + c_{m-2} \dots c_n) c_{n-1} \dots c_0 \rho_0 \\
&\leq (1 + c_0 + \dots + c_0^{m-n-1}) c_{n-1} \dots c_0 \rho_0 \\
&\leq (1 + c_0 + c_0^2 + \dots) c_{n-1} \dots c_0 \rho_0 \\
&= \frac{1}{1 - c_0} c_{n-1} \dots c_0 \rho_0 \\
&\leq \frac{1}{1 - c_0} c_0^n \rho_0.
\end{aligned}$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - c_0} c_0^n \rho_0 = 0$ nên

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = 0.$$

Điều đó chứng tỏ $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Do tính đầy đủ của X nên $\{a_n\}$ hội tụ về một điểm $\bar{a} \in X$. Tiếp theo, ta chỉ ra rằng với mỗi $n \geq 0$, hoặc là

$$\frac{1}{2} \rho(a_n, Ta_n) \leq \rho(a_n, \bar{a}) \text{ hoặc } \frac{1}{2} \rho(Ta_n, Ta_{n+1}) \leq \rho(Ta_n, \bar{a}). \quad (1.1.1)$$

Bằng phản chứng, ta giả sử rằng tồn tại $n \geq 0$ sao cho

$$\rho(a_n, \bar{a}) < \frac{1}{2} \rho(a_n, Ta_n) \text{ và } \rho(Ta_n, \bar{a}) < \frac{1}{2} \rho(Ta_n, Ta_{n+1}).$$

Theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned}
\rho_n = \rho(a_n, Ta_n) &\leq \rho(a_n, \bar{a}) + \rho(Ta_n, \bar{a}) \\
&< \frac{1}{2} \rho(a_n, Ta_n) + \frac{1}{2} \rho(Ta_n, Ta_{n+1}) \\
&= \frac{1}{2} \rho_n + \frac{1}{2} \rho_{n+1} \leq \rho_n.
\end{aligned}$$

Điều này không xảy ra. Do đó, từ (1.1.1) suy ra với mỗi $n \geq 0$, hoặc là

$$\rho(a_{n+1}, T\bar{a}) \leq M(a_n, \bar{a}, \alpha) \rho(a_n, \bar{a}), \quad (1.1.2)$$

hoặc

$$\rho(a_{n+2}, T\bar{a}) \leq M(a_{n+1}, \bar{a}, \alpha)\rho(a_{n+1}, \bar{a}). \quad (1.1.3)$$

Khi đó, hoặc là (1.1.2) đúng với vô hạn số tự nhiên n hoặc (1.1.3) đúng với vô hạn số tự nhiên n . Giả sử (1.1.2) đúng với vô hạn số tự nhiên n , ta có thể chọn trong tập vô hạn đó dãy $\{n_k\}$ đơn điệu tăng ngặt. Từ đó suy ra dãy $\{a_{n_k}\}$ là dãy con của dãy $\{a_n\}$ và

$$\rho(a_{n_k+1}, T\bar{a}) \leq \left(\frac{\rho(a_{n_k}, T\bar{a}) + \rho(a_{n_k+1}, \bar{a}) + \rho(a_{n_k}, \bar{a})}{2\rho(a_{n_k}, a_{n_k+1}) + \rho(\bar{a}, T\bar{a}) + \alpha} \right) \rho(a_{n_k}, \bar{a}) \text{ với mọi } k.$$

Cho $k \rightarrow \infty$ ta thu được $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = T\bar{a}$. Mặt khác, do $\{a_{n_k+1}\}$ hội tụ đến $\bar{a}$ nên $T\bar{a} = \bar{a}$. Vậy $\bar{a}$ là điểm bất động của ánh xạ T . Nếu (1.1.3) đúng với vô hạn số tự nhiên n , chứng minh một cách hoàn toàn tương tự như trên ta suy ra $\bar{a}$ là điểm bất động của ánh xạ T . Vậy T là toán tử Picard yếu.

(2) Giả sử $\bar{a}, \bar{b}$ là hai điểm bất động của T và $\bar{a} \neq \bar{b}$. Vì

$$0 = \frac{1}{2}\rho(\bar{a}, T\bar{a}) < \rho(\bar{a}, \bar{b})$$

nên theo giả thiết, ta có

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \rho(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq M(\bar{a}, \bar{b}, \alpha)\rho(\bar{a}, \bar{b}).$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \rho(\bar{a}, \bar{b}) &\leq \left(\frac{\rho(\bar{a}, T\bar{b}) + \rho(\bar{b}, T\bar{a}) + \rho(\bar{a}, \bar{b})}{2\rho(\bar{a}, T\bar{a}) + \rho(\bar{b}, T\bar{b}) + \alpha} \right) \cdot \rho(\bar{a}, \bar{b}) \\ &= \frac{3\rho^2(\bar{a}, \bar{b})}{\alpha}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Ví dụ 1.1.2. Cho X là tập hợp có ít nhất 2 phần tử. Hàm $\rho(a, b)$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a = b, \\ \frac{1}{3} & \text{nếu } a \neq b. \end{cases}$$

Khi đó (X, ρ) là không gian metric đầy đủ.

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được xác định bởi $Ta = a$ với mọi $a \in X$.

Với $a, b \in X, a \neq b$, ta có

$$\rho(Ta, Tb) = \frac{1}{3} > \frac{2}{9} = M(a, b)\rho(a, b).$$

Do đó Định lý 6 không áp dụng được.

Mặt khác, với mọi $a, b \in X, a \neq b$, ta có

$$0 = \frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b) = \frac{1}{3}$$

kéo theo

$$\frac{1}{3} = \rho(Ta, Tb) \leq M(a, b, 1)\rho(a, b) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Điều đó chứng tỏ ánh xạ T thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1.1.1 với $\alpha = 1$. Hơn nữa, T là toán tử Picard yếu và nếu $\bar{a}, \bar{b}$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 1.1.3. Giả sử $X = \{0, 1, 2\}$. Xét metric $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi

$$\rho(0, 0) = \rho(1, 1) = \rho(2, 2) = 0,$$

$$\rho(0, 1) = \rho(1, 0) = \frac{1}{2},$$

$$\rho(0, 2) = \rho(2, 0) = \frac{3}{2},$$

$$\rho(1, 2) = \rho(2, 1) = 2.$$

Khi đó (X, ρ) là không gian metric đầy đủ.

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ bởi $T0 = 0, T1 = 1$ và $T2 = 1$. Với $\alpha = 1$, ta có

$$\begin{aligned} M(0, 1, \alpha) &= \frac{\rho(0, T1) + \rho(T0, 1) + \rho(0, 1)}{2\rho(0, T0) + \rho(1, T1) + 1} = \frac{3}{2}, \\ M(1, 2, \alpha) &= \frac{\rho(1, T2) + \rho(T1, 2) + \rho(1, 2)}{2\rho(1, T1) + \rho(2, T2) + 1} = \frac{4}{3}, \\ M(2, 1, \alpha) &= \frac{\rho(2, T1) + \rho(T2, 1) + \rho(2, 1)}{2\rho(2, T2) + \rho(1, T1) + 1} = \frac{4}{5}, \\ M(0, 2, \alpha) &= \frac{\rho(0, T2) + \rho(T0, 2) + \rho(0, 2)}{2\rho(0, T0) + \rho(2, T2) + 1} = \frac{7}{6}, \\ M(2, 0, \alpha) &= \frac{\rho(2, T0) + \rho(T2, 0) + \rho(2, 0)}{2\rho(2, T2) + \rho(0, T0) + 1} = \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Bằng kiểm tra trực tiếp, ta thấy T thỏa mãn các điều kiện của Định lý 1.1.1. Dễ thấy T là toán tử Picard yếu với tập điểm bất động là $\{0, 1\}$ và

$$\frac{1}{2} = \rho(0, 1) \geq \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}.$$

Hệ quả 1.1.4. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và T là ánh xạ từ X vào chính nó. Giả sử tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho T thỏa mãn giả thiết của Định lý 1.1.1. Khi đó T có điểm bất động duy nhất nếu $M(a, b, \alpha) < 1$ với mọi $a, b \in X$.

Chứng minh. Theo Định lý 1.1.1, T có điểm bất động. Nếu $\bar{a}$ và $\bar{b}$ là hai điểm bất động của T thì

$$0 = \frac{1}{2}\rho(\bar{a}, T\bar{a}) \leq \rho(\bar{a}, \bar{b}).$$

Theo giả thiết, ta có

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \rho(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq M(\bar{a}, \bar{b}, \alpha) \cdot \rho(\bar{a}, \bar{b}).$$

Điều này chứng tỏ

$$(1 - M(\bar{a}, \bar{b}, \alpha))\rho(\bar{a}, \bar{b}) \leq 0.$$

Do $0 \leq M(\bar{a}, \bar{b}, \alpha) < 1$ nên $\rho(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Điều đó chứng tỏ $\bar{a} = \bar{b}$. Hệ quả được chứng minh. $\square$

Ví dụ 1.1.5. Giả sử $X = \{0, 1, 2\}$ và $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\rho(0, 0) = \rho(1, 1) = \rho(2, 2) = 0,$$

$$\rho(0, 1) = \rho(1, 0) = \frac{1}{2},$$

$$\rho(0, 2) = \rho(2, 0) = 1,$$

$$\rho(1, 2) = \rho(2, 1) = \frac{1}{2}.$$

Khi đó (X, ρ) là không gian metric đầy đủ.

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ bởi $T0 = 0, T1 = 0$ và $T2 = 0$. Với $\alpha = 2$, bằng tính toán trực tiếp ta có $M(a, b, \alpha) < 1$ với mọi $a, b \in X$. Hơn nữa, vì $\rho(Ta, Tb) = 0$ với mọi $a, b \in X$ nên

$$\rho(Ta, Tb) \leq M(a, b, 2) \cdot \rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Vì vậy T thỏa mãn các điều kiện của Hệ quả 1.1.4 với $\alpha = 2$. Dễ thấy, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} = 0$.

Định lý 1.1.6. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } \rho(Ta, Tb) \leq N(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó

$$N(a, b, \alpha) = \frac{\rho(a, Tb) + \rho(b, Ta) + \rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) + \rho(a, b)}{3\rho(a, Ta) + 2\rho(b, Tb) + \alpha}.$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}.$$

Chứng minh. Lấy $a_0 \in X$ tùy ý, ta xây dựng dãy $\{a_n\}$ bởi công thức $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Đặt $\rho_n = \rho(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$. Do

$$\frac{1}{2}\rho(a_n, Ta_n) = \frac{1}{2}\rho(a_n, a_{n+1}) \leq \rho(a_n, a_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

nên theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho(Ta_n, Ta_{n+1}) \leq N(a_n, a_{n+1}, \alpha)\rho(a_n, a_{n+1}) \\ &= \left(\frac{\rho(a_n, a_{n+2}) + 2\rho(a_n, a_{n+1}) + \rho(a_{n+1}, a_{n+2})}{3\rho(a_n, a_{n+1}) + 2\rho(a_{n+1}, a_{n+2}) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_n, a_{n+1}) \\ &\leq \left(\frac{3\rho(a_n, a_{n+1}) + 2\rho(a_{n+1}, a_{n+2})}{3\rho(a_n, a_{n+1}) + 2\rho(a_{n+1}, a_{n+2}) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_n, a_{n+1}) \\ &= \left(\frac{3\rho_n + 2\rho_{n+1}}{3\rho_n + 2\rho_{n+1} + \alpha} \right) \cdot \rho_n, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Với mỗi $n \geq 0$, ta đặt

$$c_n = \frac{3\rho_n + 2\rho_{n+1}}{3\rho_n + 2\rho_{n+1} + \alpha}.$$

Khi đó $0 \leq c_n < 1$ và $\rho_{n+1} \leq c_n \rho_n$ với mọi $n \geq 0$. Điều này chứng tỏ

$$\rho_n \leq c_0^n \rho_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự như chứng minh Định lý 1.1.1, ta có kết luận của định lý. $\square$

1.2. Toán tử Picard yếu đa trị

Định nghĩa 1.2.1. Cho hai tập hợp bất kỳ A, B và 2^B là họ tất cả các tập con của B . Một ánh xạ T đi từ tập hợp A vào tập hợp 2^B được gọi là ánh xạ đa trị từ A vào B , kí hiệu là $T : A \rightarrow 2^B$.

Định nghĩa 1.2.2. Cho ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow 2^X$. Điểm $a_0 \in X$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ T nếu $a_0 \in Ta_0$.

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh một bổ đề cần thiết để chứng minh cho kết quả chính.

Bổ đề 1.2.3. Cho (X, ρ) là không gian metric và $A, B \in CB(X)$. Khi đó nếu $H(A, B) > 0$ thì với mỗi $q > 1$ và $a \in A$, tồn tại $b \in B$ sao cho

$$\rho(a, b) < q \cdot H(A, B).$$

Chứng minh. Sử dụng đặc trưng của infimum, với $\varepsilon = (q - 1)H(A, B)$, tồn tại $b \in B$ sao cho

$$\rho(a, b) < d(a, B) + \varepsilon.$$

Do định nghĩa của $H(A, B)$ nên

$$d(a, B) \leq H(A, B).$$

Từ đó suy ra $\rho(a, b) < q \cdot H(A, B)$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Định lý 1.2.4. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow CB(X)$. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2}d(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } H(Ta, Tb) \leq P(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó

$$P(a, b, \alpha) = \frac{d(a, Tb) + d(b, Ta) + \rho(a, b)}{2\delta(a, Ta) + \delta(b, Tb) + \alpha}, \quad \delta(a, A) := \sup_{b \in A} \rho(a, b).$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu đa trị;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động của T thì

$$\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b}).$$

Chứng minh. (1) Lấy $a_0 \in X$ tùy ý và chọn $a_1 \in Ta_0$.

Bước 1. Nếu $H(Ta_0, Ta_1) = 0$ thì $Ta_0 = Ta_1$. Điều đó chứng tỏ a_1 là điểm bất động của T . Nếu $H(Ta_0, Ta_1) > 0$ thì theo Bổ đề 1.2.3, với mỗi $h_1 > 1$, tồn tại $a_2 \in Ta_1$ thỏa mãn

$$\rho(a_1, a_2) < h_1 H(Ta_0, Ta_1).$$

Bước 2. Nếu $H(Ta_1, Ta_2) = 0$ thì $Ta_1 = Ta_2$. Điều đó chứng tỏ a_2 là điểm bất động của T . Nếu $H(Ta_1, Ta_2) > 0$, sử dụng một lần nữa Bổ đề 1.2.3, với mỗi $h_2 > 1$, tồn tại $a_3 \in Ta_2$ thỏa mãn

$$\rho(a_2, a_3) < h_2 H(Ta_1, Ta_2).$$

.

.

.

Bước n. Tiếp tục quá trình trên, nếu $H(Ta_{n-1}, Ta_n) = 0$ thì $Ta_{n-1} = Ta_n$. Từ đó suy ra, a_n là điểm bất động của T . Nếu $H(Ta_{n-1}, Ta_n) > 0$, bởi Bổ đề 1.2.3 với mỗi $h_n > 1$, tồn tại $a_{n+1} \in Ta_n$ thỏa mãn

$$\rho(a_n, a_{n+1}) < h_n H(Ta_{n-1}, Ta_n).$$

Quá trình trên cứ thế tiếp diễn, nếu tại bước thứ k mà $H(Ta_{k-1}, Ta_k) = 0$ thì a_k là điểm bất động của T và dãy lặp $\{T^n a\}$ hội tụ về a_k . Nếu không, ta sẽ thu được dãy $\{a_n\}$ và dãy $\{h_n\}$ thỏa mãn $a_n \in Ta_{n-1}$, $h_n > 1$ và

$$\rho(a_n, a_{n+1}) < h_n H(Ta_{n-1}, Ta_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Do $\frac{1}{2}d(a_{n-1}, Ta_{n-1}) \leq \rho(a_{n-1}, a_n)$, $n = 1, 2, \dots$ nên theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} H(Ta_{n-1}, Ta_n) &\leq P(a_{n-1}, a_n, \alpha) \rho(a_{n-1}, a_n) \\ &= \left(\frac{d(a_{n-1}, Ta_n) + d(a_n, Ta_{n-1}) + \rho(a_{n-1}, a_n)}{2\delta(a_{n-1}, Ta_{n-1}) + \delta(a_n, Ta_n) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_{n-1}, a_n) \\ &= \left(\frac{d(a_{n-1}, Ta_n) + \rho(a_{n-1}, a_n)}{2\delta(a_{n-1}, Ta_{n-1}) + \delta(a_n, Ta_n) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_{n-1}, a_n). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Mặt khác, với mỗi phần tử $b_n \in T(a_n)$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{d(a_{n-1}, Ta_n) + \rho(a_{n-1}, a_n)}{2\delta(a_{n-1}, Ta_{n-1}) + \delta(a_n, Ta_n) + \alpha} &\leq \frac{\rho(a_{n-1}, b_n) + \rho(a_{n-1}, a_n)}{2\rho(a_{n-1}, a_n) + \rho(a_n, b_n) + \alpha} \\ &\leq \frac{2\rho(a_{n-1}, a_n) + \rho(a_n, b_n)}{2\rho(a_{n-1}, a_n) + \rho(a_n, b_n) + \alpha}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Từ (1.2.1) và (1.2.2) ta có

$$H(Ta_{n-1}, Ta_n) \leq \left(\frac{2\rho(a_{n-1}, a_n) + \rho(a_n, b_n)}{2\rho(a_{n-1}, a_n) + \rho(a_n, b_n) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_{n-1}, a_n).$$

Đặt

$$c_n = \frac{2\rho(a_{n-1}, a_n) + \rho(a_n, b_n)}{2\rho(a_{n-1}, a_n) + \rho(a_n, b_n) + \alpha}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Khi đó $0 < c_n < 1$ và

$$\rho_n < h_n c_n \rho_{n-1}, \text{ ở đây } \rho_n = \rho(a_n, a_{n+1}) \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

Nếu ta chọn $h_n = \frac{1}{\sqrt{c_n}}$ với $n \geq 1$ thì $\rho_n < \sqrt{c_n} \rho_{n-1}$, với mọi $n \geq 1$. Điều đó kéo theo

$$\rho_n < \rho_{n-1} \text{ và } \rho_n < \sqrt{c_n c_{n-1} \dots c_1} \rho_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Chúng minh tương tự Định lý 1.1.1, tồn tại $\bar{a} \in X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a}$.

Tiếp theo ta chứng tỏ rằng, với mỗi $n \geq 0$, hoặc là

$$\frac{1}{2}d(a_n, Ta_n) \leq \rho(a_n, \bar{a}) \text{ hoặc } \frac{1}{2}d(a_{n+1}, Ta_{n+1}) \leq \rho(a_{n+1}, \bar{a}). \quad (1.2.3)$$

Bằng phản chứng, ta giả sử rằng tồn tại $n \geq 0$ sao cho

$$\rho(a_n, \bar{a}) < \frac{1}{2}d(a_n, Ta_n) \text{ và } \rho(a_{n+1}, \bar{a}) < \frac{1}{2}d(a_{n+1}, Ta_{n+1}).$$

Khi đó, theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned} \rho_n = \rho(a_n, a_{n+1}) &\leq \rho(a_n, \bar{a}) + \rho(a_{n+1}, \bar{a}) \\ &< \frac{1}{2}d(a_n, Ta_n) + \frac{1}{2}d(a_{n+1}, Ta_{n+1}) \\ &\leq \frac{1}{2}\rho(a_n, a_{n+1}) + \frac{1}{2}\rho(a_{n+1}, a_{n+2}) \\ &= \frac{1}{2}\rho_n + \frac{1}{2}\rho_{n+1} \leq \rho_n. \end{aligned}$$

Điều này không xảy ra. Như vậy (1.2.3) đúng với mọi $n \geq 0$. Từ (1.2.3) và giả thiết suy ra với mỗi $n \geq 0$, hoặc là

$$H(Ta_n, T\bar{a}) \leq P(a_n, \bar{a}, \alpha)\rho(a_n, \bar{a}), \quad (1.2.4)$$

hoặc

$$H(Ta_{n+1}, T\bar{a}) \leq P(a_{n+1}, \bar{a}, \alpha)\rho(a_{n+1}, \bar{a}). \quad (1.2.5)$$

Khi đó, hoặc là (1.2.4) đúng với vô hạn số tự nhiên n hoặc (1.2.5) đúng với vô hạn số tự nhiên n . Giả sử (1.2.4) đúng với vô hạn số tự nhiên n . Ta có thể chọn trong tập vô hạn đó dãy $\{n_k\}$ đơn điệu tăng ngặt. Từ đó suy ra dãy $\{a_{n_k}\}$ là dãy con của dãy $\{a_n\}$ và

$$\begin{aligned} d(\bar{a}, T\bar{a}) &= \inf_{b \in T\bar{a}} \rho(\bar{a}, b) \leq \rho(a_{n_k+1}, \bar{a}) + \inf_{b \in T\bar{a}} \rho(a_{n_k+1}, b) \\ &= \rho(a_{n_k+1}, \bar{a}) + d(a_{n_k+1}, T\bar{a}) \\ &\leq \rho(a_{n_k+1}, \bar{a}) + H(Ta_{n_k}, T\bar{a}) \\ &\leq \rho(a_{n_k+1}, \bar{a}) + \left(\frac{d(a_{n_k}, T\bar{a}) + d(\bar{a}, Ta_{n_k}) + \rho(a_{n_k}, \bar{a})}{2\delta(a_{n_k}, Ta_{n_k}) + \delta(\bar{a}, T\bar{a}) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_{n_k}, \bar{a}) \\ &\leq \rho(a_{n_k+1}, \bar{a}) + \left(\frac{2\rho(a_{n_k}, \bar{a}) + d(\bar{a}, T\bar{a}) + \rho(a_{n_k+1}, \bar{a})}{2\rho(a_{n_k}, a_{n_k+1}) + \delta(\bar{a}, T\bar{a}) + \alpha} \right) \cdot \rho(a_{n_k}, \bar{a}), \end{aligned}$$

với mọi $k \geq 1$. Cho $k \rightarrow \infty$ ta thu được $d(\bar{a}, T\bar{a}) = 0$. Điều này kéo theo $\bar{a} \in T\bar{a}$. Vậy $\bar{a}$ là điểm bất động của ánh xạ T . Nếu (1.2.5) đúng với vô hạn số tự nhiên n , chứng minh một cách hoàn toàn tương tự như trên ta suy ra $\bar{a}$ là điểm bất động của ánh xạ T . Vậy T là toán tử Picard yếu đa trị.

(2) Giả sử $\bar{a}$ và $\bar{b}$ là hai điểm bất động khác nhau của T . Vì

$$0 = \frac{1}{2}d(\bar{a}, T\bar{a}) < \rho(\bar{a}, \bar{b})$$

nên theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} H(T\bar{a}, T\bar{b}) &\leq P(\bar{a}, \bar{b}, \alpha)\rho(\bar{a}, \bar{b}) \\ &= \left(\frac{d(\bar{a}, T\bar{b}) + d(\bar{b}, T\bar{a}) + \rho(\bar{a}, \bar{b})}{2\delta(\bar{a}, T\bar{a}) + \delta(\bar{b}, T\bar{b}) + \alpha} \right) \cdot \rho(\bar{a}, \bar{b}) \\ &\leq \left(\frac{\rho(\bar{a}, \bar{b}) + \rho(\bar{a}, \bar{b}) + \rho(\bar{a}, \bar{b})}{\alpha} \right) \cdot \rho(\bar{a}, \bar{b}) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b})$. Định lý được chứng minh. $\square$

Ví dụ 1.2.5. Giả sử $X = \{0, 1, 2\}$ và $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } a = b \in X, \\ 2, & \text{nếu } a \neq b \in X. \end{cases}$$

Khi đó (X, ρ) là không gian metric đầy đủ.

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow CB(X)$ được xác định bởi $T0 = \{0\}, T1 = \{1\}$ và $T2 = \{1, 2\}$. Với $\alpha = 2$, ta có

$$H(T0, T1) = H(T0, T2) = H(T1, T2) = 2,$$

và

$$P(0, 1, 2) = \frac{d(0, T1) + d(1, T0) + \rho(0, 1)}{2\delta(0, T0) + \delta(1, T1) + 2} = 3,$$

$$P(0, 2, 2) = \frac{d(0, T2) + d(2, T0) + \rho(0, 2)}{2\delta(0, T0) + \delta(2, T2) + 2} = \frac{3}{2},$$

$$P(1, 2, 2) = \frac{d(1, T2) + d(2, T1) + \rho(1, 2)}{2\delta(1, T1) + \delta(2, T2) + 2} = 1.$$

Bằng kiểm tra trực tiếp, ta có $\frac{1}{2}d(a, Ta) \leq \rho(a, b)$ với mọi $a, b \in X$. Mặt khác,

$$2 = H(T0, T1) \leq P(0, 1, 2) \cdot \rho(0, 1) = 6,$$

$$2 = H(T0, T2) \leq P(0, 2, 2) \cdot \rho(0, 2) = 3,$$

$$2 = H(T1, T2) \leq P(1, 2, 2) \cdot \rho(1, 2) = 2.$$

Do đó $H(Ta, Tb) \leq P(a, b, \alpha)\rho(a, b)$, với mọi $a, b \in X$. Vì thế T thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 1.2.4 với $\alpha = 2$. Hiển nhiên T là toán tử Picard yếu đa trị với tập điểm bất động là $\{0, 1, 2\}$ và nếu $\bar{a}, \bar{b}$ là hai điểm bất động khác nhau của T thì

$$\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{2}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b}).$$

Hệ quả 1.2.6. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow CB(X)$. Giả sử tồn tại số $\alpha > 0$ sao cho T thỏa mãn giả thiết

của Định lý 1.2.4. Khi đó T có điểm bất động duy nhất nếu $P(a, b, \alpha) < 1$ với mọi $a, b \in X$.

Chứng minh. Theo Định lý 1.2.4, T có điểm bất động $\bar{a}$. Nếu $\bar{b}$ cũng là điểm bất động của T , thì

$$0 = \frac{1}{2}d(\bar{a}, T\bar{a}) \leq \rho(\bar{a}, \bar{b}).$$

Theo giả thiết, ta có

$$H(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq P(\bar{a}, \bar{b}, \alpha) \cdot \rho(\bar{a}, \bar{b}).$$

Do $\rho(\bar{a}, \bar{b}) \leq H(T\bar{a}, T\bar{b})$ nên suy ra

$$(1 - P(\bar{a}, \bar{b}, \alpha))\rho(\bar{a}, \bar{b}) \leq 0.$$

Điều đó chứng tỏ $\rho(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Do đó $\bar{a} = \bar{b}$. Vì vậy T có điểm bất động duy nhất. $\square$

Định lý 1.2.7. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và ánh xạ đa trị $T : X \rightarrow CB(X)$. Giả sử tồn tại $\alpha > 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2}d(a, Ta) \leq \rho(a, b) \text{ kéo theo } H(Ta, Tb) \leq Q(a, b, \alpha)\rho(a, b),$$

với mọi $a, b \in X$, trong đó

$$Q(a, b, \alpha) = \frac{d(a, Tb) + d(b, Ta) + d(a, Ta) + d(b, Tb) + \rho(a, b)}{3\delta(a, Ta) + 2\delta(b, Tb) + \alpha}.$$

Khi đó

- (1) T là toán tử Picard yếu đa trị;
- (2) Nếu $\bar{a}, \bar{b} \in X$ là hai điểm bất động của T thì

$$\rho^2(\bar{a}, \bar{b}) \geq \frac{\alpha}{3}H(T\bar{a}, T\bar{b}).$$

Chứng minh. Chứng minh tương tự như chứng minh Định lý 1.2.4. $\square$

1.3. Kết luận chương 1

Chương 1 của luận án đạt được các kết quả sau:

- Thiết lập Định lý 1.1.1 và Định lý 1.1.6 là các điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu đơn trị trong không gian metric đầy đủ.
- Thiết lập Định lý 1.2.4 và Định lý 1.2.7 là các điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu đa trị trong không gian metric đầy đủ.
- Đưa ra các Ví dụ 1.1.2, Ví dụ 1.1.5 và Ví dụ 1.2.5 để minh họa cho các kết quả tương ứng.

Chương 2

Toán tử Picard và Picard yếu trong không gian b -metric mạnh

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard đơn trị và toán tử Picard yếu đa trị trong lớp không gian b -metric mạnh. Kết quả chính của chương được viết dựa trên bài báo [A1] và bài báo [A4] trong danh mục các công trình liên quan đến luận án.

2.1. Toán tử Picard đơn trị

Trong mục này, chúng tôi mở rộng các kết quả của J. Górnicki [16, 17] và của R. Kannan [22] cho không gian b -metric mạnh. Trước tiên, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm trong không gian b -metric mạnh.

Định nghĩa 2.1.1. [24] Cho X là một tập khác rỗng và số thực $K \geq 1$. Hàm $D : X \times X \rightarrow [0; +\infty)$ được gọi là b -metric mạnh trên X nếu:

- (D1) $D(a, b) = 0$ nếu và chỉ nếu $a = b$;
- (D2) $D(a, b) = D(b, a)$ với mọi $a, b \in X$;
- (D3) $D(a, b) \leq D(a, c) + KD(c, b)$ với mọi $a, b, c \in X$.

Khi đó, bộ ba (X, D, K) được gọi là không gian b -metric mạnh.

Định nghĩa 2.1.2. [24] Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh,

$\{a_n\}$ là một dãy các phần tử trong X và $a \in X$. Khi đó:

(i) Dãy $\{a_n\}$ được gọi là hội tụ đến a nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} D(a_n, a) = 0$. Ta kí hiệu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ hoặc $a_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow \infty$.

(ii) $\{a_n\}$ được gọi là dãy Cauchy trong X nếu $\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(a_n, a_m) = 0$.

(iii) Không gian b -metric mạnh (X, D, K) được gọi là không gian b -metric mạnh đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong X là hội tụ.

(iv) Không gian b -metric mạnh (X, D, K) được gọi là không gian b -metric mạnh compact nếu mọi dãy trong X đều chứa một dãy con hội tụ.

Mệnh đề 2.1.3. [24] Cho $\{a_n\}$ là một dãy các phần tử trong không gian b -metric mạnh (X, D, K) và giả sử

$$\sum_{i=1}^{\infty} D(a_i, a_{i+1}) < \infty.$$

Khi đó $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy.

2.1.1. Toán tử Picard cho một số lớp ánh xạ kiểu Kannan đối với hàm điều khiển

Ta kí hiệu các lớp hàm điều khiển sau đây:

$$\mathcal{S} = \{f : (0, \infty) \rightarrow [0, \frac{1}{2}) : f(t_n) \rightarrow \frac{1}{2} \text{ kéo theo } t_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty\}.$$

$$\mathcal{H} = \{\varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \frac{1}{3}) : \varphi(t_n) \rightarrow \frac{1}{3} \text{ kéo theo } t_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty\}.$$

Sử dụng lớp các hàm điều khiển trên chúng tôi thiết lập điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard.

Định lý 2.1.4. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử rằng tồn tại hàm $f \in \mathcal{S}$ sao cho với mỗi $a, b \in X$ và $a \neq b$, ta luôn có

$$D(Ta, Tb) \leq f(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Chứng minh. Chọn $a_0 \in X$ và ta định nghĩa dãy $\{a_n\}$ trong X bởi công thức $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Nếu có một số tự nhiên n nào đó thỏa mãn $a_{n+1} = a_n$ thì a_n là điểm bất động của T . Do đó, giả sử rằng $a_{n+1} \neq a_n$ với mọi $n \geq 0$. Ta đặt $D_n = D(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D(a_{n+1}, a_{n+2}) = D(Ta_n, Ta_{n+1}) \\ &\leq f(D(a_n, a_{n+1}))(D(a_n, Ta_n) + D(a_{n+1}, Ta_{n+1})) \\ &< \frac{1}{2}(D(a_n, Ta_n) + D(a_{n+1}, Ta_{n+1})) \\ &= \frac{1}{2}(D_n + D_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $D_{n+1} < D_n$ với mọi $n \geq 0$. Điều đó chứng tỏ $\{D_n\}$ là một dãy giảm các số thực không âm và bị chặn dưới. Do đó, tồn tại số thực $\eta \geq 0$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \eta$. Giả sử $\eta > 0$. Theo giả thiết, ta có

$$D(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq f(D(a_n, a_{n+1}))(D(a_n, a_{n+1}) + D(a_{n+1}, a_{n+2})),$$

với mọi $n \geq 0$. Từ đó suy ra

$$\frac{D_{n+1}}{D_n + D_{n+1}} \leq f(D_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta thu được $\lim_{n \rightarrow \infty} f(D_n) \geq \frac{1}{2}$. Bởi $f \in \mathcal{S}$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \eta = 0$. Mặt khác, với $m \neq n$, ta có

$$\begin{aligned} D(a_{n+1}, a_{m+1}) &\leq f(D(a_n, a_m))(D(a_n, a_{n+1}) + D(a_m, a_{m+1})) \\ &< \frac{1}{2}(D_n + D_m). \end{aligned}$$

Cho $n, m \rightarrow \infty$ ta được $\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(a_{n+1}, a_{m+1}) = 0$. Vậy $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Do tính đầy đủ của X nên tồn tại $\bar{a} \in X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a}$. Khi đó với $n \geq 1$, ta có

$$D(T\bar{a}, \bar{a}) \leq D(Ta_n, T\bar{a}) + KD(Ta_n, \bar{a})$$

$$\leq f(D(a_n, \bar{a}))(D(a_n, Ta_n) + D(\bar{a}, T\bar{a})) + KD(a_{n+1}, \bar{a}).$$

Từ đó suy ra

$$D(T\bar{a}, \bar{a}) \leq \frac{f(D(a_n, \bar{a}))}{1 - f(D(a_n, \bar{a}))}D_n + \frac{K}{1 - f(D(a_n, \bar{a}))}D(a_{n+1}, \bar{a}),$$

với mọi $n \geq 1$. Cho $n \rightarrow \infty$ ta được $T\bar{a} = \bar{a}$.

Giả sử $\bar{b}$ cũng là điểm bất động của T . Theo giả thiết, ta có

$$D(\bar{a}, \bar{b}) = D(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq f(D(\bar{a}, \bar{b}))(D(\bar{a}, T\bar{a}) + D(\bar{b}, T\bar{b})) = 0.$$

Vì vậy $D(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ hay $\bar{a} = \bar{b}$. Vậy T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$.

Do đó, T là toán tử Picard. Định lý được chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.1.5. Lấy $X = \{0, 1, 2\}$ và $D : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi

$$D(0, 0) = D(1, 1) = D(2, 2) = 0,$$

$$D(0, 1) = D(1, 0) = \frac{1}{2},$$

$$D(0, 2) = D(2, 0) = 6,$$

$$D(1, 2) = D(2, 1) = 5.$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi $T0 = 0, T1 = 0, T2 = 1$, hàm $f \in \mathcal{S}$ được cho bởi $f(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{6}}, t > 0$ và $f(0) \in [0, \frac{1}{2})$. Khi đó $(X, D, K = 2)$ là không gian b -metric mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric vì

$$6 = D(2, 0) > D(2, 1) + D(1, 0) = \frac{11}{2}.$$

Do đó, Định lý 4 không áp dụng được. Mặt khác, ta có

$$D(T0, T1) = D(0, 0) = 0 < \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{12}} = f(D(0, 1))(D(0, T0) + D(1, T1)),$$

$$D(T1, T2) = D(0, 1) = \frac{1}{2} < \frac{11}{4}e^{-\frac{5}{6}} = f(D(1, 2))(D(1, T1) + D(2, T2)),$$

$$D(T2, T0) = D(1, 0) = \frac{1}{2} < \frac{5}{2e} = f(D(2, 0))(D(2, T2) + D(0, T0)).$$

Do đó, ánh xạ T thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.1.4. Dễ thấy T là toán tử Picard.

Định lý 2.1.6. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ T từ X vào chính nó. Giả sử rằng tồn tại hàm $\varphi \in \mathcal{H}$ sao cho với mỗi $a, b \in X$ và $a \neq b$, ta luôn có

$$D(Ta, Tb) \leq \varphi(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb) + D(a, b)).$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Chứng minh. Lấy $a_0 \in X$ và ta định nghĩa dãy $\{a_n\}$ trong X bởi công thức $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Nếu tồn tại số tự nhiên n sao cho $a_{n+1} = a_n$ thì a_n là điểm bất động của T . Do đó, ta giả sử rằng $a_{n+1} \neq a_n$ với mọi $n \geq 0$. Đặt $D_n = D(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D(a_{n+1}, a_{n+2}) = D(Ta_n, Ta_{n+1}) \\ &\leq \varphi(D(a_n, a_{n+1}))(D(a_n, Ta_n) + D(a_{n+1}, Ta_{n+1}) + D(a_n, a_{n+1})) \\ &< \frac{1}{3}(D(a_n, a_{n+1}) + D(a_{n+1}, a_{n+2}) + D(a_n, a_{n+1})) \\ &= \frac{1}{3}(2D_n + D_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $D_{n+1} < D_n$ với mọi $n \geq 0$. Vì vậy $\{D_n\}$ là một dãy giảm các số thực không âm và bị chặn dưới. Do đó tồn tại số thực $\eta \geq 0$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \eta.$$

Giả sử rằng $\eta > 0$. Bởi giả thiết, ta có

$$D(a_{n+1}, a_{n+2}) \leq \varphi(D(a_n, a_{n+1}))(2D(a_n, a_{n+1}) + D(a_{n+1}, a_{n+2})),$$

với mọi $n \geq 0$. Điều đó chứng tỏ

$$\frac{D_{n+1}}{2D_n + D_{n+1}} \leq \varphi(D_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta thu được $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(D_n) \geq \frac{1}{3}$. Bởi $\varphi \in \mathcal{H}$ nên $\eta = 0$. Vì vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0$. Mặt khác, với $m \neq n$, ta có

$$\begin{aligned} D(a_{n+1}, a_{m+1}) &\leq \varphi(D(a_n, a_m))(D(a_n, a_{n+1}) + D(a_m, a_{m+1}) + D(a_n, a_m)) \\ &< \frac{1}{3}(D(a_n, a_{n+1}) + D(a_m, a_{m+1}) + KD(a_n, a_{n+1}) \\ &\quad + D(a_{n+1}, a_{m+1}) + KD(a_m, a_{m+1})). \end{aligned}$$

Do đó,

$$D(a_{n+1}, a_{m+1}) < \frac{K+1}{2}(D_n + D_m) \text{ với mọi } m \neq n.$$

Cho $n, m \rightarrow \infty$ ta được $\lim_{n, m \rightarrow \infty} D(a_{n+1}, a_{m+1}) = 0$. Vậy $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Do tính đầy đủ của X nên ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a} \in X$. Khi đó,

$$\begin{aligned} D(T\bar{a}, \bar{a}) &\leq D(Ta_n, T\bar{a}) + KD(Ta_n, \bar{a}) \\ &\leq \varphi(D(a_n, \bar{a}))(D(a_n, Ta_n) + D(\bar{a}, T\bar{a}) + D(a_n, \bar{a})) \\ &\quad + KD(a_{n+1}, \bar{a}) \text{ với mọi } n \geq 1. \end{aligned}$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} D(T\bar{a}, \bar{a}) &\leq \frac{\varphi(D(a_n, \bar{a}))}{1 - \varphi(D(a_n, \bar{a}))} D_n + \frac{\varphi(D(a_n, \bar{a}))}{1 - \varphi(D(a_n, \bar{a}))} D(a_n, \bar{a}) \\ &\quad + \frac{K}{1 - \varphi(D(a_n, \bar{a}))} D(a_{n+1}, \bar{a}) \text{ với mọi } n \geq 1. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta thu được $T\bar{a} = \bar{a}$.

Giả sử $\bar{b}$ cũng là điểm bất động của T . Theo giả thiết, ta có

$$D(\bar{a}, \bar{b}) = D(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq \frac{1}{3}(D(\bar{a}, T\bar{a}) + D(\bar{b}, T\bar{b}) + D(\bar{a}, \bar{b})).$$

Điều này tương đương với

$$\frac{2}{3}D(\bar{a}, \bar{b}) \leq \frac{1}{3}(D(\bar{a}, T\bar{a}) + D(\bar{b}, T\bar{b})) = 0.$$

Từ đó suy ra $D(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ hay $\bar{a} = \bar{b}$. Vậy T có điểm bất động duy nhất.

Vậy, T là toán tử Picard. Định lý được chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.1.7. Xét không gian b -metric mạnh đầy đủ (X, D, K) và ánh xạ T trong Ví dụ 2.1.5. Hiển nhiên, Định lý 5 không áp dụng được.

Ta xây dựng hàm $\varphi \in \mathcal{H}$ bởi $\varphi(t) = \frac{1}{3}e^{\frac{-t}{6}}, t > 0$ và $\varphi(0) \in [0, \frac{1}{3})$. Khi đó,

$$\begin{aligned} D(T0, T1) &= D(0, 0) \\ &= 0 < \frac{1}{3}e^{\frac{-1}{12}} = \varphi(D(0, 1))(D(0, T0) + D(1, T1) + D(0, 1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(T1, T2) &= D(0, 1) \\ &= \frac{1}{2} < \frac{21}{6}e^{\frac{-5}{6}} = \varphi(D(1, 2))(D(1, T1) + D(2, T2) + D(1, 2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(T2, T0) &= D(1, 0) \\ &= \frac{1}{2} < \frac{11}{3e} = \varphi(D(2, 0))(D(2, T2) + D(0, T0) + D(2, 0)). \end{aligned}$$

Như vậy, ánh xạ T thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.1.6. Hiển nhiên, T là toán tử Picard.

2.1.2. Toán tử Picard cho ánh xạ Kannan-Suzuki

Định lý 2.1.8. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và T là ánh xạ Kannan-Suzuki. Khi đó, T là toán tử Picard.

Chứng minh. Lấy $a_0 \in X$, ta xây dựng dãy lặp $\{a_n\}$ trong X bởi công thức $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Đặt $D_n = D(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$. Từ

$$\frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) = \frac{1}{K+1}D(a_n, a_{n+1}) \leq D(a_n, a_{n+1}),$$

với mọi $n \geq 0$, nên theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D(a_{n+1}, a_{n+2}) = D(Ta_n, Ta_{n+1}) \\ &\leq s(D(a_n, Ta_n) + D(a_{n+1}, Ta_{n+1})) \\ &= s(D(a_n, a_{n+1}) + D(a_{n+1}, a_{n+2})) \end{aligned}$$

$$= s(D_n + D_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

Từ đó suy ra

$$D_{n+1} \leq \frac{s}{1-s} D_n = h D_n, \quad \text{với mọi } n \geq 0, \text{ ở đây } h = \frac{s}{1-s} \in [0, 1).$$

Điều đó chứng tỏ rằng

$$D_n \leq h^n D_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Do đó, ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \leq D_0 \sum_{n=1}^{\infty} h^n < \infty.$$

Theo Mệnh đề 2.1.3, $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Vì X là không gian b -metric mạnh đầy đủ nên tồn tại $\bar{a} \in X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a}$.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng với mọi $n \geq 0$, hoặc là

$$\frac{1}{K+1} D(a_n, Ta_n) \leq D(a_n, \bar{a}) \quad (2.1.1)$$

hoặc

$$\frac{1}{K+1} D(Ta_n, Ta_{n+1}) \leq D(Ta_n, \bar{a}). \quad (2.1.2)$$

Thật vậy, bằng phản chứng, ta giả sử rằng tồn tại $n \geq 0$ sao cho

$$D(a_n, \bar{a}) < \frac{1}{K+1} D(a_n, Ta_n) \quad \text{và} \quad D(Ta_n, \bar{a}) < \frac{1}{K+1} D(Ta_n, Ta_{n+1}).$$

Khi đó, theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned} D_n &= D(a_n, Ta_n) \leq D(a_n, \bar{a}) + K D(Ta_n, \bar{a}) \\ &< \frac{1}{K+1} D(a_n, Ta_n) + \frac{K}{K+1} D(Ta_n, Ta_{n+1}) \\ &= \frac{1}{K+1} D_n + \frac{K}{K+1} D_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{K+1} D_n + \frac{Kh}{K+1} D_n < D_n, \end{aligned}$$

điều này không xảy ra. Từ đó và từ giả thiết ta có, hoặc là

$$D(a_{n+1}, T\bar{a}) \leq s(D(a_n, Ta_n) + D(\bar{a}, T\bar{a})) \quad (2.1.3)$$

hoặc

$$D(a_{n+2}, T\bar{a}) \leq s(D(a_{n+1}, Ta_{n+1}) + D(\bar{a}, T\bar{a})), \quad (2.1.4)$$

với mọi $n \geq 0$. Khi đó, hoặc là (2.1.3) đúng với vô hạn số tự nhiên n hoặc (2.1.4) đúng với vô hạn số tự nhiên n . Giả sử (2.1.3) đúng với vô hạn số tự nhiên n , ta có thể chọn trong tập vô hạn đó dãy số tự nhiên $\{n_k\}$ đơn điệu tăng ngặt. Suy ra, dãy $\{a_{n_k}\}$ là một dãy con của dãy $\{a_n\}$ và với mỗi $k \geq 1$ ta có

$$\begin{aligned} D(a_{n_k+1}, T\bar{a}) &\leq s(D(a_{n_k}, Ta_{n_k}) + D(\bar{a}, T\bar{a})) \\ &\leq s(D(a_{n_k}, \bar{a}) + 2KD(a_{n_k+1}, \bar{a}) + D(a_{n_k+1}, T\bar{a})). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$D(a_{n_k+1}, T\bar{a}) \leq \frac{s}{1-s} (D(a_{n_k}, \bar{a}) + 2KD(a_{n_k+1}, \bar{a})) \text{ với } k \geq 1. \quad (2.1.5)$$

Cho $k \rightarrow \infty$ trong bất đẳng thức (2.1.5) ta thu được $D(\bar{a}, T\bar{a}) = 0$. Điều đó kéo theo $T\bar{a} = \bar{a}$. Vậy $\bar{a}$ là một điểm bất động của T . Nếu (2.1.4) đúng với vô hạn số tự nhiên n thì chứng minh một cách hoàn toàn tương tự như trên ta suy ra $\bar{a}$ là một điểm bất động của ánh xạ T .

Giả sử rằng $\bar{b}$ cũng là một điểm bất động của T và $\bar{a} \neq \bar{b}$. Vì

$$0 = \frac{1}{K+1} D(\bar{a}, T\bar{a}) < D(\bar{a}, \bar{b})$$

nên theo giả thiết, ta có

$$D(\bar{a}, \bar{b}) = D(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq s(D(\bar{a}, T\bar{a}) + D(\bar{b}, T\bar{b})) = 0.$$

Từ đó suy ra $D(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ hay $\bar{a} = \bar{b}$. Điều này mâu thuẫn với $\bar{a} \neq \bar{b}$. Do đó, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Vậy T là toán tử Picard. Định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.1.9. Cho (X, ρ) là không gian metric đầy đủ và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) \leq s(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)),$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \leq \rho(a, b)$. Khi đó, T là toán tử Picard.

Trên $C_{[0,1]}$ không gian các hàm liên tục thuộc $[0, 1]$, ta trang bị metric $\rho : C_{[0,1]} \times C_{[0,1]} \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, b) = \sup_{t \in [0,1]} |a(t) - b(t)| \text{ với } a, b \in C_{[0,1]}.$$

Khi đó $C_{[0,1]}$ là không gian metric đầy đủ. Ta đặt

$$X := \{a \in C_{[0,1]} : |a(t) - a_0| \leq k \text{ với mọi } t \in [0, 1]\},$$

ở đây $k \in (0, \frac{1}{3})$ và a_0 là số thực cho trước. Từ X là không gian con đóng của $C_{[0,1]}$ nên suy ra (X, ρ) là không gian metric đầy đủ. Sử dụng Hệ quả 2.1.9, chúng tôi thiết lập điều kiện đủ cho sự tồn tại duy nhất nghiệm của một lớp phương trình vi phân với điều kiện ban đầu.

Định lý 2.1.10. Giả sử $f : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm thực liên tục thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$|f(t, a) - f(t, b)| \leq k|a(t) - b(t)| \quad (2.1.6)$$

với mọi $(t, a), (t, b) \in [0, 1] \times X$ và

$$|f(t, a)| \leq k \text{ với mọi } (t, a) \in [0, 1] \times X. \quad (2.1.7)$$

Khi đó, bài toán phương trình vi phân Cauchy

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = f(t, a) \\ a(0) = a_0 \end{cases} \quad (2.1.8)$$

có nghiệm duy nhất $\bar{a}$ trên X .

Chứng minh. Lấy tích phân hai vế của (2.1.8), ta có

$$a(t) = a_0 + \int_0^t f(s, a) ds.$$

Do đó, việc tìm nghiệm của (2.1.8) tương đương với việc tìm điểm bất động của ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi

$$Ta(t) = a_0 + \int_0^t f(s, a) ds. \quad (2.1.9)$$

Chú ý rằng, nếu $s \in [0, 1]$ và $a \in X$ kéo theo $|a(s) - a_0| \leq k$, vì thế $(s, a) \in [0, 1] \times X$. Do f là liên tục trên $[0, 1] \times X$ suy ra tích phân (2.1.9) và ánh xạ T tồn tại với mọi $a \in X$. Ta chứng tỏ T là một ánh xạ từ X vào chính nó. Thật vậy, từ (2.1.7) và (2.1.9), ta có

$$|Ta(t) - a_0| = \left| \int_0^t f(s, a) ds \right| \leq \int_0^t |f(s, a)| ds \leq k,$$

với mọi $t \in [0, 1]$. Do đó, $Ta \in X$ với mọi $a \in X$. Vì vậy, T là một ánh xạ từ X vào chính nó. Mặt khác, áp dụng (2.1.6) ta có

$$\begin{aligned} \rho(Ta, Tb) &= \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^t (f(s, a) - f(s, b)) ds \right| \\ &\leq k \sup_{t \in [0, 1]} |a(t) - b(t)|. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Hơn nữa, lại có

$$\begin{aligned} \rho(a, Ta) + \rho(b, Tb) &= \sup_{t \in [0, 1]} \left| a(t) - a_0 - \int_0^t f(s, a) ds \right| \\ &+ \sup_{t \in [0, 1]} \left| b(t) - a_0 - \int_0^t f(s, b) ds \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sup_{t \in [0,1]} |a(t) - b(t) - \int_0^t (f(s, a) - f(s, b)) ds| \\
&\geq \sup_{t \in [0,1]} |a(t) - b(t)| - \inf_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (f(s, a) - f(s, b)) ds \right| \\
&\geq \sup_{t \in [0,1]} |a(t) - b(t)| - \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^t (f(s, a) - f(s, b)) ds \right| \\
&= \sup_{t \in [0,1]} |a(t) - b(t)| - \rho(Ta, Tb). \tag{2.1.11}
\end{aligned}$$

Theo (2.1.10) và (2.1.11), ta suy ra

$$\rho(Ta, Tb) \leq \frac{k}{1-k} (\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)) = r (\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)),$$

ở đây $r := \frac{k}{1-k} \in (0, \frac{1}{2})$. Theo Hệ quả 2.1.9, tồn tại duy nhất $\bar{a} \in X$ sao cho $\bar{a} = T\bar{a}$. Điều này chứng tỏ $\bar{a}$ là nghiệm duy nhất của bài toán (2.1.8) trên X . Định lý được chứng minh. $\square$

Lớp các hàm điều khiển phụ thuộc tham số $\mathcal{F}_q$ được xây dựng bởi:

$$\mathcal{F}_q = \{\psi : (0, \infty) \rightarrow [0, q) : \psi(t_n) \rightarrow q \text{ kéo theo } t_n \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty\},$$

ở đây $q \in (0, \frac{1}{2})$. Sử dụng hàm điều khiển phụ thuộc tham số cho ánh xạ Kannan-Suzuki, chúng tôi thu được kết quả sau đây cho không gian b -metric mạnh.

Định lý 2.1.11. *Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại hàm $\psi \in \mathcal{F}_q$ thỏa mãn*

$$\frac{1}{K+1} D(a, Ta) \leq D(a, b)$$

kéo theo

$$D(Ta, Tb) \leq \psi(D(a, b))(D(a, Ta) + D(b, Tb)),$$

với mọi $a, b \in X, a \neq b$. Khi đó, T là toán tử Picard.

Chứng minh. Lấy $a_0 \in X$, ta định nghĩa dãy $\{a_n\}$ trong X bằng công thức $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Nếu tồn tại số tự nhiên n nào đó sao cho $a_{n+1} = a_n$ thì a_n là điểm bất động của T . Do đó, giả sử rằng $a_{n+1} \neq a_n$ với mọi $n \geq 0$. Ta đặt $D_n = D(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$. Từ

$$\frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) = \frac{1}{K+1}D(a_n, a_{n+1}) \leq D(a_n, a_{n+1}),$$

với mọi $n \geq 0$, nên theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D(a_{n+1}, a_{n+2}) = D(Ta_n, Ta_{n+1}) \\ &\leq \psi(D(a_n, a_{n+1}))(D(a_n, Ta_n) + D(a_{n+1}, Ta_{n+1})) \\ &< q(D(a_n, Ta_n) + D(a_{n+1}, Ta_{n+1})) \\ &= q(D_n + D_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Do đó

$$D_{n+1} < \frac{q}{1-q}D_n = hD_n, \quad \text{ở đây } h = \frac{q}{1-q} \in (0, 1).$$

Điều đó chứng tỏ

$$D_n < h^n D_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n < D_0 \sum_{n=1}^{\infty} h^n < +\infty.$$

Áp dụng Mệnh đề 2.1.3, ta suy ra $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Vì X là đầy đủ nên tồn tại $\bar{a} \in X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a} \in X$.

Tiếp theo, ta chứng tỏ rằng với mọi $n \geq 0$, hoặc là

$$\frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) \leq D(a_n, \bar{a}) \quad \text{hoặc} \quad \frac{1}{K+1}D(Ta_n, Ta_{n+1}) \leq D(Ta_n, \bar{a}). \quad (2.1.12)$$

Bằng phản chứng, ta giả sử rằng tồn tại số tự nhiên $n \geq 0$, sao cho

$$D(a_n, \bar{a}) < \frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) \quad \text{và} \quad D(Ta_n, \bar{a}) < \frac{1}{K+1}D(Ta_n, Ta_{n+1}).$$

Khi đó, theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned}
D_n &= D(a_n, Ta_n) \leq D(a_n, \bar{a}) + KD(Ta_n, \bar{a}) \\
&< \frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) + \frac{K}{K+1}D(Ta_n, Ta_{n+1}) \\
&= \frac{1}{K+1}D_n + \frac{K}{K+1}D_{n+1} \\
&\leq D_n.
\end{aligned}$$

Điều này không thể xảy ra. Do đó, từ các bất đẳng thức trong (2.1.12) với mọi số tự nhiên $n \geq 0$ ta có, hoặc là

$$D(a_{n+1}, T\bar{a}) \leq \psi(D(a_n, \bar{a}))(D(a_n, Ta_n) + D(\bar{a}, T\bar{a})), \quad (2.1.13)$$

hoặc

$$D(a_{n+2}, T\bar{a}) \leq \psi(D(a_{n+1}, \bar{a}))(D(a_{n+1}, Ta_{n+1}) + D(\bar{a}, T\bar{a})). \quad (2.1.14)$$

Khi đó, hoặc là (2.1.13) đúng với vô hạn số tự nhiên n hoặc (2.1.14) đúng với vô hạn số tự nhiên n . Giả sử rằng (2.1.13) đúng với vô hạn số tự nhiên n , ta có thể chọn trong tập vô hạn đó dãy $\{n_k\}$ đơn điệu tăng ngặt. Từ đó suy ra dãy $\{a_{n_k}\}$ là dãy con của dãy $\{a_n\}$ và với mỗi $k \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
D(a_{n_k+1}, T\bar{a}) &\leq \psi(D(a_{n_k}, \bar{a}))(D(a_{n_k}, Ta_{n_k}) + D(\bar{a}, T\bar{a})) \\
&< q(D(a_{n_k}, \bar{a}) + 2KD(a_{n_k+1}, \bar{a}) + D(a_{n_k+1}, T\bar{a})).
\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$D(a_{n_k+1}, T\bar{a}) < \frac{q}{1-q}(D(a_{n_k}, \bar{a}) + 2KD(a_{n_k+1}, \bar{a})) \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Cho $k \rightarrow \infty$ ta được $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k+1} = T\bar{a}$. Điều này chứng tỏ $T\bar{a} = \bar{a}$. Nếu (2.1.14) đúng với vô hạn số tự nhiên n , chứng minh một cách hoàn toàn tương tự như trên ta suy ra $\bar{a}$ là điểm bất động của ánh xạ T .

Giả sử $\bar{b}$ cũng là điểm bất động của T . Khi đó, do

$$0 = \frac{1}{K+1}D(\bar{a}, T\bar{a}) \leq D(\bar{a}, \bar{b}),$$

nên theo giả thiết, ta có

$$D(\bar{a}, \bar{b}) = D(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq \psi(D(\bar{a}, \bar{b}))(D(\bar{a}, T\bar{a}) + D(\bar{b}, T\bar{b})) = 0.$$

Điều đó chứng tỏ $\bar{a} = \bar{b}$. Vì vậy, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Do đó, T là toán tử Picard. $\square$

Ví dụ 2.1.12. Cho $X = \{0, 1, 2\}$ và hàm $D : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi $D(a, b) = (a - b)^2$. Khi đó $(X, D, K = 3)$ là không gian b -metric mạnh đầy đủ.

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi $T0 = 1, T1 = 1, T2 = 0$ và hàm ψ xác định bởi $\psi(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{8}}, t > 0, \psi(0) \in [0, \frac{1}{3})$. Khi đó $\psi \in \mathcal{F}_{\frac{1}{3}}$. Dễ dàng kiểm tra được T thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.1.11. Hiển nhiên, T là toán tử Picard.

2.1.3. Toán tử Picard cho ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki

Định lý 2.1.13. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh compact và T là ánh xạ kiểu Kannan-Suzuki. Khi đó, T có một điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Hơn thế, nếu T liên tục thì T là toán tử Picard.

Chứng minh. Đặt

$$\eta = \inf\{D(a, Ta) : a \in X\}.$$

Khi đó tồn tại dãy $\{a_n\}$ trong X thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} D(a_n, Ta_n) = \eta \geq 0$. Do X là compact, không mất tính tổng quát, giả sử $\{a_n\}$ hội tụ đến $c \in X$ và $\{Ta_n\}$ hội tụ đến $u \in X$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\eta = 0$. Thật vậy, giả sử $\eta > 0$. Vì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(a_n, u) = D(c, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(a_n, Ta_n) = \eta$$

nên ta có thể chọn $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{K+1}{K+2}\eta < D(a_n, u) \text{ và } D(a_n, Ta_n) < \frac{K+3}{K+2}\eta,$$

với mọi $n \geq n_0$. Do đó, ta có

$$\frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) < \frac{K+3}{(K+2)(K+1)}\eta \leq \frac{K+1}{K+2}\eta < D(a_n, u),$$

với mọi $n \geq n_0$. Theo giả thiết, ta có

$$D(Ta_n, Tu) < \frac{1}{2}(D(a_n, Ta_n) + D(u, Tu)),$$

với mọi $n \geq n_0$. Cho $n \rightarrow \infty$, ta thu được

$$D(u, Tu) \leq \frac{1}{2}(\eta + D(u, Tu)).$$

Điều này kéo theo $D(u, Tu) \leq \eta$. Sử dụng định nghĩa của η , ta thu được $D(u, Tu) = \eta$. Từ $\frac{1}{K+1}D(u, Tu) < D(u, Tu)$ nên ta có

$$D(Tu, T^2u) < \frac{1}{2}(D(u, Tu) + D(Tu, T^2u)).$$

Điều đó chứng tỏ

$$D(Tu, T^2u) < D(u, Tu) = \eta,$$

điều này mâu thuẫn với định nghĩa của η . Vì vậy $\eta = 0$.

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh T có một điểm bất động. Để ý rằng, nếu có số tự nhiên $n_0 \in \mathbb{N}$ nào đó thỏa mãn $a_{n_0} = Ta_{n_0}$ thì a_{n_0} là một điểm bất động của T . Do đó, ta có thể giả sử $a_n \neq Ta_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Từ $\eta = 0$ ta có $c = u$, điều này kéo theo $\{Ta_n\}$ hội tụ đến c . Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} D(c, T^2a_n) &\leq D(c, Ta_n) + KD(Ta_n, T^2a_n) \\ &< D(c, Ta_n) + KD(a_n, Ta_n) \text{ với mọi } n \geq 1. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta suy ra dãy $\{T^2a_n\}$ hội tụ đến c .

Nếu có một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) \geq D(a_n, c) \text{ và } \frac{1}{K+1}D(Ta_n, T^2a_n) \geq D(Ta_n, c)$$

thì ta có

$$D(a_n, Ta_n) \leq D(a_n, c) + KD(Ta_n, c)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) + \frac{K}{K+1}D(Ta_n, T^2a_n) \\
&< D(a_n, Ta_n).
\end{aligned}$$

Điều này không thể xảy ra. Vậy, hoặc là

$$\frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) < D(a_n, c) \text{ hoặc } \frac{1}{K+1}D(Ta_n, T^2a_n) < D(Ta_n, c)$$

đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Theo giả thiết, hoặc là

$$D(Ta_n, Tc) < \frac{1}{2}(D(a_n, Ta_n) + D(c, Tc)) \quad (2.1.15)$$

hoặc

$$D(T^2a_n, Tc) < \frac{1}{2}(D(Ta_n, T^2a_n) + D(c, Tc)), \quad (2.1.16)$$

đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, một trong hai trường hợp sau đây luôn đúng:

- (1) Tồn tại một tập con vô hạn các phần tử $I \subset \mathbb{N}$ sao cho (2.1.15) đúng với mọi $n \in I$.
- (2) Tồn tại một tập con vô hạn các phần tử $J \subset \mathbb{N}$ sao cho (2.1.16) đúng với mọi $n \in J$.

Trong trường hợp thứ nhất, ta có

$$\begin{aligned}
D(c, Tc) &= \lim_{n \in I, n \rightarrow \infty} D(Ta_n, Tc) \\
&\leq \lim_{n \in I, n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(D(a_n, Ta_n) + D(c, Tc)) \\
&= \frac{1}{2}D(c, Tc).
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $Tc = c$.

Trong trường hợp thứ hai, ta có

$$\begin{aligned}
D(c, Tc) &= \lim_{n \in J, n \rightarrow \infty} D(T^2a_n, Tc) \\
&\leq \lim_{n \in J, n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(D(Ta_n, T^2a_n) + D(c, Tc)) \\
&= \frac{1}{2}D(c, Tc).
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $Tc = c$.

Vậy $Tc = c$ trong cả hai trường hợp, suy ra $\bar{a} = c$ là điểm bất động của T . Giả sử rằng tồn tại $\bar{b} \in X, \bar{b} \neq \bar{a}$ thỏa mãn $T\bar{b} = \bar{b}$. Khi đó, do

$$0 = \frac{1}{K+1}D(\bar{a}, T\bar{a}) < D(\bar{a}, \bar{b})$$

nên theo giả thiết, ta có

$$D(\bar{a}, \bar{b}) = D(T\bar{a}, T\bar{b}) < \frac{1}{2}(D(\bar{a}, T\bar{a}) + D(\bar{b}, T\bar{b})) = 0,$$

điều này không xảy ra. Vì vậy, điểm bất động $\bar{a}$ của T là duy nhất.

Bây giờ, ta giả sử rằng T là ánh xạ liên tục. Lấy $a_0 \in X$ và định nghĩa dãy lặp $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Nếu tồn tại số tự nhiên n_0 thỏa mãn $a_{n_0+1} = a_{n_0}$ thì a_{n_0} là một điểm bất động của T . Do đó $a_{n_0} = \bar{a}$, điều này kéo theo $a_n = \bar{a}$ với mọi $n \geq n_0$. Vậy $T^n a \rightarrow \bar{a}$ khi $n \rightarrow \infty$. Ta giả sử rằng $a_{n+1} \neq a_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Đặt $D_n = D(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do

$$\frac{1}{K+1}D(a_n, Ta_n) = \frac{1}{K+1}D(a_n, a_{n+1}) < D(a_n, a_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

nên theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D(a_{n+1}, a_{n+2}) = D(Ta_n, Ta_{n+1}) \\ &< \frac{1}{2}(D(a_n, Ta_n) + D(a_{n+1}, Ta_{n+1})) \\ &= \frac{1}{2}(D(a_n, a_{n+1}) + D(a_{n+1}, a_{n+2})) \\ &= \frac{1}{2}(D_n + D_{n+1}) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $D_{n+1} < D_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Điều này chứng tỏ $\{D_n\}$ là dãy giảm các số thực không âm, do đó nó hội tụ. Ta đặt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = b \geq 0.$$

Xét trường hợp $b > 0$. Do tính compact của X nên dãy $\{a_n\}$ chứa một dãy con $\{a_{n_i}\}$ sao cho $a_{n_i} \rightarrow c \in X$ khi $i \rightarrow \infty$. Bởi T là liên tục, ta

có

$$0 < b = \lim_{i \rightarrow \infty} D_{n_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} D(a_{n_i}, Ta_{n_i}) = D(c, Tc).$$

Do $\frac{1}{K+1}D(c, Tc) < D(c, Tc)$ nên suy ra

$$D(Tc, T^2c) < \frac{1}{2}(D(c, Tc) + D(Tc, T^2c)).$$

Điều này chứng tỏ $D(Tc, T^2c) < D(c, Tc)$. Hơn nữa, ánh xạ T là liên tục nên ta có

$$\begin{aligned} 0 < b &= \lim_{i \rightarrow \infty} D_{n_i+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} D(a_{n_i+1}, a_{n_i+2}) = \lim_{i \rightarrow \infty} D(Ta_i, T^2a_i) \\ &= D(Tc, T^2c) < D(c, Tc) = b, \end{aligned}$$

điều này không xảy ra. Vậy $b = 0$. Nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_{n_0} = \bar{a}$ thì $a_n = \bar{a}$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó $T^n a \rightarrow \bar{a}$. Ta có thể giả sử rằng $a_n \neq \bar{a}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Bởi vì $0 = \frac{1}{K+1}D(\bar{a}, T\bar{a}) < D(\bar{a}, a_n)$ với mọi $n \geq 1$ nên ta có

$$\begin{aligned} D(\bar{a}, a_{n+1}) &= D(T\bar{a}, Ta_n) \\ &< \frac{1}{2}(D(\bar{a}, T\bar{a}) + D(a_n, Ta_n)) \\ &= \frac{1}{2}D(a_n, a_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}D_n \text{ với mọi } n \geq 1. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta suy ra $a_n = T^n a \rightarrow \bar{a}$. Vậy T là toán tử Picard. $\square$

Ví dụ 2.1.14. Cho $X = \{0, 1, 2\}$ và hàm $D : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= D(1, 1) = D(2, 2) = 0, \quad D(0, 1) = D(1, 0) = \frac{1}{2} \\ D(0, 2) &= D(2, 0) = 6, \quad D(1, 2) = D(2, 1) = 5. \end{aligned}$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi $T0 = 0, T1 = 0$ và $T2 = 1$. Dễ thấy $(X, D, K = 2)$ là không gian b -metric mạnh compact nhưng

không là metric compact vì $6 = D(2, 0) > D(2, 1) + D(1, 0) = \frac{11}{2}$. Do đó, Định lý 2.2 của Górnicki ([16]) không áp dụng được. Tuy nhiên, ta dễ dàng kiểm tra được T thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.1.13 và T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} = 0$. Hơn nữa, với mỗi $a \in X$ thì $T^n a = 0$ với mọi $n \geq 2$. Do đó T là toán tử Picard.

Hệ quả 2.1.15. Cho (X, ρ) là không gian metric compact và $T : X \rightarrow X$ là một ánh xạ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) < \frac{1}{2}(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb))$$

với mọi $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) < \rho(a, b)$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Hơn nữa, nếu T liên tục thì T là toán tử Picard.

Ví dụ 2.1.16. Cho $X = [-4, -3] \cup \{0\} \cup [3, 4]$, hàm $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ được định nghĩa bởi $\rho(a, b) = |a - b|$ với mọi $a, b \in X$. Ta dễ dàng thấy rằng (X, ρ) là không gian metric compact. Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ được định nghĩa bởi

$$Ta = \begin{cases} \frac{4a+9}{a+2}, & \text{nếu } a \in [-4, -3), \\ 0, & \text{nếu } a \in \{-3, 0, 3\}, \\ \frac{-4a+9}{a-2}, & \text{nếu } a \in (3, 4], \end{cases}$$

với $a \in X$. Ta có $Ta \in (3, 4]$ với mọi $a \in [-4, -3)$ và $Ta \in [-4, -3]$ với mọi $a \in (3, 4]$. Do đó, T là một ánh xạ đi từ X vào chính nó và thỏa mãn

- (1) T không liên tục tại $a = -3$ và $a = 3$.
- (2) Nếu $a < -3$ thì $Ta > 3$ và $|Ta| < |a|$.
- (3) Nếu $a > 3$ thì $Ta < -3$ và $|Ta| < |a|$.

Nếu $a, b \in [3, 4]$ thì

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho(a, Ta) &= \frac{1}{2}\left|a - \frac{-4a+9}{a-2}\right| \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^2 + 2a - 9}{a-2} \end{aligned}$$

$$> 1$$

$$\geq |a - b| = \rho(a, b).$$

Tương tự, nếu $a, b \in [-4, -3]$ thì $\frac{1}{2}\rho(a, Ta) \geq |a - b| = \rho(a, b)$.

Bây giờ, ta kiểm tra $\rho(Ta, Tb) < \frac{1}{2}(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb))$ là đúng nếu $(a, b) \in X \times X$ thỏa mãn một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a = 0$ và $b \neq 0$. Nếu $b \in \{-3, 3\}$ thì $Tb = 0$. Do đó,

$$\rho(T0, Tb) = 0 < \frac{1}{2}(\rho(0, T0) + \rho(b, Tb)) = \frac{3}{2}.$$

Nếu $b > 3$ hoặc $b < -3$ thì

$$\begin{aligned} \rho(T0, Tb) &= |Tb| < \frac{1}{2}(|b| + |Tb|) = \frac{1}{2}(|b - Tb|) \\ &= \frac{1}{2}(\rho(0, T0) + \rho(b, Tb)). \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\rho(T0, Tb) < \frac{1}{2}(\rho(0, T0) + \rho(b, Tb)) \text{ với mọi } b \neq 0,$$

và

$$\rho(Ta, T0) < \frac{1}{2}(\rho(a, Ta) + \rho(0, T0)) \text{ với mọi } a \neq 0.$$

Trường hợp 2: $a \leq -3$ và $b \geq 3$. Nếu $a = -3$ thì

$$\begin{aligned} \rho(T(-3), Tb) &= |Tb| < \frac{1}{2}(3 + |b - Tb|) \\ &= \frac{1}{2}(\rho(-3, T(-3)) + \rho(b, Tb)), \end{aligned}$$

với mọi $b \geq 3$. Nếu $b = 3$ thì

$$\rho(Ta, T3) = |Ta| < \frac{1}{2}(|a - Ta|) < \frac{1}{2}(\rho(a, Ta) + \rho(3, T3)),$$

với mọi $a \leq -3$. Nếu $a < -3$ và $b > 3$ thì

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)) &= \frac{1}{2}(Ta - a + b - Tb) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4a + 9}{a + 2} - a\right) + \frac{1}{2}\left(b + \frac{4b - 9}{b - 2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&> \frac{4a+9}{a+2} + \frac{4b-9}{b-2} \\
&= Ta - Tb = \rho(Ta, Tb).
\end{aligned}$$

Do đó T thỏa mãn tất cả các điều kiện trong Hệ quả 2.1.15 trừ tính liên tục của ánh xạ T . Dễ dàng thấy rằng T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} = 0$. Hơn nữa, nếu $a \notin \{-3, 0, 3\}$ thì dãy $\{T^n a\}$ không hội tụ đến $\bar{a} = 0$. Do đó T không là toán tử Picard.

Chứng minh hoàn toàn tương tự như chứng minh Định lý 2.1.13, ta thu được kết quả dưới đây.

Định lý 2.1.17. *Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh compact và ánh xạ $T : X \rightarrow X$ thỏa mãn*

$$D(Ta, Tb) < \frac{1}{3}(D(a, Ta) + D(b, Tb) + D(a, b))$$

với $a, b \in X$ sao cho $\frac{1}{K+1}D(a, Ta) < D(a, b)$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $\bar{a} \in X$. Hơn thế, nếu T là ánh xạ liên tục thì T là toán tử Picard.

2.2. Toán tử Picard yếu cho ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị

Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh. Kí hiệu $CB(X)$ là tập hợp tất cả các tập con khác rỗng, đóng và bị chặn của X . Hàm H xác định bởi

$$H(A, B) := \max\{\sup_{a \in B} d(a, A); \sup_{a \in A} d(a, B)\},$$

trong đó $A, B \in CB(X)$ và $d(a, A) := \inf_{b \in A} D(a, b)$ được gọi là *metric Hausdorff* trên $CB(X)$ cảm sinh bởi D .

Chứng minh tương tự như chứng minh Bổ đề 1.2.3, ta thu được.

Bổ đề 2.2.1. Giả sử rằng (X, D, K) là không gian b -metric mạnh và $A, B \in CB(X)$. Nếu $H(A, B) > 0$ thì với mỗi $h > 1$ và $a \in A$ tồn tại $b \in B$ sao cho

$$D(a, b) < h \cdot H(A, B).$$

Định lý 2.2.2. Cho (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ và $T : X \rightarrow CB(X)$ là ánh xạ Kannan-Suzuki đa trị. Khi đó T là toán tử Picard yếu đa trị.

Chứng minh. Lấy $a_0 \in X$ và ta chọn $a_1 \in Ta_0$.

Bước 1. Nếu $H(Ta_0, Ta_1) = 0$ thì $Ta_0 = Ta_1$. Điều đó chứng tỏ a_1 là điểm bất động của T . Nếu $H(Ta_0, Ta_1) > 0$ thì theo Bổ đề 2.2.1, với mỗi $h_1 > 1$, tồn tại $a_2 \in Ta_1$ thỏa mãn

$$D(a_1, a_2) < h_1 H(Ta_0, Ta_1).$$

Bước 2. Nếu $H(Ta_1, Ta_2) = 0$ thì $Ta_1 = Ta_2$. Chứng tỏ a_2 là điểm bất động của T . Nếu $H(Ta_1, Ta_2) > 0$, sử dụng một lần nữa Bổ đề 2.2.1, với mỗi $h_2 > 1$, tồn tại $a_3 \in Ta_2$ thỏa mãn

$$D(a_2, a_3) < h_2 H(Ta_1, Ta_2).$$

·
·
·

Bước n. Cứ tiếp tục quá trình trên, nếu $H(Ta_{n-1}, Ta_n) = 0$ thì ta có $Ta_{n-1} = Ta_n$, suy ra a_n là điểm bất động của T . Nếu $H(Ta_{n-1}, Ta_n) > 0$, theo Bổ đề 2.2.1 với mỗi $h_n > 1$, tồn tại $a_{n+1} \in Ta_n$ thỏa mãn

$$D(a_n, a_{n+1}) < h_n H(Ta_{n-1}, Ta_n).$$

Quá trình trên cứ thế tiếp diễn, nếu tại bước thứ k mà $H(Ta_{k-1}, Ta_k) = 0$ thì a_k là một điểm bất động và dãy lặp $\{T^n a\}$ hội tụ về a_k . Nếu không,

ta thu được hai dãy $\{a_n\}$ và $\{h_n\}_{n \geq 1}$ thỏa mãn $a_n \in Ta_{n-1}$, $h_n > 1$ và

$$D(a_n, a_{n+1}) < h_n H(Ta_{n-1}, Ta_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.1)$$

Từ

$$\frac{1}{K+1} d(a_{n-1}, Ta_{n-1}) \leq \frac{1}{K+1} D(a_{n-1}, a_n) \leq D(a_{n-1}, a_n),$$

với mọi $n \geq 1$, nên theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} H(Ta_{n-1}, Ta_n) &\leq s(d(a_{n-1}, Ta_{n-1}) + d(a_n, Ta_n)) \\ &\leq s(D(a_{n-1}, a_n) + D(a_n, a_{n+1})) \text{ với } n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Kết hợp (2.2.1) và (2.2.2), ta có

$$D(a_n, a_{n+1}) < h_n s(D(a_{n-1}, a_n) + D(a_n, a_{n+1})), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ta có thể chọn $h_n = \frac{k}{s} > 1$ với $s \in (0, k)$ và $0 < k < \frac{1}{2}$. Khi đó, ta thu được

$$D_n < \frac{k}{1-k} D_{n-1}, \text{ ở đây } \frac{k}{1-k} < 1 \text{ và } D_n = D(a_n, a_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Từ đó suy ra

$$D_n < \left(\frac{k}{1-k}\right)^n D_0, \text{ với } n \geq 1.$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \leq D_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{1-k}\right)^n < +\infty.$$

Theo Mệnh đề 2.1.3, $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Bởi X đầy đủ nên tồn tại $\bar{a} \in X$ thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a}$. Tiếp theo, ta chỉ ra rằng với mọi $n \geq 0$, hoặc là

$$\frac{1}{K+1} d(a_n, Ta_n) \leq D(a_n, \bar{a}) \text{ hoặc } \frac{1}{K+1} d(a_{n+1}, Ta_{n+1}) \leq D(a_{n+1}, \bar{a}). \quad (2.2.3)$$

Bằng phản chứng, giả sử rằng tồn tại số tự nhiên $n \geq 0$, sao cho

$$D(a_n, \bar{a}) < \frac{1}{K+1} d(a_n, Ta_n) \text{ và } D(a_{n+1}, \bar{a}) < \frac{1}{K+1} d(a_{n+1}, Ta_{n+1}).$$

Khi đó, theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned}
D_n = D(a_n, a_{n+1}) &\leq D(a_n, \bar{a}) + KD(a_{n+1}, \bar{a}) \\
&< \frac{1}{K+1}d(a_n, Ta_n) + \frac{K}{K+1}d(a_{n+1}, Ta_{n+1}) \\
&\leq \frac{1}{K+1}D(a_n, a_{n+1}) + \frac{K}{K+1}D(a_{n+1}, a_{n+2}) \\
&\leq D_n.
\end{aligned}$$

Điều này không xảy ra. Do đó, từ (2.2.3) và giả thiết, với mỗi $n \geq 0$, hoặc là

$$H(Ta_n, T\bar{a}) \leq s(d(a_n, Ta_n) + d(\bar{a}, T\bar{a})), \quad (2.2.4)$$

hoặc

$$H(Ta_{n+1}, T\bar{a}) \leq s(d(a_{n+1}, Ta_{n+1}) + d(\bar{a}, T\bar{a})). \quad (2.2.5)$$

Khi đó, hoặc là (2.2.4) đúng với vô hạn số tự nhiên n , hoặc (2.2.5) đúng với vô hạn số tự nhiên n . Giả sử (2.2.4) đúng với vô hạn số tự nhiên n , ta có thể chọn trong tập vô hạn đó dãy $\{n_k\}$ đơn điệu tăng ngặt. Từ đó suy ra dãy $\{a_{n_k}\}$ là dãy con của dãy $\{a_n\}$ và với mỗi $k \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
d(\bar{a}, T\bar{a}) &= \inf_{b \in T\bar{a}} D(\bar{a}, b) \leq KD(a_{n_k+1}, \bar{a}) + \inf_{b \in T\bar{a}} (a_{n_k+1}, b) \\
&= KD(a_{n_k+1}, \bar{a}) + d(a_{n_k+1}, T\bar{a}) \\
&\leq KD(a_{n_k+1}, \bar{a}) + H(Ta_{n_k}, T\bar{a}) \\
&\leq KD(a_{n_k+1}, \bar{a}) + s(d(a_{n_k}, Ta_{n_k}) + d(\bar{a}, T\bar{a})).
\end{aligned}$$

Điều này tương đương với

$$d(\bar{a}, T\bar{a}) \leq \frac{K}{1-s}D(a_{n_k}, \bar{a}) + \frac{s}{1-s}d(a_{n_k}, Ta_{n_k}) \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Lấy giới hạn hai vế của bất đẳng thức trên khi $k \rightarrow \infty$, ta thu được $d(\bar{a}, T\bar{a}) = 0$. Điều này kéo theo $\bar{a} \in T\bar{a}$. Nếu (2.2.5) đúng với vô hạn số tự nhiên n , chứng minh một cách hoàn toàn tương tự như trên ta suy ra $\bar{a}$ là điểm bất động của ánh xạ T . Vậy T là toán tử Picard yếu đa trị. $\square$

Ví dụ 2.2.3. Giả sử $X = \{1, 2, 3\}$, $K = 3$ và $D : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ được định nghĩa bởi

$$D(1, 2) = 1, D(1, 3) = 4, D(2, 3) = 2 \text{ và } D(1, 1) = D(2, 2) = D(3, 3) = 0.$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow CB(X)$ được xác định bởi

$$T1 = \{2\}, T2 = \{2\}, T3 = \{1, 2\}.$$

Khi đó (X, D, K) là không gian b -metric mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric bởi vì $D(1, 3) > D(1, 2) + D(2, 3)$. Do đó, Định lý 7 không áp dụng được. Mặt khác, ta có

$$H(T1, T2) = H(\{2\}, \{2\}) = D(2, 2) = 0,$$

$$H(T2, T3) = H(\{2\}, \{1, 2\}) = D(2, 2) = 0,$$

$$H(T1, T3) = H(\{2\}, \{1, 2\}) = D(2, 2) = 0.$$

Dễ dàng kiểm tra được T thỏa mãn tất cả các điều kiện của Định lý 2.2.2 và T là toán tử Picard yếu đa trị.

2.3. Kết luận chương 2

Chương 2 của luận án đạt được các kết quả sau:

- Thiết lập Định lý 2.1.4, Định lý 2.1.6 là các mở rộng thực sự của Định lý 4 và Định lý 5.
- Thiết lập Định lý 2.1.8, Hệ quả 2.1.9, Định lý 2.1.11 là các điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trong không gian b -metric mạnh đầy đủ.
- Thiết lập Định lý 2.1.13 là các điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trong không gian b -metric mạnh compact. Kết quả này là mở rộng kết quả của J. Górnicki [16].
- Thiết lập Định lý 2.2.2 là điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu đa trị trong không gian b -metric mạnh đầy đủ. Kết quả của chúng tôi là mở rộng kết quả của L. S. Dube và S. P. Singh [10].

Chương 3

Toán tử Picard và bổ sung đủ đối với không gian b -TVS metric nón mạnh

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu không gian b -TVS metric nón mạnh. Sau đó, chúng tôi mở rộng kết quả của Sh. Rezapour và R. Hambarani [41] trong không gian này. Phần cuối chương, dành để thiết lập Nguyên lý bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh. Nội dung chính của chương được viết dựa trên các bài báo [A3] và [A5] trong danh mục các công trình liên quan đến luận án.

3.1. Tính chất lân cận của nón

Định nghĩa 3.1.1. [21] Cho E là không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực, θ là vectơ gốc của E và $C \subset E$. Ta nói, tập C là nón của E nếu:

- (i) C là tập đóng, khác rỗng, $C \neq \{\theta\}$;
- (ii) $ax + by \in C$ với mọi $x, y \in C$, a, b là các số thực không âm;
- (iii) $C \cap (-C) = \{\theta\}$.

Định nghĩa 3.1.2. [21] Cho E là không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực và nón $C \subset E$ với phần trong khác rỗng. Ta định nghĩa quan hệ thứ tự bộ phận $\preceq$ trên E sinh bởi nón C như sau

$$x, y \in E : x \preceq y \text{ nếu } y - x \in C.$$

Nếu $x \preceq y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x \prec y$. Nếu $y - x \in \text{int } C$ thì ta viết $x \ll y$.

Trong các phần tiếp theo, ta luôn giả sử E là không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực và $\preceq$ là quan hệ thứ tự bộ phận trên E sinh bởi nón C có phần trong khác rỗng. Từ định nghĩa của nón C và quan hệ thứ tự bộ phận trên E , ta dễ dàng chứng minh được một số tính chất sau.

Mệnh đề 3.1.3. *Cho C là một nón trong E . Khi đó*

- (i) $C + C = C$;
- (ii) $\text{int } C + C = \text{int } C$;
- (iii) $\text{int } C + \text{int } C = \text{int } C$;
- (iv) Với mọi $a \in \text{int } C$ và $\beta > 0$ thì $\beta a \in \text{int } C$.

Mệnh đề 3.1.4. *Cho C là một nón trong E . Khi đó*

- (i) Nếu $a \preceq b$ và $c \preceq d$ thì $a + c \preceq b + d$ với mọi $a, b, c, d \in E$;
- (ii) Nếu $a \preceq b$ và $c \ll d$ thì $a + c \ll b + d$ với mọi $a, b, c, d \in E$;
- (iii) Nếu $a \ll b$ và $c \ll d$ thì $a + c \ll b + d$ với mọi $a, b, c, d \in E$;
- (iv) Nếu $a \preceq \lambda a, a \in C$ và $0 \leq \lambda < 1$ thì $a = \theta$.

Mệnh đề 3.1.5. *Cho C là một nón trong E . Khi đó*

- (i) Nếu $a \preceq b$ và $b \ll c$ thì $a \ll c$ với mọi $a, b, c \in E$;
- (ii) Nếu $a \ll b$ và $b \preceq c$ thì $a \ll c$ với mọi $a, b, c \in E$;
- (iii) Nếu $a \ll b$ và $b \ll c$ thì $a \ll b$ với mọi $a, b, c \in E$.

Mệnh đề 3.1.6. [1] Giả sử $e \in \text{int } C, \theta \preceq a_n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \theta$. Khi đó, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $a_n \ll e$ với mọi $n > N$.

Định nghĩa 3.1.7. [25] Cho C là một nón trong E . Ta nói rằng nón C thỏa mãn tính chất lân cận nếu với mỗi lân cận U của θ trong E có một lân cận V của θ trong E sao cho

$$(V + C) \cap (V - C) \subset U.$$

Định nghĩa 3.1.8. [25] Cho C là một nón trong E . Ta nói rằng $B \subseteq E$ là tập sinh của nón C và viết $C = \text{cone}(B)$ nếu

$$C = \{tb : b \in B, t \geq 0\}.$$

Nếu B không chứa điểm gốc θ và mỗi $c \in C \setminus \{\theta\}$ đều tồn tại duy nhất $b \in B, t > 0$ sao cho $c = tb$ thì B được gọi là cơ sở của nón C .

Nhận xét 3.1.9. Nếu nón C có một cơ sở lồi, đóng và bị chặn thì nón C thỏa mãn tính chất lân cận (xem Mệnh đề 1.8 trong [25]).

Ví dụ 3.1.10. Cho $E = \mathbb{R}, C = \mathbb{R}_+$. Khi đó C thỏa mãn tính chất lân cận.

Mệnh đề 3.1.11. Giả sử rằng nón C thỏa mãn tính chất lân cận. Khi đó với mỗi lân cận U của θ trong E , tồn tại phần tử $e \in E, \theta \ll e$ sao cho

$$C \cap (e - C) \subset U.$$

Chứng minh. Do C thỏa mãn tính chất lân cận nên theo Định nghĩa 3.1.7 tồn tại một lân cận V của θ trong E sao cho

$$(V + C) \cap (V - C) \subset U.$$

Vì $\text{int } C \neq \emptyset$ nên ta có thể chọn $a \in E, \theta \ll a$. Từ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}a = \theta$ suy ra tồn tại số n_0 sao cho

$$\frac{1}{n}a \in V \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Đặt $e = \frac{1}{n_0}a$. Khi đó $e \in E, \theta \ll e$ và

$$C \cap (e - C) \subset (V + C) \cap (V - C) \subset U.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Bổ đề 3.1.12. Giả sử nón C thỏa mãn tính chất lân cận trong không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực E . Cho $\{u_n\}, \{v_n\}, \{a_n\}$ là các dãy trong E sao cho $a_n \preceq u_n \preceq v_n$ với mọi $n \geq 1$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \theta.$$

Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \theta$.

Chứng minh. Giả sử U là một lân cận bất kỳ của θ trong E . Vì nón C thỏa mãn tính chất lân cận nên tồn tại một lân cận V của θ trong E sao cho

$$(V + C) \cap (V - C) \subset U.$$

Do $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \theta$ nên tồn tại n_0 sao cho $v_n, a_n \in V$ với mọi $n \geq n_0$. Mặt khác, vì $a_n \preceq u_n \preceq v_n$ với mọi $n \geq 1$ nên ta có

$$u_n \in (a_n + C) \cap (v_n - C)$$

với mọi $n \geq 1$. Điều đó chứng tỏ $u_n \in (V + C) \cap (V - C)$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó, $u_n \in U$ với mọi $n \geq n_0$. Vì vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \theta$. $\square$

Ví dụ 3.1.13. Giả sử $E = C_{[0,1]}^1$ với chuẩn

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

và nón $C = \{f \in E : f(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]\}$. Khi đó nón C không thỏa mãn tính chất lân cận. Thật vậy, xét $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$ và $g_n(t) = \frac{1}{n}$ với mọi $t \in [0, 1]$. Khi đó $\theta \preceq f_n \preceq g_n$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \theta$. Mặt khác, ta có

$$\|f_n\| = \max_{t \in [0,1]} \frac{t^n}{n} + \max_{t \in [0,1]} t^{n-1} = 1 + \frac{1}{n} > 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Do đó f_n không hội tụ đến θ . Theo Bổ đề 3.1.12, suy ra nón C không có tính chất lân cận.

3.2. Không gian b -TVS metric nón mạnh

Định nghĩa 3.2.1. Cho X là một tập khác rỗng và $K \geq 1$. Ánh xạ $\rho : X \times X \rightarrow E$ được gọi là một b -TVS metric nón mạnh trên X nếu

$$(d1) \theta \preceq \rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X$$

và $\rho(a, b) = \theta$ nếu và chỉ nếu $a = b$;

$$(d2) \rho(a, b) = \rho(b, a) \text{ với mọi } a, b \in X;$$

$$(d3) \rho(a, b) \preceq \rho(a, c) + K\rho(c, b) \text{ với mọi } a, b, c \in X.$$

Khi đó (X, E, C, K, ρ) được gọi là một không gian b -TVS metric nón mạnh.

Định nghĩa 3.2.2. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh và $\{a_n\}$ là một dãy các phần tử của X . Ta nói rằng

(i) a là giới hạn của dãy $\{a_n\}$ nếu với mọi $e \in E$, $\theta \ll e$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\rho(a_n, a) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Kí hiệu là $a_n \rightarrow a$ hoặc $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(ii) $\{a_n\}$ là dãy Cauchy nếu với mọi $e \in E$, $\theta \ll e$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\rho(a_n, a_m) \ll e$ với mọi $n, m \geq n_0$.

(iii) Nếu mọi dãy Cauchy là hội tụ trong X thì (X, E, C, K, ρ) được gọi là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ.

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh một số tính chất trong không gian b -TVS metric nón mạnh với thứ tự sinh bởi nón C trong không gian vectơ tôpô lồi địa phương Hausdorff thực E .

Bổ đề 3.2.3. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh và $\{a_n\}$ là một dãy các phần tử của X . Khi đó, ta có:

(i) Nếu $\{a_n\}$ hội tụ đến $a \in X$ thì $\{a_n\}$ là dãy Cauchy.

(ii) Nếu $\{a_n\}$ hội tụ đến $a \in X$ và $\{a_n\}$ hội tụ đến $b \in X$ thì $a = b$.

Chứng minh. (i) Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$. Khi đó, với mỗi $e \in E, \theta \ll e$

tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\rho(a_n, a) \ll \frac{e}{2} \text{ và } \rho(a_m, a) \ll \frac{e}{2K} \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Khi đó, ta có

$$\rho(a_n, a_m) \preceq \rho(a_n, a) + K\rho(a_m, a) \ll e \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Vậy $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy.

(ii) Giả sử $e \in E, \theta \ll e$. Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ nên với mỗi $k \geq 1$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\rho(a_n, a) \ll \frac{e}{2k} \text{ và } \rho(a_n, b) \ll \frac{e}{2kK} \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Khi đó,

$$\rho(a, b) \preceq \rho(a_n, a) + K\rho(a_n, b) \ll \frac{e}{k} \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Điều đó chứng tỏ

$$\frac{e}{k} - \rho(a, b) \in C \text{ với mọi } k \geq 1.$$

Cho $k \rightarrow \infty$ và do C đóng nên ta có $-\rho(a, b) \in C$. Vậy $\rho(a, b) = \theta$ hay $a = b$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 3.2.4. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh, nón C thỏa mãn tính chất lân cận và $\{a_n\}, \{b_n\}$ là hai dãy trong X . Khi đó

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$ nếu và chỉ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, a) = \theta$.
- (ii) $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy nếu và chỉ nếu $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = \theta$.
- (iii) Nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in X$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) = \rho(a, b).$$

Chứng minh. (i) Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$. Với U là một lân cận tùy ý của θ trong E . Do C có tính chất lân cận nên theo Mệnh đề 3.1.11, tồn tại $e \in E, \theta \ll e$ sao cho

$$C \cap (e - C) \subset U.$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\rho(a_n, a) \ll e \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Từ đó suy ra

$$\rho(a_n, a) \in e - \text{int } C \subset e - C \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Do đó

$$\rho(a_n, a) \in C \cap (e - C) \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Vậy $\rho(a_n, a) \in U$ với mọi $n \geq n_0$. Từ đó suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, a) = \theta$.

Ngược lại, giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, a) = \theta$. Với mọi $e \in E, \theta \ll e$, khi đó tồn tại một lân cận U của θ trong E sao cho

$$e - U \subset \text{int } C.$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, a) = \theta$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\rho(a_n, a) \in U \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Điều này chứng tỏ

$$e - \rho(a_n, a) \in \text{int } C \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Từ đó suy ra $\rho(a_n, a) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(ii) Giả sử $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy. Cho U là một lân cận của θ trong E . Từ Mệnh đề 3.1.11, tồn tại $e \in E, \theta \ll e$ sao cho

$$C \cap (e - C) \subset U.$$

Vì $\{a_n\}$ là dãy Cauchy nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\rho(a_n, a_m) \ll e \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Kéo theo

$$\rho(a_n, a_m) \in e - \text{int } C \subset e - C \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Do đó

$$\rho(a_n, a_m) \in C \cap (e - C) \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Vậy $\rho(a_n, a_m) \in U$ với mọi $n, m \geq n_0$. Nghĩa là $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = \theta$.

Ngược lại, giả sử $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = \theta$. Với $e \in E, \theta \ll e$. Khi đó, tồn tại một lân cận U của θ trong E sao cho

$$e - U \subset \text{int } C.$$

Từ $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = \theta$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\rho(a_n, a_m) \in U \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Kéo theo

$$e - \rho(a_n, a_m) \in \text{int } C \text{ với mọi } n, m \geq n_0.$$

Điều đó chứng tỏ $\rho(a_n, a_m) \ll e$ với mọi $n, m \geq n_0$. Do đó $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy.

(iii) Ta có,

$$\rho(a_n, b_n) \preceq K\rho(a_n, a) + \rho(a, b) + K\rho(b_n, b),$$

$$\rho(a, b) \preceq K\rho(a_n, a) + \rho(a_n, b_n) + K\rho(b_n, b) \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Kéo theo

$$-K(\rho(a_n, a) + \rho(b_n, b)) \preceq \rho(a, b) - \rho(a_n, b_n) \preceq K(\rho(a_n, a) + \rho(b_n, b))$$

với mọi $n \geq 1$. Từ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho(a_n, a) + \rho(b_n, b)) = \theta$ và bởi Bổ đề 3.1.12, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho(a, b) - \rho(a_n, b_n)) = \theta.$$

Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) = \rho(a, b)$. □

Nhận xét 3.2.5. Chú ý rằng trong [21], Bổ đề 3.2.4 được chứng minh dưới điều kiện C là nón chuẩn tắc trong không gian Banach, ở đây chúng tôi giả thiết C là nón thỏa mãn tính chất lân cận trong không gian lồi địa phương Hausdorff thực. Ví dụ sau cho thấy Bổ đề 3.2.4 không còn đúng nếu nón C không có tính chất lân cận trong E .

Ví dụ 3.2.6. Giả sử $E = C_{[0,1]}^1$ với chuẩn

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Xét nón $C = \{f \in E : f(t) \geq 0 \text{ với mọi } t \in [0, 1]\}$. Khi đó nón C không có tính chất lân cận (xem Ví dụ 3.1.13).

Giả sử $X = \{0, \frac{1}{n} : n \geq 1\}$ và $\rho : X \times X \rightarrow E$ được xác định bởi

$$\rho(a, b) = \begin{cases} \theta, & \text{nếu } a = b, \\ |f_n - f_m|, & \text{nếu } a \neq b \in \{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}, \\ f_n, & \text{nếu } a \neq b \in \{\frac{1}{n}, 0\}, \end{cases}$$

ở đây $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$ với mọi $t \in [0, 1]$ và $n \geq 1$.

Dễ dàng kiểm tra được d là b -TVS metric nón mạnh trên X với $K = 1$ và $(X, E, C, K = 1, \rho)$ là không gian b -TVS metric nón mạnh. Hơn nữa, ta có

$$\rho\left(\frac{1}{n}, 0\right) = f_n \preceq \frac{I_E}{n} \text{ với mọi } n \geq 1,$$

ở đây $I_E \in E$ bởi $I_E(t) = t$ với $t \in [0, 1]$. Từ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_E}{n} = \theta$, theo Mệnh đề 3.1.6, với mọi $e \in E, \theta \ll e$, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$\frac{I_E}{n} \ll e \text{ với mọi } n \geq n_0.$$

Vì vậy, $\rho(\frac{1}{n}, 0) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Mặt khác, ta có

$$\|\rho(\frac{1}{n}, 0) - \theta\| = \|f_n - \theta\| = \max_{t \in [0,1]} \frac{t^n}{n} + \max_{t \in [0,1]} t^{n-1} = 1 + \frac{1}{n} > 1 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Do đó $\rho(\frac{1}{n}, 0)$ không hội tụ đến θ trong E . Vậy Bổ đề 3.2.4(i) không còn đúng.

3.3. Toán tử Picard trong không gian b -TVS metric nón mạnh

Định lý 3.3.1. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại $s \in [0, 1)$ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) \preceq s\rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Chứng minh. Chọn $a_0 \in X$, ta định nghĩa dãy $\{a_n\}$ trong X bởi công thức $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Đặt $\rho_n = \rho(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$. Theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} \rho_{n+1} &= \rho(a_{n+1}, a_{n+2}) = \rho(Ta_n, Ta_{n+1}) \\ &\preceq s\rho(a_n, a_{n+1}) = s\rho_n, \end{aligned}$$

với mọi $n \geq 0$. Suy ra

$$\rho_{n+1} \preceq s\rho_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Điều đó kéo theo

$$\rho_n \preceq s^n \rho_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Với $m > n$, ta có

$$\begin{aligned} \rho(a_n, a_m) &\preceq K\rho(a_n, a_{n+1}) + \dots + K\rho(a_{m-2}, a_{m-1}) + \rho(a_{m-1}, a_m) \\ &= K\rho_n + K\rho_{n+1} + \dots + K\rho_{m-2} + \rho_{m-1} \\ &\preceq K(s^n \rho_0 + s^{n+1} \rho_0 + \dots + s^{m-2} \rho_0) + s^{m-1} \rho_0 \\ &= K(1 + s + s^2 + \dots + s^{m-n-2})s^n \rho_0 + s^{m-1} \rho_0 \\ &\preceq \frac{K}{1-s} s^n \rho_0 + s^{m-1} \rho_0. \end{aligned}$$

Đặt $A_{(n,m)} := \frac{K}{1-s} s^n \rho_0 + s^{m-1} \rho_0$ với $m, n \geq 1$. Khi đó

$$A_{(n,m)} - \rho(a_n, a_m) \in C \text{ với } m, n \geq 1.$$

Với $e \in E, \theta \ll e$ tùy ý, khi đó tồn tại lân cận U của θ trong E sao cho $e - U \subset \text{int } C$. Vì $\lim_{m,n \rightarrow \infty} A_{(n,m)} = \theta$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$A_{(n,m)} \in U \text{ với mọi } m, n \geq n_0.$$

Điều này kéo theo

$$e - A_{(n,m)} \in e - U \subset \text{int } C \text{ với mọi } m, n \geq n_0.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} e - \rho(a_n, a_m) &= (e - A_{(n,m)}) + (A_{(n,m)} - \rho(a_n, a_m)) \\ &\in \text{int } C + C = \text{int } C \text{ với mọi } m, n \geq n_0. \end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ

$$\rho(a_n, a_m) \ll e \text{ với mọi } m, n \geq n_0.$$

Suy ra $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Vì X đầy đủ nên tồn tại $\bar{a} \in X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a}$. Tiếp theo ta chỉ ra rằng $\bar{a}$ là điểm bất động của T .

Thật vậy, vì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a}$ nên với mỗi $k \geq 1$, tồn tại số tự nhiên n_k sao cho

$$\rho(a_n, \bar{a}) \ll \frac{e}{2ks} \text{ và } \rho(a_{n+1}, \bar{a}) \ll \frac{e}{2kK},$$

với mọi $n \geq n_k$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \rho(T\bar{a}, \bar{a}) &\preceq \rho(T\bar{a}, Ta_n) + K\rho(Ta_n, \bar{a}) \\ &\preceq s\rho(\bar{a}, a_n) + K\rho(a_{n+1}, \bar{a}) \ll \frac{e}{k}, \end{aligned}$$

với mọi $n \geq n_k$. Do đó $\frac{e}{k} - \rho(T\bar{a}, \bar{a}) \in C$ với mọi $k \geq 1$. Mặt khác, do $\frac{e}{k} \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$ và C đóng nên ta có $-\rho(T\bar{a}, \bar{a}) \in C$. Điều này chứng tỏ $\rho(T\bar{a}, \bar{a}) = \theta$ hay $T\bar{a} = \bar{a}$. Vì vậy, $\bar{a}$ là điểm bất động của T .

Giả sử $\bar{b}$ cũng là điểm bất động của T . Khi đó, ta có

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \rho(T\bar{a}, T\bar{b}) \preceq s\rho(\bar{a}, \bar{b}).$$

Từ đó suy ra $\bar{a} = \bar{b}$. Vậy T có điểm bất động duy nhất. Do đó, T là toán tử Picard. $\square$

Ví dụ 3.3.2. Cho $X = \{0, 1, 2\}$, $E = \mathbb{R}^2$ và

$$C = \{(a, b) \in E : a \geq 0, b \geq 0\}.$$

Hàm $d : X \times X \rightarrow E$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, a) = \theta \text{ với } a \in X, \quad \rho(a, b) = \rho(b, a) \text{ với mọi } a, b \in X$$

và

$$\rho(0, 1) = (4, 4), \quad \rho(0, 2) = \rho(1, 2) = (1, 1).$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ xác định bởi $T1 = T2 = T0 = 0$. Rõ ràng $(X, E, C, K = 3, \rho)$ là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric nón vì

$$\rho(0, 2) + \rho(2, 1) = (2, 2) \preceq (4, 4) = \rho(0, 1).$$

Do đó, Định lý 2.3 trong [41] không áp dụng được. Tuy nhiên, dễ dàng kiểm tra được tất cả các giả thiết của Định lý 3.3.1 thỏa mãn và T là toán tử Picard.

Định lý 3.3.3. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ và ánh xạ $T : X \rightarrow X$. Giả sử tồn tại $s \in [0, \frac{1}{2})$ thỏa mãn

$$\rho(Ta, Tb) \preceq s(\rho(a, Ta) + \rho(b, Tb)) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Khi đó, T là toán tử Picard.

Chứng minh. Lấy $a_0 \in X$, ta xây dựng dãy lặp $\{a_n\}$ trong X bởi công thức $a_{n+1} = Ta_n$ với mọi $n \geq 0$. Đặt $\rho_n = \rho(a_n, a_{n+1})$ với mọi $n \geq 0$. Theo giả thiết, với mọi $n \geq 0$ ta có

$$\rho_{n+1} = \rho(a_{n+1}, a_{n+2}) = \rho(Ta_n, Ta_{n+1})$$

$$\begin{aligned}
&\preceq s(\rho(a_n, Ta_n) + \rho(a_{n+1}, Ta_{n+1})) \\
&= s(\rho(a_n, a_{n+1}) + \rho(a_{n+1}, a_{n+2})) = s(\rho_n + \rho_{n+1}).
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\rho_{n+1} \preceq \frac{s}{1-s} \rho_n = h \rho_n \text{ với } n \geq 0, \text{ ở đây } h = \frac{s}{1-s} \in [0, 1).$$

Điều đó chứng tỏ rằng

$$\rho_n \preceq h^n \rho_0 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Với $m, n \geq 1$, ta có

$$\begin{aligned}
\rho(a_m, a_n) &= \rho(Ta_{m-1}, Ta_{n-1}) \\
&\preceq s(\rho(a_{m-1}, Ta_{m-1}) + \rho(a_{n-1}, Ta_{n-1})) \\
&= s(\rho(a_{m-1}, a_m) + \rho(a_{n-1}, a_n)) \\
&\preceq s(\rho_{m-1} + \rho_{n-1}).
\end{aligned}$$

Đặt $B_{(m,n)} := s(\rho_{m-1} + \rho_{n-1})$ với $m, n \geq 1$. Khi đó

$$B_{(m,n)} - \rho(a_m, a_n) \in C \text{ với mọi } m, n \geq 1.$$

Với $e \in E, \theta \ll e$ tùy ý, khi đó tồn tại lân cận U của θ trong E sao cho $e - U \subset \text{int } C$. Vì $\lim_{m,n \rightarrow \infty} B_{(n,m)} = \theta$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$B_{(n,m)} \in U \text{ với mọi } m, n \geq n_0.$$

Điều này kéo theo

$$e - B_{(n,m)} \in e - U \subset \text{int } C \text{ với mọi } m, n \geq n_0.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
e - \rho(a_n, a_m) &= (e - B_{(m,n)}) + (B_{(m,n)} - \rho(a_m, a_n)) \\
&\in \text{int } C + C = \text{int } C \text{ với mọi } m, n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ

$$\rho(a_m, a_n) \ll e \text{ với mọi } m, n \geq n_0.$$

Suy ra $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Vì X đầy đủ nên tồn tại $\bar{a} \in X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a}$.

Tiếp theo ta chỉ ra rằng $\bar{a}$ là điểm bất động của T . Thật vậy, vì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \bar{a}$ nên với mỗi $k \geq 1$, tồn tại số dương n_k sao cho

$$\rho(a_n, a_{n+1}) \ll \frac{e(1-s)}{2ks} \text{ và } \rho(a_{n+1}, \bar{a}) \ll \frac{e(1-s)}{2kK},$$

với mọi $n \geq n_k$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \rho(T\bar{a}, \bar{a}) &\leq \rho(T\bar{a}, Ta_n) + K\rho(Ta_n, \bar{a}) \\ &\leq s(\rho(\bar{a}, T\bar{a}) + \rho(a_n, Ta_n)) + K\rho(Ta_n, \bar{a}), \end{aligned}$$

với mọi $n \geq 0$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \rho(T\bar{a}, \bar{a}) &\leq \frac{1}{1-s} (s\rho(a_n, a_{n+1}) + K\rho(a_{n+1}, \bar{a})) \\ &\leq \frac{e}{2k} + \frac{e}{2k} = \frac{e}{k}, \end{aligned}$$

với mọi $n \geq n_k$. Do đó, $\frac{e}{k} - \rho(T\bar{a}, \bar{a}) \in C$ với mọi $k \geq 1$. Mặt khác, do $\frac{e}{k} \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$ và C đóng nên ta có $-\rho(T\bar{a}, \bar{a}) \in C$. Điều này chứng tỏ $\rho(T\bar{a}, \bar{a}) = \theta$ hay $T\bar{a} = \bar{a}$. Vì vậy, $\bar{a}$ là điểm bất động của T .

Giả sử $\bar{b}$ cũng là điểm bất động của T . Khi đó, ta có

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \rho(T\bar{a}, T\bar{b}) \leq s(\rho(\bar{a}, T\bar{a}) + \rho(\bar{b}, T\bar{b})) = \theta.$$

Điều này kéo theo $\bar{a} = \bar{b}$. Vậy T là toán tử Picard. □

Ví dụ 3.3.4. Cho $X = \{0, 2, 3\}$, $E = \mathbb{R}^2$ và

$$C = \{(a, b) \in E : a \geq 0, b \geq 0\}.$$

Hàm $d : X \times X \rightarrow E$ được định nghĩa bởi

$$\rho(a, a) = \theta = (0, 0) \text{ với } a \in X,$$

$$\rho(3, 0) = \rho(0, 3) = (3, 3), \quad \rho(2, 0) = \rho(0, 2) = \rho(2, 3) = \rho(3, 2) = (1, 1).$$

Xét ánh xạ $T : X \rightarrow X$ xác định bởi $T0 = T2 = T3 = 0$. Rõ ràng $(X, E, C, K = 2, \rho)$ là không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric nón vì

$$\rho(0, 2) + \rho(2, 3) = (2, 2) \preceq (3, 3) = \rho(0, 3).$$

Do đó, Định lý 2.6 trong [41] không áp dụng được. Tuy nhiên, dễ dàng kiểm tra được tất cả các giả thiết của Định lý 3.3.3 thỏa mãn và T là toán tử Picard.

3.4. Bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh

Định nghĩa 3.4.1. Cho (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh. Với $a_0 \in X$ và $e \in E, \theta \ll e$, tập con

$$B(a_0, e) := \{a \in X : \rho(a_0, a) \ll e\}$$

của X được gọi là hình cầu mở tâm a_0 bán kính e . Ta nói rằng:

(i) Một tập $A \subset X$ là mở nếu với mỗi $a \in A$, tồn tại $e_a \in E, \theta \ll e_a$ sao cho $B(a, e_a) \subset A$. Một tập $B \subset X$ là đóng nếu phần bù của nó là tập mở.

(ii) Giao của tất cả các tập đóng chứa A là bao đóng của A , kí hiệu là $\bar{A}$. Tập A được gọi là trù mật trong X nếu $\bar{A} = X$.

Nhận xét 3.4.2. Nếu (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh. Khi đó các khẳng định sau đây là đúng:

- (i) Tập $\emptyset$ và cả không gian X là các tập mở và cũng là các tập đóng.
- (ii) Hình cầu mở $B(a_0, e)$ là tập mở, hình cầu đóng $\bar{B}(a_0, e)$ là tập đóng, ở đây $\bar{B}(a_0, e) := \{a \in X : \rho(a_0, a) \preceq e\}$, $e \in E$, $\theta \ll e$, $a_0 \in X$.
- (iii) Hợp của các tập mở là mở, giao của các tập đóng là đóng.
- (iv) Giao của một số hữu hạn các tập mở là mở, hợp của một số hữu hạn các tập đóng là đóng.

Mệnh đề 3.4.3. *Dãy các phần tử $\{a_n\}$ của X là hội tụ đến a trong (X, E, C, K, ρ) nếu và chỉ nếu mọi tập mở W chứa a , tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $a_n \in W$ với mọi $n \geq n_0$.*

Chứng minh. Giả sử $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ và W là một tập mở chứa a . Khi đó, tồn tại $e \in E$, $\theta \ll e$ sao cho $B(a, e) \subset W$. Do $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ nên tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\rho(a, a_n) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó $a_n \in W$ với mọi $n \geq n_0$.

Ngược lại, với mọi $e \in E$, $\theta \ll e$, hình cầu $B(a, e)$ là tập mở chứa a . Theo giả thiết, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $a_n \in B(a, e)$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó $\rho(a, a_n) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. $\square$

Mệnh đề 3.4.4. *Cho A là một tập con của không gian b -TVS metric nón mạnh (X, E, C, K, ρ) . Khi đó, $a \in \bar{A}$ nếu và chỉ nếu tồn tại một dãy $\{a_n\} \subset A$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.*

Chứng minh. Giả sử $a \in \bar{A}$. Khi đó với mỗi $n \geq 1$, $e \in E$, $\theta \ll e$, ta có

$$B(a, \frac{e}{n}) \cap A \neq \emptyset.$$

Với mỗi $n \geq 1$, ta chọn $a_n \in B(a, \frac{e}{n}) \cap A$. Điều này chứng tỏ $\{a_n\} \subset A$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Ngược lại, giả sử tồn tại dãy $\{a_n\} \subset A$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Ta chỉ ra $a \in \bar{A}$. Thật vậy, bằng phủ định, giả sử $a \in X \setminus \bar{A}$. Vì $X \setminus \bar{A}$ là tập mở, khi đó tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $a_n \in X \setminus \bar{A}$ với mọi $n \geq n_0$. Điều này mâu thuẫn với $\{a_n\} \subset A$. $\square$

Mệnh đề 3.4.5. Cho A là tập con của không gian b -TVS metric nón mạnh (X, E, C, K, ρ) . Khi đó A là tập trù mật trong X nếu và chỉ nếu với mỗi $a \in X$ và $e \in E, \theta \ll e$, tồn tại $b \in A$ sao cho $\rho(a, b) \ll e$.

Chứng minh. Giả sử A là trù mật trong X . Cho $a \in X$ và $e \in E, \theta \ll e$, từ Bổ đề 3.4.4, tồn tại dãy $\{a_n\} \subset A$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Điều này chứng tỏ, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\rho(a, a_n) \ll e$ với mọi $n \geq n_0$. Đặt $b = a_{n_0}$. Khi đó, ta có $\rho(a, b) \ll e$.

Ngược lại, giả sử $a \in X$ và $\theta \ll e$. Với mỗi $n \geq 1$, tồn tại $b_n \in A$ sao cho $\rho(b_n, a) \ll \frac{e}{n}$. Chứng tỏ $\{b_n\} \subset A$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. Do đó $a \in \bar{A}$ và A là trù mật trong X . $\square$

Định nghĩa 3.4.6. (i) Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ từ một không gian b -TVS metric nón mạnh (X, E, C, K, ρ) đến một không gian b -TVS metric nón mạnh (Y, E, C, K', ρ') được gọi là phép đẳng cự nếu

$$\rho'(f(a), f(b)) = \rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

(ii) Một không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ (X^*, E, C, K^*, ρ^*) được gọi là bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh (X, E, C, K, ρ) nếu tồn tại một phép đẳng cự $f : X \rightarrow X^*$ sao cho $\overline{f(X)} = X^*$.

Định lý 3.4.7. Cho (X, E, C, K, ρ) là một không gian b -TVS metric nón mạnh và nón C thỏa tính chất lân cận trong không gian vectơ tôpô lõi địa phương Hausdorff thực E đầy đủ. Khi đó

(i) (X, E, C, K, ρ) có bổ sung đủ;

(ii) Bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) là duy nhất theo nghĩa là nếu $(X_1^*, E, C, K_1, \rho_1^*)$ và $(X_2^*, E, C, K_2, \rho_2^*)$ là hai bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) thì tồn tại một song ánh đẳng cự $\phi : X_1^* \rightarrow X_2^*$ đồng nhất trên X .

Chứng minh. (i) Ký hiệu S là tập tất cả các dãy Cauchy trong không gian (X, E, C, K, ρ) . Ta định nghĩa một quan hệ $\sim$ trên S như sau:

Với $\{a_n\}, \{b_n\} \in S$, ta nói $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) = \theta$. Dễ dàng kiểm tra được quan hệ $\sim$ là quan hệ tương đương trên S . Gọi

$$X^* = \{a^* = [\{a_n\}] : \{a_n\} \in S\},$$

ở đây $a^* = [\{a_n\}]$ là lớp tương đương của $\{a_n\}$ dưới quan hệ tương đương $\sim$ và định nghĩa hàm $\rho^* : X^* \times X^* \rightarrow E$ bởi

$$\rho^*(a^*, b^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n).$$

Trước tiên, ta chỉ ra rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n)$ tồn tại. Thật vậy, với mỗi n, m ta có

$$\begin{aligned} \rho(a_n, b_n) &\preceq K\rho(a_n, a_m) + \rho(a_m, b_n) \\ &\preceq K\rho(a_n, a_m) + \rho(a_m, b_m) + K\rho(b_m, b_n). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ

$$\rho(a_n, b_n) - \rho(a_m, b_m) \preceq K\rho(a_n, a_m) + K\rho(b_m, b_n) \text{ với mọi } n, m.$$

Tương tự, ta có

$$\rho(a_m, b_m) - \rho(a_n, b_n) \preceq K\rho(a_n, a_m) + K\rho(b_m, b_n) \text{ với mọi } n, m.$$

Vì vậy

$$-K(\rho(a_n, a_m) + \rho(b_m, b_n)) \preceq \rho(a_n, b_n) - \rho(a_m, b_m) \preceq K(\rho(a_n, a_m) + \rho(b_m, b_n)),$$

với mọi n, m . Hơn nữa, do

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} -K(\rho(a_n, a_m) + \rho(b_m, b_n)) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} K(\rho(a_n, a_m) + \rho(b_m, b_n)) = \theta,$$

nên từ Bổ đề 3.1.12, ta có

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} (\rho(a_n, b_n) - \rho(a_m, b_m)) = \theta.$$

Do đó, $\{\rho(a_n, b_n)\}$ là một dãy Cauchy trong E . Vì E là đầy đủ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n)$ tồn tại. Tiếp theo, ta chỉ ra rằng ρ^* là xác định. Thật vậy, nếu $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ và $\{b_n\} \sim \{v_n\}$ thì

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(b_n, v_n) = \theta.$$

Từ quan hệ

$$\rho(a_n, b_n) \preceq K\rho(a_n, c_n) + \rho(c_n, v_n) + K\rho(v_n, b_n)$$

và quan hệ

$$\rho(c_n, v_n) \preceq K\rho(c_n, a_n) + \rho(a_n, b_n) + K\rho(b_n, v_n),$$

xảy ra với mọi $n \geq 1$, nên ta có

$$-K(\rho(a_n, c_n) + \rho(v_n, b_n)) \preceq \rho(a_n, b_n) - \rho(c_n, v_n) \preceq K(\rho(a_n, c_n) + \rho(v_n, b_n)),$$

với mọi $n \geq 1$. Từ Bổ đề 3.1.12, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(c_n, v_n).$$

Vậy hàm ρ^* là xác định. Ta chứng minh ρ^* là b -TVS metric nón mạnh trên X^* . Từ tính đóng của C và $\theta \preceq \rho(a_n, b_n)$ với mọi n , suy ra

$$\theta \preceq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) = \rho^*(a^*, b^*).$$

Nếu $\rho^*(a^*, b^*) = \theta$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) = \theta$. Điều này tương đương với $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ và do đó $a^* = b^*$. Vì $\rho(a_n, b_n) = \rho(b_n, a_n)$ với mọi n nên ta có $\rho^*(a^*, b^*) = \rho^*(b^*, a^*)$. Cuối cùng

$$\begin{aligned} \rho^*(a^*, b^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, b_n) \\ &\preceq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, c_n) + K \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(c_n, b_n) \\ &= \rho^*(a^*, c^*) + K\rho^*(c^*, b^*), \end{aligned}$$

ở đây $\{a_n\} \in a^*$, $\{b_n\} \in b^*$ và $\{c_n\} \in c^*$. Vì vậy, ρ^* là b -TVS metric nón mạnh trên X^* .

Với mỗi $a \in X$, ta đặt $f(a) = [\{a, a, \dots\}] \in X^*$. Từ

$$\rho^*(f(a), f(b)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a, b) = \rho(a, b) \text{ với mọi } a, b \in X,$$

nên ta có f là phép đẳng cự từ (X, E, C, K, ρ) vào (X^*, E, C, K, ρ^*) .

Tiếp theo, ta chứng minh $f(X)$ trù mật trong X^* . Thật vậy, với $e \in \text{int } C$ và $a^* = [\{a_n\}] \in X^*$ ta có

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(a_n, a_m) = \theta.$$

Theo Mệnh đề 3.2.4, với mỗi $i \geq 1$, tồn tại n_0^i sao cho $\rho(a_n, a_m) \ll \frac{e}{i}$ với mọi $n, m \geq n_0^i$. Từ đó suy ra

$$\theta \preceq \rho^*(f(a_{n_0^i}), a^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_{n_0^i}, a_n) \preceq \frac{e}{i} \text{ với } i \geq 1.$$

Do đó $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho^*(f(a_{n_0^i}), a^*) = \theta$ suy ra $\lim_{i \rightarrow \infty} f(a_{n_0^i}) = a^*$. Điều này chứng tỏ $f(X)$ là trù mật trong X^* .

Bây giờ, ta chứng minh không gian (X^*, E, C, K, ρ^*) là đầy đủ. Giả sử $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X^* , ở đây $a_n^* = [\{a_i^n\}_i]$ với $\{a_i^n\}_i \in S$. Ta có

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho^*(a_n^*, a_m^*) = \theta.$$

Vì $f(X)$ là trù mật trong X^* nên với mỗi n , tồn tại $b_n \in X$ sao cho

$$\rho^*(f(b_n), a_n^*) \ll \frac{e}{Kn}.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \theta \preceq \rho(b_n, b_m) &= \rho^*(f(b_n), f(b_m)) \\ &\preceq K\rho^*(f(b_n), a_n^*) + \rho^*(a_n^*, f(b_m)) \\ &\preceq K\rho^*(f(b_n), a_n^*) + \rho^*(a_n^*, a_m^*) + K\rho^*(a_m^*, f(b_m)) \end{aligned}$$

$$\ll \frac{e}{n} + \frac{e}{m} + \rho^*(a_n^*, a_m^*) \text{ với mọi } n, m \geq 1.$$

Do $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \left(\frac{e}{n} + \frac{e}{m} + \rho^*(a_n^*, a_m^*) \right) = \theta$ nên ta có $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \rho(b_n, b_m) = \theta$. Điều này chứng tỏ $\{b_n\}$ là một dãy Cauchy trong (X, E, C, K, ρ) . Đặt $b^* = [\{b_n\}] \in X^*$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \theta \leq \rho^*(a_n^*, b^*) &\leq K\rho^*(a_n^*, f(b_n)) + \rho^*(f(b_n), b^*) \\ &\ll \frac{e}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(b_n, b_m) \text{ với mọi } n \geq 1. \end{aligned}$$

Cho $n \rightarrow \infty$, ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^*(a_n^*, b^*) = \theta,$$

điều này chứng tỏ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^* = b^*.$$

Vậy (X^*, E, C, K, ρ^*) là đầy đủ.

(ii) Ta chứng minh tính duy nhất của bổ sung đủ.

Giả sử $(X_1^*, E, C, K_1, \rho_1^*)$ và $(X_2^*, E, C, K_2, \rho_2^*)$ là hai bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) , $f_1 : X \rightarrow X_1^*$ và $f_2 : X \rightarrow X_2^*$ là các đẳng cự. Với mỗi $a_1^* \in X_1^*$, tồn tại $\{a_n\} \subset X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(a_n) = a_1^*$. Điều đó chứng tỏ $\{f_1(a_n)\}$ là một dãy Cauchy trong X_1^* . Vì f_1 là đẳng cự nên $\{a_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Bởi f_2 là đẳng cự, khi đó $\{f_2(a_n)\}$ là một dãy Cauchy trong X_2^* . Do vậy, tồn tại $a_2^* \in X_2^*$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(a_n) = a_2^*$.

Bây giờ, ta định nghĩa $\phi : X_1^* \rightarrow X_2^*$ bởi $\phi(a_1^*) = a_2^*$. Ta chứng minh ϕ là song ánh. Thật vậy, lấy một phần tử bất kỳ $b_2^* \in X_2^*$. Khi đó tồn tại $\{b_n\} \subset X$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} f_2(b_n) = b_2^*$. Vì f_2 là đẳng cự, $\{b_n\}$ là một dãy Cauchy trong X . Vì f_1 là đẳng cự, $\{f_1(b_n)\}$ là một dãy Cauchy trong X_1^* . Điều đó chứng tỏ tồn tại $b_1^* \in X_1^*$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(b_n) = b_1^*$. Vậy $\phi(b_1^*) = b_2^*$. Suy ra ϕ là song ánh. Mặt khác, với mọi $a^*, b^* \in X_1^*$ với $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(a_n) = a^*$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(b_n) = b^*$, bởi Mệnh đề 3.2.4, ta có

$$\rho_1^*(a^*, b^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_1^*(f_1(a_n), f_1(b_n))$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^*(a_n, b_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_2^*(f_1(a_n), f_1(b_n)) \\
&= \rho_2^*(\phi(a^*), \phi(b^*)).
\end{aligned}$$

Điều đó chứng tỏ rằng ϕ là một song ánh đẳng cự đồng nhất trên X . $\square$

Ví dụ 3.4.8. Giả sử $X = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{R}^2$, $C = \{(t, 0) \in E : t \geq 0\}$, $K \geq 1$ và $\rho : X \times X \rightarrow E$ bởi

$$\rho(a, b) = (|a - b|, 0) \text{ với mọi } a, b \in X.$$

Vì (X, E, C, K, ρ) không là không gian b -metric mạnh. Do đó Định lý 8 không áp dụng được. Dễ dàng kiểm tra được (X, E, C, K, ρ) là không gian b -TVS metric nón mạnh. Vì C có một cơ sở lồi đóng là $B = \{(1, 0)\}$ nên C thỏa mãn tính chất lân cận. Do đó, tất cả các giả thiết trong Định lý 3.4.7 được thỏa mãn. Hơn nữa, ta có $(X^* = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2, C, K, \rho^*)$ là bổ sung đủ của (X, E, C, K, ρ) , ở đây $\rho^*(a^*, b^*) = (|a^* - b^*|, 0)$ với mọi $a^*, b^* \in X^*$.

3.5. Kết luận chương 3

Trong chương này, chúng tôi thu được các kết quả sau:

- Giới thiệu không gian b -TVS metric nón mạnh. Chứng minh một số tính chất trên không gian này.
- Thiết lập Định lý 3.3.1 và Định lý 3.3.3 là các điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trong không gian b -TVS metric nón mạnh đầy đủ.
- Thiết lập Nguyên lý bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh.

KẾT LUẬN CHUNG

Luận án nghiên cứu về sự tồn tại một số lớp toán Picard yếu và toán tử Picard trên không gian metric và metric suy rộng.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard yếu đơn trị và toán tử Picard yếu đa trị trong không gian metric đầy đủ.
2. Thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard và toán tử Picard yếu đa trị trong không gian b -metric mạnh.
3. Giới thiệu không gian b -TVS metric nón mạnh và thiết lập một số điều kiện đủ để ánh xạ là toán tử Picard trong không gian này.
4. Thiết lập Nguyên lý bổ sung đủ của không gian b -TVS metric nón mạnh.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo cho kết quả của luận án như sau:

1. Nghiên cứu toán tử Picard và toán tử Picard yếu cho các không gian metric suy rộng không đầy đủ.
2. Nghiên cứu một số ứng dụng của toán tử Picard và Picard yếu vào các bài toán về sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân, hệ phương trình tuyến tính, phương trình tích phân.
3. Nghiên cứu bài toán cân bằng không cộng tác trong trò chơi trên không gian metric suy rộng.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA NGHIÊN CỨU SINH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

- [A1] Hieu Doan (2021), “A new type of Kannan’s fixed point theorem in strong b -metric spaces”, *AIMS Mathematics* , 6(7), 7895–7908. (SCIE)
- [A2] Doan Trong Hieu and Bui The Hung (2022), “Some fixed point theorems for weakly Picard operators in complete metric spaces and applications”, *Commun. Korean Math. Soc.* Vol. 37, No. 1, 75–89. (ESCI, Scopus)
- [A3] Doan Trong Hieu, Bui The Hung, Muhammad Sirajo Abdullahi, Poom Kumam (2022), “On Answer to Kirk-Shahzad’s Question for Strong b -TVS cone metric spaces”, *Science and Technology Asia*, Vol. 27, No. 1, 20–30. (Scopus)
- [A4] Ha Tran Phuong, Bui The Hung and Doan Trong Hieu (2023), “Fixed point theorems of Kannan type contractive mappings in strong b -metric spaces”, submitted to *Miskolc Mathematical Notes*. (SCIE)
- [A5] Bui The Hung and Doan Trong Hieu (2023), “Picard operators in strong b -TVS cone metric spaces”, submitted to *East-West Journal of Mathematics*.

Tài liệu tham khảo

- [1] Alimohammady M., Balooee J., Radojević S., Rakocević V., Roohi M. (2011), “Conditions of regularity in cone metric space”, *Appl. Math. comput.*, 217, 6359–6363.
- [2] An T. V., Dung N. V. (2016), “Answers to Kirk-Shahzad’s questions on strong b -metric spaces”, *Taiwanese J. Math.*, 20(5), 1175–1184.
- [3] Banach S. (1922), “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, *Fund. Math.*, 3, 133–181.
- [4] Berstovanská E. (2003), “Qualitative behavior of an integral equation related to some epidemic model”, *Demonstratio Math.* XXXVI (3), 603–609.
- [5] Berinde M., Berinde V. (2007), “On a general class of multi-valued weakly Picard mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, 326, 772 –782.
- [6] Ćirić Lj. B. (1974), “A generalization of Banach’s contraction principle”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45, 267–273.
- [7] Connell E. H. (1959), “Properties of fixed point spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10, 974–979.
- [8] Czerwik S. (1993), “Contraction mappings in b -metric spaces”, *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis.*, 1, 5–11.

- [9] Du W. S. (2010), “A note on cone metric fixed point theory and its equivalence”, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 72, 2259–2261.
- [10] Dube L. S., Singh S. P. (1970), “On multivalued contractions mappings”, *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. Roumanie*, 14, 307–310.
- [11] Edelstein M. (1962), “On fixed and periodic points under contractive mappings”, *J. London Math. Soc.*, 37, 74–79.
- [12] Farshid K., Mujahid A., Simona C. (2014), “Two new types of fixed point theorems in complete metric spaces”, *Abs. Appl. Anal.*, Vol. 2014, Article ID 325840, 1–5.
- [13] Felhi A. (2016), “On multi-valued weakly picard operators in Hausdorff metric-like spaces”, *International Journal of Analysis and Applications*, 11(2), 168–182.
- [14] Gaba Y. U. (2017), “Fixed point theorems in G - metric spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, 455, 528–537.
- [15] Gahler S. (1963), “2-Metrische Raume und ihre topologische struktur”, *Math. Nachr.*, 26, 115–148.
- [16] Górnicki J. (2017), “Fixed point theorems for Kannan type mappings”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19, 2145–2152.
- [17] Górnicki J. (2018), “Various extensions of Kannan’s fixed point theorem”, *Fixed Point Theory*, 18, 569–578.
- [18] Gordij M. E., De La Sen M., Cho Y. J. (2017), “On orthogonal sets and Banach fiexd point theorem”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 21, 1–11.

- [19] Hardy G. E., Rogers T. D. (1973), “A generalization of a fixed point theorem of Reich”, *Canad. Math. Bull.*, 16, 201–206.
- [20] Hiranmoy G., Lakshmi K. D., Tanusri S. (2018), “On Kannan-type contractive mappings”, *Num. Func. Anal. Optimization.*, DOI 10.1080/01630563.2018.1485157.
- [21] Huang L. G., Zhang X. (2007), “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, 332, 1468–1476.
- [22] Kannan R. (1968), “Some results on fixed points”, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 60, 71–76.
- [23] Kannan R. (1969), “Some results on fixed points–II”, *Amer. Math. Monthly*, 76(4), 405–408.
- [24] Kirk A., Shahzad N. (2014), “Fixed Point Theory in Distance Spaces”, *Springer, Cham*.
- [25] Luc D. T. (1989), “Theory of Vector Optimization”, *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, Berlin, Germany*, Vol 319.
- [26] Matthews G. S. (1992), “Partial metric topology”, Research Report 212, *Department of Computer Science University of Warwick*.
- [27] Mathews G. S. (1994), “Partial metric topology”, *Ann. New York Acad. Sci.*, 728, 183–197.
- [28] Meir A., Keeler E. (1969), “A theorem on contraction mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, 28, 326–329.

- [29] Muresan V. (2003), “Volterra integral equations with iterations of linear modification of the argument”, *Novi Sad J. Math.*, 33, 1–10.
- [30] Muresan V. (2004), “Existence, uniqueness and data dependence for the solutions of some integro-differential equations of mixed type in Banach space”, *J. Anal. Appl.*, 23, 205–216.
- [31] Olaru I. M. (2010), “An integral equation via weakly Picard operators”, *Fixed Point Theory*, 11(1), 97–106.
- [32] Olaru I. M. (2010), “Generalizations of an integral equation related to some epidemic models”, *Carpathian J. Math.*, 26, 92–96.
- [33] Pant R. (2016), “Fixed point theorems for generalized semi-quasi contractions”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19, 1581–1590.
- [34] Ran A. C. M., Reuring M. C. B. (2004), “A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132, 1435–1443.
- [35] Rakotch E. (1962), “A note on contractive mappings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13, 459–465.
- [36] Rakotch E. (1962), “A note on locally contractive mappings”, *Bull. Res. Council Israel Sect*, 10, 188–191.
- [37] Reich S. (1971), “Kannan’s fixed point theorem”, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 4(4), 1–11.
- [38] Reich S. (1971), “Some remarks concerning contraction mappings”, *Can. Math. Bull.*, 14, 121–124.
- [39] Reich S. (1972), “Fixed points of contractive functions”, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 5(4), 26–42.

- [40] Ri S-i. (2016), “A new fixed point theorem in the fractal space”, *Indagationes Mathematicae*, 27, 85–93.
- [41] Rezapour Sh., Hamlbarani R. (2008), Some notes on the paper “Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings”, *J. Math. Anal.*, 345, 719–724.
- [42] Rus I. A. (1983), “Generalized contractions”, *Univ. Cluj-Napoca*, Preprint (3), 1–30.
- [43] Rus I. A. (1984), “Bessaga mappings”, *Proc. Colloq. Approx. Optimization*, Cluj-Napoca, 165–175.
- [44] Rus I. A. (1987), “Picard mappings: results and problems”, *Univ. Cluj-Napoca*, Preprint 6, 55–64.
- [45] Rus I. A. (1988), “Picard mappings I.”, *Studia Univ. Babes-Bolyai* 33, 70–73.
- [46] Rus I. A. (1989), “Basic problems of the metric fixed point theory revisited”, *Studia Univ. Babes-Bolyai*, 34, 61–69.
- [47] Rus I. A. (1991), “Basic problems of the metric fixed point theory revisited (II)”, *Stud. Univ. Babes-Bolyai*, 36, 81–91.
- [48] Rus I. A. (1993), “Weakly Picard mappings”, *Comment. Math. Univ. Carolin*, 34(4), 769–733.
- [49] Rus I. A., Petrusel A., Sintamarian A. (2001) “Data dependence of the fixed points set of multi-valued weakly Picard operators”, *Stud. Univ. Babes-Bolyai, Math.*, 46, 111–121.
- [50] Rus I. A., Petrusel A., Sintamarian A. (2003) “Data dependence of the fixed points set of multi-valued weakly Picard operators”, *Nonlinear Anal.*, 52, 1947–1959.

- [51] Rus I. A. (2003), “Picard operators and applications”, *Sci. Math. Japan*, 58(1), 191–219.
- [52] Rus I. A., Muresan A. S., and Muresan V. (2005), “Weakly Picard operators on a set with two metrics”, *Fixed Point Theory*, 6(2), 323–331.
- [53] Rus I. A., Petrusel A., Serban M. A. (2006), “Weakly Picard operators: Equivalent definitions applications and open problems”, *Fixed Point Theory*, 7, 3–22.
- [54] Sawangsup K., Sintunavarat W., Cho Y. J. (2020), “Fixed point theorems for orthogonal F –contraction mappings on O –complete metric spaces”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, <https://doi.org/10.1007/s11784-019-0737-4>
- [55] Subrahmanyam P. V. (1975), “Completeness and fixed points”, *Monatsh. Math.*, 80, 325–330.
- [56] Suzuki T. (2007), “A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, (136), 1861–1869.
- [57] Suzuki T. (2009), “A new type of fixed point theorem in metric spaces”, *Nonlinear Anal.*, 71, 5313–5317.
- [58] Wang J., Xiang X., Wei W. (2010), “A class of nonlocal impulsive problems for integrodifferential equation in Banach spaces”, *Results Math.*, 58, 379–397.
- [59] Wang J., Zhou Y., Medved M. (2012), “Picard and weakly Picard operators technique for nonlinear differential equations in Banach spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, 389, 261–274.

- [60] Wardowski D. (2012) “Fixed point of a new type of contractive mappings in complete metric spaces”, *Fixed Point Theory Appl.*, doi:10.1186/1687-1812-2012-94, 6 pages.