

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

— * —

PHÙNG THỊ KIM YẾN

MỘT SỐ TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA
LỚP PHƯƠNG TRÌNH CHỨA
TOÁN TỬ ELLIPTIC SUY BIẾN MẠNH

Ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9460102

TÓM TẮT LUẬN ÁN

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn

THÁI NGUYÊN - 2023

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lý do chọn đề tài

Các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến xuất hiện nhiều trong các quá trình của vật lý, hoá học và sinh học, chẳng hạn các quá trình truyền nhiệt, quá trình truyền sóng trong cơ học chất lỏng, các phản ứng hoá học, các mô hình quần thể trong sinh học, v.v. Việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ, chính vì thế nó đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Cho đến tận những năm 20 của thế kỷ thứ 20 thì các nghiệm của bài toán đối với phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng được hiểu chung nhất là nghiệm cổ điển, nghiệm đòi hỏi khả vi theo nghĩa thông thường đến cấp của phương trình, điều này gây rất nhiều khó khăn cho việc chứng minh cho tính đặt đúng của bài toán này, đặc biệt tính trơn của nghiệm còn phụ thuộc vào cấu trúc hình học của miền được xét. Việc đưa ra khái niệm nghiệm suy rộng là một bước ngoặt trung tâm về mặt phương pháp trong việc nghiên cứu phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng và các bài toán biến phân của chúng.

Một số tác giả trong nước cũng đạt được các kết quả sâu sắc trong việc nghiên cứu các phương trình, hệ các phương trình elliptic suy biến phi tuyến, phương trình parabolic suy biến và phương trình hyperbolic suy biến. Các kết quả đã đạt được là: sự tồn tại và không tồn tại nghiệm

của bài toán biên cho phương trình elliptic suy biến, sự tồn tại nghiệm, đáng điều kiện cận nghiệm của phương trình parabolic suy biến, sự tồn tại nghiệm, đáng điều kiện cận nghiệm của phương trình hyperbolic suy biến.

Như chúng ta đã biết, một trong những toán tử elliptic được nghiên cứu nhiều đó là toán tử Laplace trong không gian $\mathbb{R}^N$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}.$$

Nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm hay không tồn tại nghiệm của phương trình nửa tuyến tính chứa toán tử Laplace đã được nhiều nhà toán học tập trung nghiên cứu bắt đầu từ giữa thế kỷ thứ hai mươi.

S. I. Pohozaev đã xét bài toán biên:

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

với Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$),

$$f(u) = \lambda u + |u|^{t-1}u.$$

Ta thấy $u = 0$ là nghiệm tầm thường của bài toán. S. I. Pohozaev đã đưa ra một đồng nhất thức mà hiện nay được mang tên ông. Đến nay sự tồn tại nghiệm không tầm thường, tồn tại nghiệm dương của các bài toán biên chứa toán tử elliptic đạt được tương đối trọn vẹn. Một cách tương tự, các vấn đề lại được đặt ra đối với bài toán có chứa toán tử elliptic suy biến.

Vào năm 2012, các tác giả P.T. Thuỷ và N. M. Trí đã xét bài toán Dirichlet cho phương trình elliptic suy biến cấp hai sau đây

$$\begin{cases} -P_{\alpha,\beta}u + f(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

trong đó

$$P_{\alpha,\beta}u = \Delta_x u + \Delta_y u + |x|^{2t_1}|y|^{2t_2}\Delta_z u, \quad \text{với } \alpha, \beta \geq 0, \quad (3)$$

Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^{N_1+N_2+N_3}$, $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$, $z \in \mathbb{R}^{N_3}$, biên $\partial\Omega$ trơn, $f(u) = u|u|^{\gamma-1}$. Điều kiện không tồn tại nghiệm không tầm thường của Bài toán (2) trong trường hợp này là $\gamma > \frac{\tilde{N}_{\alpha,\beta} + 2}{\tilde{N}_{\alpha,\beta} - 2}$ và Ω là P_{t_1,t_2} -hình sao, $\tilde{N}_{\alpha,\beta} = N_1 + N_2 + (1 + \alpha + \beta)N_3$.

Cũng trong năm này, các tác giả A. E. Kogoj và E. Lanconelli, khi nghiên cứu phương trình elliptic suy biến cấp hai tổng quát hơn chứa toán tử Δ_γ , đã đưa ra đồng nhất thức kiểu Pohozaev, chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu và tính trơn của nghiệm yếu của bài toán sau bằng phương pháp biến phân

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u - \eta u + f(X, u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

ở đó Ω là tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $\eta \geq 0$ và $\Delta_\gamma u$ sẽ được định nghĩa trong Chương I, Mục 1.1.1.

Năm 2016 các tác giả C. T. Anh, và B. K. My trong đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của Bài toán (4) với $\eta = 0$ và điều kiện của $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:

- $f(X, 0) = 0$, $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(X, \xi)}{|\xi|^{2^*_\gamma-1}} = 0$, $2^*_\gamma = \frac{2\tilde{N}}{\tilde{N}-2}$, $(2^*_\gamma - 1 = \frac{\tilde{N}+2}{\tilde{N}-2})$;
- $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{F(X, \xi)}{|\xi|^2} = 0$ đều với mỗi $X \in \overline{\Omega}$, trong đó $F(X, u) = \int_0^u f(X, \xi) d\xi$;
- $\limsup_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{F(X, \xi)}{|\xi|^2} < \mu_1$ đều với mỗi $X \in \overline{\Omega}$, với μ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\gamma$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;

- Tồn tại $C_* \geq 0, \theta > 0$ thỏa mãn:

$$H(X, s) \leq \theta H(X, t) + C_*, \forall s, t \in \mathbb{R}, 0 < |s| < |t|, \forall X \in \Omega,$$

trong đó $H(X, u) = \frac{1}{2}uf(X, u) - F(X, u)$.

Khi đó Bài toán (4) luôn có nghiệm yếu không tầm thường. Bên cạnh đó, từ những năm 80 của thế kỷ trước, nhiều tác giả đã nghiên cứu các phương trình elliptic cấp bốn nửa tuyến tính chứa toán tử Laplace Δ

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(x, u) = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = \partial_\nu u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

trong đó $f(x, 0) = 0$.

Một số điều kiện đủ đối với dáng điệu của hàm $f(X, u)$ theo biến u đã được các tác giả đưa ra để đảm bảo cho hoặc là sự không tồn tại nghiệm không tầm thường của Bài toán (5) hoặc là sự tồn tại ít nhất một nghiệm không tầm thường. Tuy nhiên, theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có các nghiên cứu đối với phương trình elliptic suy biến cấp bốn.

Năm 2005, Fall Djiby bằng cách sử dụng phương pháp ước lượng đuôi nghiệm đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ của bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t + u = \Delta u + f(X, u), & X \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases}$$

ở đây β là hằng số dương, $u_0(X) \in H^1(\mathbb{R}^N), u_1(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Hàm $f(X, \xi)$ được định nghĩa bởi:

- $\xi - f(X, \xi) = \xi + h_1(\xi) - h_2(X), h_2(X) \in L^2(\mathbb{R}^N),$
- $h_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), h_1(0) = 0, h_1(\xi)\xi \geq CF(\xi) \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R},$ trong đó C là hằng số dương, $F(\xi) = \int_0^\xi h_1(\tau) d\tau$

- $0 \leq \limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{h_1(\xi)}{\xi} < \infty$.

Năm 2014, các tác giả A. E. Kogoj và S. Sonner trong đã nghiên cứu một lớp các phương trình hyperbolic suy biến trong đó có chứa bài toán sau đây

$$\begin{cases} u_{tt}(X, t) + \lambda u_t = P_{\alpha, \beta} u(X, t) + f(u(X, t)), & X \in \Omega, t > 0, \\ u(X, t) = 0, & X \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases} \quad (6)$$

trong đó Ω là miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^N$, $P_{\alpha, \beta}$ là toán tử được xác định bởi (3), λ là hằng số dương và $f(\xi)$ thỏa mãn điều kiện:

- $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|(1 + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho), \quad (7)$

với $C > 0$, $0 \leq \rho < \frac{2}{\tilde{N}_{\alpha, \beta} - 2}$, $\tilde{N}_{\alpha, \beta} = N_1 + N_2 + (\alpha + \beta + 1)N_3 - 2$;

- $\limsup_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} < \mu_1, \quad (8)$

với μ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-P_{\alpha, \beta}$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất.

Khi đó Bài toán (6) có nghiệm toàn cục, có tập hút toàn cục. Từ những kết quả ở trên, ta thấy rằng đối với lớp phương trình elliptic suy biến, phương trình hyperbolic suy biến mặc dù đã có một số kết quả tuy nhiên các kết quả thu được vẫn còn ít và còn nhiều vấn đề mở cần được nghiên cứu. Những vấn đề mở mà chúng tôi quan tâm trong luận án này bao gồm:

- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic suy biến cấp bốn chứa toán tử Δ_γ^2 trong một số trường hợp của hàm phi tuyến.

- Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân toàn cục; đáng điều khi thời gian lớn của nghiệm (thông qua tập hút toàn cục) của Bài toán (6) chứa toán tử elliptic suy biến $P_{\alpha,\beta}$ trong cả không gian và chứng minh sự tồn tại của tập hút toàn cục khi phương trình có thêm số hạng $\gamma(X)u$ và vế phải $f(X, u)$ phụ thuộc thêm biến X .

Với các lý do nêu trên chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là “**Một số tính chất nghiệm của lớp phương trình chứa toán tử elliptic suy biến mạnh**”.

2. Mục đích nghiên cứu

- *Nội dung 1*: Nghiên cứu sự tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán Dirichlet cho phương trình Δ_γ^2 -Laplace nửa tuyến tính cấp bốn trong miền bị chặn với các nội dung: sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường; sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường.

- *Nội dung 2*: Nghiên cứu đáng điều tiệm cận khi thời gian lớn của các phương trình hyperpolic nửa tuyến tính có chứa các toán tử elliptic suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$ trong toàn không gian với các nội dung sau: sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục; sự tồn tại tập hút toàn cục compact và cấu trúc của nó.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là xét bài toán biên và bài toán biên giá trị ban đầu có chứa toán tử elliptic suy biến Δ_γ , được xác định bởi

$$\Delta_\gamma u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\gamma_j^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

trong đó γ_j là các hàm thỏa mãn một số điều kiện phù hợp được phát biểu sau.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán chúng tôi sử dụng phương pháp biến phân và các định lý tổng quát của lý thuyết điểm tới hạn.
- Để nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm mạnh chúng tôi thiết lập các đồng nhất thức kiểu Pohozaev phù hợp đối với toán tử Δ_γ^2 và khai thác cấu trúc hình học của miền đang xét.
- Để nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân toàn cục, chúng tôi sử dụng các phương pháp và công cụ của Giải tích hàm phi tuyến: phương pháp xấp xỉ Galerkin, các dạng phù hợp của bổ đề compact, các bổ đề xử lý số hạng phi tuyến. Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm và sự tồn tại của tập hút toàn cục, chúng tôi sử dụng các phương pháp của lý thuyết hệ động lực vô hạn chiều.
- Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm, chúng tôi sử dụng các công cụ và phương pháp của lý thuyết hệ động lực vô hạn chiều. Cụ thể đó là phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận và phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm.

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây.

- Đối với bài toán Dirichlet trong miền bị chặn cho phương trình elliptic suy biến cấp bốn đã đưa ra được các điều kiện đủ để không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường; chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán với một số điều kiện về độ tăng trưởng của số hạng phi tuyến. Đây là nội dung của Chương 2.
- Đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$ trong $\mathbb{R}^N$: đưa ra điều kiện đủ để có sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục. Chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục compact và mô tả được cấu trúc của nó. Đây là nội dung của Chương 3.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học và góp phần hoàn thiện việc nghiên cứu sự tồn tại của nghiệm trong miền bị chặn của bài toán biên cho phương trình elliptic suy biến cấp bốn và dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến trong cả không gian.

6. Cấu trúc luận án

Ngoài các phần mở đầu, tổng quan, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình được công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án bao gồm 3 chương

- Chương 1: *Trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho các chương sau.* Trong chương này chúng tôi trình bày về toán tử Δ_γ , một số tính chất, ví dụ và một số kiến thức bổ trợ (một số không gian hàm và một số định lý nhúng); trình bày một số kết quả về điểm tới hạn; tập hút toàn cục và tính chất.

- Chương 2: *Trình bày sự tồn tại nghiệm và không tồn tại của nghiệm của phương trình Laplace Δ_γ^2 -nửa tuyến tính trong miền bị chặn.* Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và không tồn tại nghiệm cho bài toán Dirichlet đối với phương trình nửa tuyến tính cấp bốn chứa toán tử Δ_γ^2 :

$$\Delta_\gamma^2 u = f(x, u) \text{ trong } \Omega, u = \partial_\gamma u = 0 \text{ trên } \partial\Omega,$$

trong đó ν là pháp tuyến ngoài đơn vị tại các điểm biên của Ω . Chương này gồm ba phần: phần thứ nhất trình bày về đồng nhất thức Pohozaev đối với toán tử Δ_γ^2 . Phần thứ hai đưa ra một số kết quả về sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường. Phần thứ ba nói về sự tồn tại của nghiệm yếu không tầm thường.

- Chương 3: *Trình bày dáng điệu khi thời gian lớn của nghiệm phương*

trình hyperbolic suy biến mạnh trong cả không gian. Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của tập hút toàn cục compact cho nửa nhóm của bài toán Cauchy với phương trình hyperbolic suy biến nửa tuyến tính. Chương này gồm hai phần. Phần thứ nhất: Trình bày về sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục. Phần thứ hai trình bày về các điều kiện đối với vế phải và thành phần tuyến tính của phương trình và đưa phương trình phương về hệ phương trình cấp một, sau đó chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $S_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả phục vụ cho các chương sau. Cụ thể chúng tôi trình bày: định nghĩa toán tử elliptic suy biến Δ_γ , một số không gian hàm, các kết quả về phép nhúng, một số kết quả của phương pháp biến phân và lý thuyết điểm tới hạn, định lý qua núi, nửa nhóm, tập hút toàn cục và một số kiến thức bổ trợ khác.

Chương 2

Nghiệm của bài toán biên đối với phương trình elliptic suy biến cấp bốn

Trong chương này chúng tôi thay thế biến X ở Chương 1 bởi biến x và nghiên cứu bài toán Dirichlet đối với phương trình cấp bốn chứa toán tử Δ_γ^2 như sau:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma^2 u = f(x, u) & \text{trong } \Omega, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một miền trơn bị chặn, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ là véc tơ pháp tuyến ngoài đơn vị trên biên $\partial\Omega$ và $\Delta_\gamma^2 := \Delta_\gamma(\Delta_\gamma)$.

Kết quả đạt được là các định lý về sự không tồn tại của nghiệm mạnh không tầm thường và các định lý về sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường với một số điều kiện áp đặt lên hàm phi tuyến $f(x, \xi)$.

Nội dung của chương này dựa trên Bài báo [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1 Đồng nhất thức kiểu Pohozaev và định lý về sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường

Trong mục này sẽ giả thiết thêm $\gamma_i \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $j = 2, \dots, N$ với $\tilde{N} > 4$.
Đặt

$$T := \sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i \partial_{x_i}. \quad (2.2)$$

Toán tử T cũng có thể được xem như là véc tơ $T = (\varepsilon_1 x_1 \partial_{x_1}, \dots, \varepsilon_N x_N \partial_{x_N})$.
Kết quả chính đầu tiên trong phần này là mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.1. *Giả sử $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ và $\Delta_\gamma^2 u \in L^1(\Omega)$. Khi đó*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[T(u) \Delta_\gamma^2 u + T(\Delta_\gamma u) \Delta_\gamma u \right] dx &= (\tilde{N} - 2) \int_{\Omega} \langle \nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \Delta_\gamma u \rangle dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[T(u) \langle \nabla_\gamma \Delta_\gamma u, \nu_\gamma \rangle + T(\Delta_\gamma u) \langle \nabla_\gamma u, \nu_\gamma \rangle \right] dS \\ &- \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \Delta_\gamma u \rangle \langle T, \nu \rangle dS, \end{aligned} \quad (2.3)$$

trong đó T là trường vectơ, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ là vectơ pháp tuyến ngoài đơn vị trên $\partial\Omega$ và $\nu_\gamma = (\gamma_1 \nu_1, \dots, \gamma_N \nu_N)$, dS là phần tử diện tích của $\partial\Omega$.

Định nghĩa 2.1. Miền Ω được gọi là δ_t -hình sao ứng với điểm gốc tọa độ nếu $0 \in \Omega$ và $\langle T, \nu \rangle \geq 0$ tại mỗi điểm trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 2.2. Hàm $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ được gọi là *nghiệm mạnh* của Bài toán (2.1) nếu $\Delta_\gamma^2 u = f(x, u)$ trong Ω , $u = \partial_\nu u = 0$ trên $\partial\Omega$ và $f(u, u(x)) \in L^1(\Omega)$.

Nếu $u \equiv 0$ khi đó u được gọi là *nghiệm tầm thường* của Bài toán (2.1).

Mệnh đề 2.2. Giả sử $f(x, \xi) \equiv f(\xi)$ và $f(0) = 0$. Giả sử $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ là nghiệm mạnh của Bài toán (2.1). Khi đó hàm u thỏa mãn đồng nhất thức

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{N}F(u) - \frac{\tilde{N}-4}{2}uf(u) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 \langle T, \nu \rangle dS. \quad (2.4)$$

Định lý 2.1. Giả sử $f(x, \xi) \equiv f(\xi)$, $f(0) = 0$ và Ω là δ_t -hình sao ứng với điểm gốc tọa độ thỏa mãn

$$\tilde{N}F(\xi) - \frac{\tilde{N}-4}{2}\xi f(\xi) < 0, \quad \forall \xi \neq 0.$$

Khi đó Bài toán (2.1) không có nghiệm không tầm thường $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$.

Định lý 2.2. Giả sử $f(x, \xi) \equiv |\xi|^{p-1}\xi$ và $\tilde{N} > 4$, Ω là δ_t -hình sao ứng với điểm gốc tọa độ và

$$p > \frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}.$$

Khi đó Bài toán (2.1) không có nghiệm không tầm thường $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$.

Ví dụ 2.1. Giả sử $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ là hình cầu bán kính 1 và tâm là gốc tọa độ. Khi đó bài toán

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right)^2 u = |u|^3 u \text{ trong } B_1(0), \\ u = \frac{\partial}{\partial \nu} = 0 \text{ trên } \partial B_1(0) \end{cases} \quad (2.5)$$

không có nghiệm mạnh không tầm thường vì ở đây ta có $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = x^2$, $\tilde{N} = 1 + 2(1 + 2) = 7$, $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4} = \frac{11}{3}$, $B_1(0)$ là δ_t -hình sao và bậc tăng trưởng của vế phải bằng 4 lớn hơn $\frac{11}{3}$.

2.2 Một số kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình elliptic suy biến cấp bốn

Trong mục này, chúng tôi sẽ giả thiết thêm $\gamma_j(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{N} > 4$ và trình bày một số kết quả về sự tồn tại nghiệm và tính nhiều nghiệm của Bài toán (2.1) với điều kiện thích hợp của hàm phi tuyến $f(x, \xi)$.

Định nghĩa 2.3. Hàm $u \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ được gọi là nghiệm yếu của Bài toán (2.1) nếu nó thỏa mãn đồng nhất thức

$$\int_{\Omega} \Delta_{\gamma} u \Delta_{\gamma} \varphi dx - \int_{\Omega} f(x, u(x)) \varphi dx = 0$$

với mọi $\varphi \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$.

Để tìm nghiệm yếu của Bài toán (2.1), ta đi tìm điểm tới hạn của phiếm hàm Φ như sau:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta_{\gamma} u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx. \quad (2.6)$$

Bổ đề 2.1. Giả sử $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory, tức là tồn tại $p \in (2, 2^*)$, $f_1(x) \in L^{p_1}(\Omega)$, $f_2(x) \in L^{p_2}(\Omega)$, trong đó $p_1/(p_1 - 1) < 2^*$, $pp_2/(p_2 - 1) \leq 2^*$, $p_1 > \max\{1, \frac{2^* p_2}{p_2(p-1)+2^*}\}$, $p_2 > 1$ thỏa mãn

$$|f(x, \xi)| \leq f_1(x) + f_2(x) |\xi|^{p-1} \quad \text{với } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ hầu khắp nơi.}$$

Khi đó $\Phi_1(u) \in C^1(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega), \mathbb{R})$ và

$$\Phi'_1(u)(v) = \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

với mọi $v \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, ở đây

$$\Phi_1(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad F(x, \xi) = \int_0^{\xi} f(x, \tau) d\tau.$$

Ta giả sử $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thỏa mãn:

(A1) Tồn tại $p \in (2, 2^*)$, $f_1(x) \in L^{p_1}(\Omega)$, $f_2(x) \in L^{p_2}(\Omega)$, ở đó $p_1/(p_1 - 1) < 2^*$, $pp_2/(p_2 - 1) < 2^*$, $p_1 > \max\{1, \frac{2^*p_2}{p_2(p-1)+2^*}\}$, $p_2 > 1$, sao cho

$$|f(x, \xi)| \leq f_1(x) + f_2(x) |\xi|^{p-1} \text{ hầu khắp nơi } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

(A2) $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(x, \xi)}{\xi} = 0$, đều với $x \in \Omega$.

(A3) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{|F(x, \xi)|}{\xi^2} = \infty$, với mọi $x \in \Omega$,

$$F(x, \xi) \geq 0 \quad \text{với mọi } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

(A4) Tồn tại các hằng số $\mu > 2$ và $r_1 > 0$ sao cho

$$\mu F(x, \xi) \leq \xi f(x, \xi) \quad \text{với mọi } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}, |\xi| \geq r_1;$$

(A'4) Tồn tại các hằng số C_0 , $r_2 > 0$ và $\kappa > \max\{1, \frac{\tilde{N}}{2}\}$ sao cho

$$|F(x, \xi)|^\kappa \leq C_0 |\xi|^{2\kappa} \mathcal{F}(x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}, |\xi| \geq r_2,$$

trong đó

$$\mathcal{F}(x, \xi) = \frac{1}{2} f(x, \xi) \xi - F(x, \xi);$$

(A5) $f(x, \xi)$ là một hàm lẻ với ξ .

Từ Bổ đề 2.1 và f thỏa mãn điều kiện (A1), phiếm hàm Φ là xác định trên $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$. Hơn nữa, $\Phi \in C^1(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega), \mathbb{R})$ và

$$\Phi'(u)(v) = \int_{\Omega} \Delta_{\gamma} u \Delta_{\gamma} v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

với mọi $v \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$. Từ định nghĩa của nghiệm yếu và đạo hàm của Φ , điểm tới hạn của Φ là nghiệm yếu của Bài toán (2.1). Kết quả chính của mục này là hai định lý sau.

Định lý 2.3. *Giả sử f thỏa mãn (A1)-(A3) và (A4). Bài toán (2.1) có nghiệm yếu không tầm thường.*

Hơn nữa, nếu điều kiện (A5) được thỏa mãn, Bài toán (2.1) có vô số nghiệm yếu không tầm thường.

Định lý 2.4. *Giả sử f thỏa mãn (A1)-(A3) và (A'4). Bài toán (2.1) có nghiệm yếu không tầm thường.*

Hơn nữa, nếu điều kiện (A5) được thỏa mãn, Bài toán (2.1) có vô số nghiệm yếu không tầm thường.

Bổ đề 2.2. *Giả sử f thỏa mãn (A1), (A3) và (A4). Phiếm hàm Φ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$ trên $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$.*

Bổ đề 2.3. *Giả sử f thỏa mãn các điều kiện (A1), (A3) và (A'4). Khi đó Φ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$ trên $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$.*

Bổ đề 2.4. *Giả sử (A1) và (A2) là thỏa mãn. Khi đó tồn tại $\alpha, \rho > 0$ thỏa mãn*

$$\Phi(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega), \quad \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = \rho.$$

Bổ đề 2.5. *Giả sử (A1) và (A3) là thỏa mãn. Khi đó, với mỗi không gian con hữu hạn chiều $\widehat{\mathbb{X}} \subset S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, tồn tại $R = R(\widehat{\mathbb{X}}) > 0$ thỏa mãn*

$$\Phi(u) \leq 0, \quad \forall u \in \widehat{\mathbb{X}}, \quad \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} \geq R.$$

Ví dụ 2.2. Bài toán

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right)^2 u = |u|^2 u & \text{trong miền giới nội } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = \frac{\partial}{\partial \nu} = 0 & \text{trên } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

có vô số nghiệm yếu không tầm thường. Cũng như trong Ví dụ 2.1 ta có $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = x^2$, $\tilde{N} = 7$, $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4} = \frac{11}{3}$ và bậc tăng trưởng của vế phải bằng 3 nhỏ hơn $\frac{11}{3}$.

Chương 3

Dáng điệu khi thời gian lớn của nghiệm phương trình hyperbolic suy biến mạnh

Nội dung của chương này dựa trên Bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1 Sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân

3.1.1 Đặt bài toán và các không gian hàm

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán sau:

$$u_{tt} + \lambda u_t + \gamma(X)u = P_{\alpha,\beta}u + f(X, u), t > 0, \quad (3.1)$$

$$X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} := \mathbb{R}^N,$$

$$u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \quad (3.2)$$

trong đó λ là hằng số dương, $u_0(X) \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$, $u_1(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ và

$$P_{\alpha,\beta}u = \Delta_x u + \Delta_y u + |x|^\alpha |y|^\beta \Delta_z u,$$

$$\begin{aligned}\Delta_x &:= \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \Delta_y := \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \quad \Delta_z := \sum_{l=1}^{N_3} \frac{\partial^2}{\partial z_l^2}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{tt} := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ |x|^{2\alpha} &:= \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 \right)^\alpha, \quad |y|^{2\beta} := \left(\sum_{j=1}^{N_2} y_j^2 \right)^\beta, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0 \\ \tilde{N}_{\alpha,\beta} &:= N_1 + N_2 + (1 + \alpha + \beta)N_3 > 2.\end{aligned}$$

Giả sử $f(X, \xi) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

i) $\gamma : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn tính chất sau:

(i_1) Với mỗi $\theta \in (0, \infty)$ có hằng số $C_\theta \in (0, \infty)$ sao cho với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\gamma(X)| |u(X)|^2 dX \leq \theta \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + C_\theta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \quad (3.3)$$

(i_2) Có hằng số $\lambda_0 > 0$ thỏa mãn với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\|\nabla_{\alpha,\beta} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(X) |u(X)|^2 dX \geq \lambda_0 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \quad (3.4)$$

ii)

$$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, \xi) \mapsto f(X, \xi)$$

là hàm thỏa mãn điều kiện Carathéodory, tức là với mỗi $\xi \in \mathbb{R}$ ánh xạ $X \mapsto f(X, \xi)$ là đo được Lebesgue và với hầu khắp $X \in \mathbb{R}^N$, ánh xạ $\xi \mapsto f(X, \xi)$ là liên tục.

Nguyên hàm của f theo biến u được định nghĩa bởi

$$F(X, \xi) = \int_0^\xi f(X, \tau) d\tau,$$

và f thỏa mãn các tính chất sau:

$$(f_1) \quad f(X, 0) = h(X) \in L^2(\mathbb{R}^N);$$

$$(f_2) \quad \text{Với mọi } X \in \mathbb{R}^N \text{ và } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \text{ thỏa mãn}$$

$$|f(X, \xi_1) - f(X, \xi_2)| \leq C_1 |\xi_1 - \xi_2| (g(X) + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho) \quad (3.5)$$

với $0 < \rho \leq \frac{2}{\tilde{N}_{\alpha, \beta} - 2}$ và $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đo được và thỏa mãn với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(X)|^2 |u(X)|^2 dX \leq C_2 \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2, \quad (3.6)$$

ở đây C_1, C_2 là các hằng số dương.

(f_3) Tồn tại các hàm đo được $g_1, g_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ thỏa mãn

$$f(X, u)u \leq g_1(X) \text{ với hầu khắp } X \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

$$F(X, u) \leq g_2(X) \text{ với hầu khắp } X \in \mathbb{R}^N, u \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Ký hiệu $L_\nu^p(\mathbb{R}^N)$ là tập tất cả các hàm đo được $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\|u\|_{L_\nu^p(\mathbb{R}^N)} := \sup_{Y \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B(Y)} |u(X)|^p dX \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

ở đây $Y \in \mathbb{R}^N$ và $B(Y) = \{X \in \mathbb{R}^N : Y < X < Y + 1_e, 1_e = (1, 1, \dots, 1)\}, p \geq 1$.

Bổ đề sau đây chỉ ra điều kiện đủ đối với hàm γ để nó thỏa mãn điều kiện (i_1).

Bổ đề 3.1. *Giả sử $p > 1$ và $\phi \in L_\nu^p(\mathbb{R}^N)$.*

(i) *Nếu $p \geq \frac{\tilde{N}_{\alpha, \beta}}{2}$ khi đó có hằng số $C \in (0, \infty)$ thỏa mãn*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(X)| |u(X)|^2 dX \leq C \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 \text{ với mọi } u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N).$$

(ii) Nếu $p > \frac{\tilde{N}_{\alpha,\beta}}{2}$ khi đó với mỗi $\theta \in (0, \infty)$ có một hằng số $C_\theta \in (0, \infty)$ thỏa mãn

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(X)| |u(X)|^2 dX \leq \theta \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + C_\theta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \quad \text{với mọi } u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N).$$

Chuẩn tương đương được thể hiện trong các bổ đề sau.

Bổ đề 3.2. Giả sử γ thỏa mãn điều kiện i) và $0 < \kappa < \lambda_0, 0 < \theta < 1$. Khi đó với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \widehat{C}_1 \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 &\leq \|\nabla_{\alpha,\beta} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(X) |u(X)|^2 dX - \kappa \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \\ &\leq \widehat{C}_2 \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2, \end{aligned}$$

trong đó $\widehat{C}_1 = \min\{(\lambda_0 - \kappa)(1 - \theta)/2(\lambda_0 + \theta + C_\theta), (\lambda_0 - \kappa)/2\}$, $\widehat{C}_2 = \max\{1 + \theta, \theta + C_\theta\}$ và θ, C_θ được xác định trong (3.3).

Bổ đề 3.3. Giả sử γ thỏa mãn điều kiện i). Với mỗi $u, v \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$ định nghĩa

$$((u, v))_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)} = (\nabla_{\alpha,\beta} u, \nabla_{\alpha,\beta} v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\gamma u, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Khi đó $((\cdot, \cdot))_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$ và chuẩn được định nghĩa bởi tích vô hướng trên là tương đương với chuẩn định nghĩa trên không gian $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$.

3.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân

Bổ đề 3.4. Toán tử liên hợp của toán tử A là toán tử A^* xác định như sau

$$A^* = - \begin{pmatrix} 0 & I \\ P_{\alpha,\beta} - \gamma(X)I & 0 \end{pmatrix}$$

với

$$D(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} : \chi, \psi \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N), P_{\alpha,\beta}\chi - \gamma(X)\chi \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Từ bổ đề này và Định lý Stone suy ra tồn tại C_0 -nhóm e^{tA} trên H .

Bổ đề 3.5. *Giả sử $f(X, \xi)$ thỏa mãn các điều kiện ii). Khi đó những khẳng định sau đúng.*

a) *Ánh xạ Nemytskii*

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \\ u &\longmapsto \widehat{f}(u)(X) := f(X, u(X)) \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$.

b) *Ánh xạ*

$$\begin{aligned} f^* : H &\longrightarrow H \\ U &\longmapsto f^*(U) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda v(X) + f(X, u(X)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của H .

Bây giờ ta sẽ chuyển Bài toán (3.1)-(3.2) về bài toán Cauchy cho hệ phương trình cấp một. Đặt $v(X, t) = u_t(X, t)$ và

$$U = \begin{pmatrix} u(X, t) \\ v(X, t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ P_{\alpha,\beta} - \gamma(X)I & 0 \end{pmatrix},$$

$$f^*(U)(X, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda v(X, t) + f(X, u(X, t)) \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0(X) \\ u_1(X) \end{pmatrix},$$

ở đây I là toán tử đơn vị trên $S_1^2(\mathbb{R}^N)$. Khi đó Bài toán (3.1)-(3.2) tương đương với bài toán sau đây cho hệ phương trình cấp một

$$\frac{dU}{dt} = AU + f^*(U), \tag{3.9}$$

$$U(0) = U_0. \tag{3.10}$$

Đặt $H = \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$, khi đó H là không gian Hilbert cùng với tích vô hướng sau

$$(U, \bar{U})_H = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \right) = ((u, \bar{u}))_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)} + (v, \bar{v})_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Miền xác định của toán tử A là $D(A)$ xác định bởi

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N); P_{\alpha, \beta} u - \gamma(X)u \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

Định nghĩa 3.1. Giả sử $T > 0, T \in \mathbb{R}$. Một ánh xạ liên tục $U : [0, T) \rightarrow H$ được gọi là *ng nghiệm tích phân* của Bài toán (3.9)-(3.10) nếu nó là nghiệm của phương trình tích phân

$$U(X, t) = e^{tA}U_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f^*(U(X, s)) ds, \quad t \in [0, T).$$

Nếu U khả vi hầu khắp nơi trên $[0, T)$ cùng với U_t và AU thuộc không gian $L_{loc}^1([0, T), H)$ và thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dU}{dt} = AU + f^*(U), \text{ hầu khắp nơi trên } (0, T) \text{ và } U(0) = U_0,$$

khi đó U được gọi là *ng nghiệm mạnh* của Bài toán (3.9)-(3.10).

Mệnh đề 3.1. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn. Khi đó với mỗi $R > 0$ tồn tại $T = T(R) > 0$ đủ nhỏ sao cho với $U_0 \in H, \|U_0\|_H \leq R$, Bài toán (3.9)-(3.10) tồn tại duy nhất một ng nghiệm tích phân thỏa mãn*

$$U(X, t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f^*(U(X, s)) ds, \quad t \in [0, T),$$

trên khoảng thời gian $[0, T)$. Ng nghiệm có thể thác triển trên $[0, \tau)$ và chúng ta có hoặc $\tau = +\infty$ hoặc $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \|U(., t)\|_H = +\infty$.

Bổ đề 3.6. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn. Khi đó nghiệm $u(t)$ của Bài toán (3.1)-(3.2) thỏa mãn*

$$\|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq M, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.11)$$

trong đó M là hằng số chỉ phụ thuộc vào các dữ liệu $\gamma(X), g(X), g_1(X), g_2(X)$ và R khi $\|u_0\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq R$.

Định lý 3.1. *Giả sử i), ii) được thỏa mãn và $U_0 \in H$. Khi đó Bài toán (3.1)-(3.2) tồn tại nghiệm toàn cục duy nhất $U \in C([0, \infty); H)$. Hơn nữa, với mỗi t cố định ánh xạ $U_0 \mapsto S(t)U_0 := U(t)$ là liên tục trên H .*

3.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục compact trong $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$

Bổ đề 3.7. *Giả sử i), ii) được thỏa mãn và $\mathcal{B}$ là một tập bị chặn nói trên trong H . Khi đó với mỗi nghiệm $U(t) = (u(X, t), u_t(X, t))$ của Bài toán (3.9)-(3.10) cùng với dữ kiện ban đầu $U_0 \in \mathcal{B}$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \lim_{T, R \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{|X|_{\alpha, \beta} \geq R} \left(|u(X, t)|^2 + |u_t(X, t)|^2 + |\nabla_{\alpha, \beta} u(X, t)|^2 \right) dX dt \\ = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

ở đây

$$|X|_{\alpha, \beta} = \left[|x|^{2(1+\alpha+\beta)} + |y|^{2(1+\alpha+\beta)} + (1+\alpha+\beta)^2 |z|^2 \right]^{\frac{1}{2(1+\alpha+\beta)}}.$$

Bổ đề 3.8. *Giả sử các điều kiện i), ii) được thỏa mãn và $U_n \rightharpoonup U$ trong H . Khi đó với mỗi $t \geq 0$ ta có*

$$S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U \text{ trong } H. \quad (3.13)$$

Bổ đề 3.9. *Giả sử các điều kiện i), ii) được thỏa mãn và dãy $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ yếu tới U trong H . Khi đó*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|S(T)U_n - S(T)U\|_H = 0. \quad (3.14)$$

Ta đưa ra kết quả chính của chương này như sau.

Định lý 3.2. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn. Khi đó $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là compact tiệm cận trong H , nghĩa là, với mọi dãy bị chặn $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ trong H và mọi dãy không âm $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $t_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, thì từ $\{S(t_n)U_n\}_{n=1}^{\infty}$ trích ra được một dãy con hội tụ trong H .*

Định lý dưới đây khẳng định sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm $S(t)$ trong H .

Định lý 3.3. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn. Khi đó nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi Bài toán (3.9)-(3.10) có một tập hút toàn cục $\mathcal{A}_H$ trong H .*

Ta xét hệ động lực $(H, S(t))$ mà đã được mô tả trong Mục 3.2. Ta ký hiệu $\mathcal{N}_0$ là tập hợp các điểm dừng của hệ này, tức là

$$\mathcal{N}_0 = \{(u, 0) \in H : -P_{\alpha, \beta}u + \gamma(X)u = f(X, u), X \in \mathbb{R}^N\}$$

Giả sử $U(t)$ là một quỹ đạo. Khi đó $U(t)$ là quỹ đạo đầy nếu

$$\lim_{i \rightarrow -\infty} \text{dist}(U(t), \mathcal{N}_0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \text{dist}(U(t), \mathcal{N}_0) = 0.$$

Đa tập không ổn định của hệ động lực này sẽ được xác định bởi

$$W^u(\mathcal{N}_0) = \bigcup W^u(u_0, 0),$$

trong đó $W^u(u_0, 0) = \{(u, v); S(t)(u_0, 0) \rightarrow (u, v) \text{ khi } t \rightarrow +\infty\}$.

Dưới đây là định lý về sự tồn tại của tập hút toàn cục compact và liên thông cùng với việc mô tả cấu trúc của nó.

Định lý 3.4. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thoả mãn. Khi đó hệ động lực $(H, S(t))$ liên kết với Bài toán (3.1)-(3.2) là hệ gradient và compact tiệm cận, đồng thời có một tập hút toàn cục compact liên thông $\mathcal{A}$. Hơn nữa, $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{N}_0)$ và là đa tập không ổn định của hệ động lực này.*

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Các kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

1. Đối với phương trình Δ_γ^2 -Laplace nửa tuyến tính cấp bốn đưa ra được đẳng thức tích phân kiểu Pohozaev của bài toán Dirichlet, từ đó chứng minh sự không tồn tại nghiệm không tầm thường trong miền δ_t -hình sao khi vế phải có độ tăng trưởng theo u lớn hơn $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$; đồng thời chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu, tính nhiều nghiệm của bài toán với điều kiện số hạng phi tuyến có bậc tăng trưởng theo u là nhỏ hơn $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$, $\tilde{N}$ là số chiều thuần nhất. Qua đó đã chứng tỏ giá trị $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ là giá trị tối hạn của bậc tăng trưởng của vế phải theo u .
2. Đối với phương trình hyperbolic chứa toán tử elliptic suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$: Đưa ra các điều kiện đủ đối với các thành phần tuyến tính và phi tuyến của phương trình để đảm bảo sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục; sự tồn tại của tập hút toàn cục compact liên thông trong không gian $S_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$, đồng thời mô tả cấu trúc của nó.

Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Liên quan tới chủ đề luận án, những vấn đề sau là mở và theo chúng tôi là đáng quan tâm:

1. Điều kiện tồn tại nghiệm của các bài toán biên nói trên trong miền không bị chặn.
2. Nghiên cứu các tính chất của tập hút toàn cục như: số chiều, sự phụ thuộc liên tục vào các tham số, tính trơn, ...
3. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình hyperbolic suy biến với các điều kiện biên khác nhau, chẳng hạn điều kiện biên không thuần nhất, điều kiện biên Neumann, điều kiện biên hỗn hợp, điều kiện biên phi tuyến, ... Để làm được điều này cần xây dựng được không gian có trọng tương ứng, định lý nhúng kiểu Sobolev.
4. Nghiên cứu sự tồn tại tập hút lùi, tập hút đều khi hàm phi tuyến phụ thuộc vào thời gian.
5. Các mô hình ứng dụng thực tế.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

- [1] D. T. Luyen and P. T. K. Yen (2021), “Long time behavior of solutions to semilinear hyperbolic equations involving strongly degenerate elliptic differential operators”, *J. Korean Math. Soc.* 58 (2021), No. 5, 1279–1298.
- [2] D. T. Luyen, H. T. Ngoan and P. T. K. Yen (2022), “Existence and non-existence of solutions for semilinear bi- Δ_γ -Laplace equation”. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 45, No. 2, 819–838.