

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

*

PHÙNG THỊ KIM YẾN

MỘT SỐ TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA
LỚP PHƯƠNG TRÌNH CHỨA
TOÁN TỬ ELLIPTIC SUY BIẾN MẠNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2023

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

*

PHÙNG THỊ KIM YẾN

MỘT SỐ TÍNH CHẤT NGHIỆM CỦA
LỚP PHƯƠNG TRÌNH CHỨA
TOÁN TỬ ELLIPTIC SUY BIẾN MẠNH

Ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9460102

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn

THÁI NGUYÊN - 2023

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả này được làm dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Hà Tiến Ngoạn. Các kết quả trong luận án viết chung với thầy hướng dẫn đều đã được sự nhất trí của thầy hướng dẫn khi đưa vào luận án. Các kết quả trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của các tác giả khác.

Thái Nguyên, tháng 03 năm 2023

Nghiên cứu sinh: Phùng Thị Kim Yến

LỜI CẢM ƠN

Luận án được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán thuộc trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn. Thầy đã dẫn dắt tác giả làm quen với nghiên cứu khoa học khi tác giả còn là học viên cao học. Ngoài những chỉ dẫn về mặt khoa học sự động viên và lòng tin tưởng của Thầy dành cho tác giả luôn là động lực giúp tác giả tin tưởng và say mê trong nghiên cứu khoa học. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy người đã truyền đạt kiến thức kinh nghiệm học tập và nghiên cứu khoa học và định hướng cho tác giả tiếp cận hướng nghiên cứu thời sự thú vị và ý nghĩa.

Tác giả vô cùng biết ơn các thầy, cô giáo cùng các anh chị em nghiên cứu sinh trong seminar Bộ môn Giải tích khoa Toán - trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Phòng Giải tích - Viện Toán học đã cổ vũ động viên và truyền cho tác giả nhiều kinh nghiệm quý báu trong nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin cảm ơn Ban Giám hiệu trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội, các anh chị em Bộ môn Toán, khoa Khoa học Đại cương, trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn quỹ NAFOSTED đã tài trợ cho tác giả trong suốt quá trình học nghiên cứu sinh.

Tác giả xin chân thành cảm ơn TS. Dương Trọng Luyện, Đại học Hoa Lư-Ninh Bình, người đã giúp đỡ và đóng góp nhiều ý kiến quý báu cho tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Mục lục

	Trang
Lời cam đoan	1
Lời cảm ơn	2
Mục lục	3
Một số quy ước và kí hiệu	6
Mở đầu	7
1 Kiến thức chuẩn bị	19
1.1 Toán tử Δ_γ -Laplace	19
1.1.1 Toán tử Δ_γ -Laplace	19
1.1.2 Ví dụ	21
1.2 Một số không gian hàm và định lý nhúng	22
1.2.1 Không gian kiểu Sobolev trong miền bị chặn và định lý nhúng	22
1.2.2 Không gian kiểu Sobolev trong toàn không gian và định lý nhúng	24
1.3 Một số kết quả về lý thuyết điểm tới hạn	25

1.4	Tập hút toàn cục và tính chất	27
1.4.1	Một số định nghĩa	27
1.4.2	Một số mệnh đề phụ trợ	30
2	Nghiệm của bài toán biên đối với phương trình elliptic suy biến cấp bốn	32
2.1	Đồng nhất thức kiểu Pohozaev và định lý về sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường	33
2.2	Một số kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình elliptic suy biến cấp bốn	39
3	Dáng điệu khi thời gian lớn của nghiệm phương trình hyperbolic suy biến mạnh	57
3.1	Sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân	58
3.1.1	Đặt bài toán và các không gian hàm	58
3.1.2	Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân	63
3.1.3	Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu.	72
3.2	Sự tồn tại tập hút toàn cục compact trong $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$	73
3.3	Phương pháp hệ gradient và cấu trúc của tập hút toàn cục compact	88
	Kết luận và kiến nghị	91
	Kết luận	91
	Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo	91

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án	93
Tài liệu tham khảo	93

MỘT SỐ QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU

$\mathbb{R}^N$	không gian vectơ thực N chiều
$ x $	chuẩn Euclid của phần tử x trong không gian $\mathbb{R}^N$
$C^k(\Omega)$	không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên miền Ω
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm lũy thừa bậc p khả tích Lebesgue trong miền Ω
B'	không gian đối ngẫu của không gian Banach B
$(\cdot, \cdot)_H$	tích vô hướng trong không gian Hilbert H
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	cặp đối ngẫu giữa H và H'
Id	ánh xạ đồng nhất
$\rightarrow$	hội tụ yếu
$\hookrightarrow$	phép nhúng liên tục
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	phép nhúng compact
$\text{Vol}(\Omega)$	độ đo Lebesgue của tập Ω trong không gian $\mathbb{R}^N$
Δ_γ	toán tử elliptic suy biến $\sum_{j=1}^N \partial_{x_j}(\gamma_j^2 \partial_{x_j})$
Δ_x	toán tử Laplace $\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$	pháp tuyến ngoài đơn vị trên biên $\partial\Omega$
$\nu_\gamma = (\gamma_1 \nu_1, \dots, \gamma_N \nu_N)$	pháp tuyến liên quan đến toán tử Δ_γ

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến xuất hiện nhiều trong các quá trình của vật lý, hoá học và sinh học, chẳng hạn các quá trình truyền nhiệt, quá trình truyền sóng trong cơ học chất lỏng, các phản ứng hoá học, các mô hình quần thể trong sinh học, v.v. Việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ, chính vì thế nó đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Các bài toán đối với phương trình hay hệ phương trình đạo hàm riêng thường có nguồn gốc từ các ngành khoa học kỹ thuật, đặc biệt nó là các mô hình giải tích của nhiều hiện tượng vật lý. Cho đến tận những năm 20 của thế kỷ thứ 20 thì các nghiệm của bài toán đối với phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng được hiểu chung nhất là nghiệm cổ điển, nghiệm đòi hỏi khả vi theo nghĩa thông thường đến cấp của phương trình, điều này gây rất nhiều khó khăn cho việc chứng minh cho tính đặt đúng của các bài toán này, đặc biệt tính trơn của nghiệm còn phụ thuộc vào cấu trúc hình học của miền được xét. Vì vậy, khái niệm nghiệm suy rộng được đưa ra bởi các lý do khác nhau. Việc đưa ra khái niệm nghiệm suy rộng là một bước ngoặt trung tâm về mặt phương pháp trong việc nghiên cứu phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng và các bài toán biến phân của chúng.

Trước tiên, chúng tôi trình bày tổng quan các nghiên cứu về các

tính chất nghiệm của một số bài toán cho các phương trình elliptic và hyperbolic á tuyến tính cấp hai trong đó chứa toán tử elliptic suy biến.

Cho đến nay lý thuyết về phương trình elliptic tuyến tính đã được phát triển tương đối hoàn thiện. Tính giải được của các bài toán biên cơ bản cho phương trình elliptic tuyến tính trong miền bị chặn đã được thiết lập, xong trong lý thuyết và thực tiễn, xuất hiện các phương trình elliptic phi tuyến và suy biến [12, 22, 25, 26, 49]. Loại phương trình phi tuyến đơn giản nhất là các phương trình á tuyến tính, khi phương trình là tuyến tính đối với các đạo hàm riêng cấp cao nhất. Các phương trình elliptic phi tuyến đòi hỏi các phương pháp nghiên cứu và công cụ tiếp cận mới, nhất là giải tích hàm phi tuyến. Các bài toán biên cổ điển trong miền bị chặn vẫn tiếp tục được đặt ra đối với phương trình elliptic phi tuyến [1, 11, 13, 18–20, 24, 27–34, 43, 58, 60]. Các nhà toán học đã đưa vào xét một số lớp phương trình elliptic suy biến á tuyến tính [23–29] và phát hiện ra rằng: trong một số trường hợp cấu trúc hình học của miền có ảnh hưởng quan trọng đến tính giải được của các bài toán biên ([37]).

Nhiều kết quả sâu sắc về tính giải tích, độ trơn của nghiệm của phương trình elliptic, hệ phương trình elliptic đã được thiết lập. Lý thuyết bài toán biên, bao gồm tính duy nhất, tính giải được, tính nhiều nghiệm, ...cho phương trình, hệ phương trình elliptic cũng được phát triển vô cùng mạnh mẽ. Tiếp theo sẽ là tổng quan về một số nghiên cứu cho tính giải được của bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic, elliptic suy biến cấp hai và cấp bốn nửa tuyến tính trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Như chúng ta đã biết, một trong những toán tử elliptic được nghiên cứu nhiều đó là toán tử Laplace trong không gian $\mathbb{R}^N$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}.$$

Nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm hay không tồn tại nghiệm của phương trình nửa tuyến tính chứa toán tử Laplace đã được nhiều nhà toán học tập trung nghiên cứu bắt đầu từ giữa thế kỷ thứ hai mươi.

Trong công trình [37], S. I. Pohozaev đã xét bài toán biên:

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

với Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$,

$$f(u) = \lambda u + |u|^{t-1}u.$$

Ta thấy $u = 0$ là nghiệm tầm thường của bài toán. S. I. Pohozaev đã đưa ra một đồng nhất thức mà hiện nay được mang tên ông và đã nhận được các kết quả sau đây:

- Nếu $N = 2, 1 < t < \infty$, thì Bài toán (1) luôn có nghiệm không tầm thường.
- Nếu $N \geq 3, \lambda = 0, t \geq \frac{N+2}{N-2}$ và Ω là hình sao thì Bài toán (1) không có nghiệm dương.
- Nếu $N \geq 3, \lambda = 0, 1 < t < \frac{N+2}{N-2}$ thì Bài toán (1) có nghiệm dương. Bởi vậy khi $N \geq 3$ giá trị $t_0 = \frac{N+2}{N-2}$ là giá trị rất đặc biệt. Giá trị liên quan $t_0 + 1 = \frac{2N}{N-2}$ là giá trị tới hạn để ta có định lý nhúng Sobolev, t_0 được gọi là số mũ Sobolev tới hạn của Bài toán (1) cho toán tử Laplace.

Những kết quả mang tính tiên phong này cùng với các bài toán mở được đặt ra đã thúc đẩy hàng trăm công trình nghiên cứu sau đó (xem [1, 9, 13, 42] cùng với các tài liệu tham khảo kèm theo).

Như vậy sự tồn tại nghiệm không tầm thường, tồn tại nghiệm dương của các bài toán biên chứa toán tử elliptic đạt được tương đối trọn vẹn. Một cách tương tự, các vấn đề lại được đặt ra đối với bài toán có chứa toán tử elliptic suy biến.

Vào năm 2012, các tác giả P.T. Thuỷ và N. M. Trí trong [47] đã xét bài toán Dirichlet cho phương trình elliptic suy biến cấp hai sau đây

$$\begin{cases} -P_{\alpha,\beta}u + f(u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

trong đó

$$P_{\alpha,\beta}u = \Delta_x u + \Delta_y u + |x|^{2\alpha}|y|^{2\beta}\Delta_z u, \quad \text{với } \alpha, \beta \geq 0, \quad (3)$$

Ω là miền giới nội trong $\mathbb{R}^{N_1+N_2+N_3}$, $x \in \mathbb{R}^{N_1}$, $y \in \mathbb{R}^{N_2}$, $z \in \mathbb{R}^{N_3}$, biên $\partial\Omega$ trơn, $f(u) = u|u|^{\gamma-1}$. Điều kiện không tồn tại nghiệm không tầm thường của Bài toán (2) trong trường hợp này là $\gamma > \frac{\tilde{N}_{\alpha,\beta} + 2}{\tilde{N}_{\alpha,\beta} - 2}$ và Ω là $P_{\alpha,\beta}$ -hình sao, $\tilde{N}_{\alpha,\beta} = N_1 + N_2 + (1 + \alpha + \beta)N_3$.

Cũng trong năm này, trong [29] các tác giả A. E. Kogoj và E. Lanconelli đã nghiên cứu phương trình elliptic suy biến cấp hai tổng quát hơn chứa toán tử Δ_γ , đã đưa ra đồng nhất thức kiểu Pohozaev, chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường của bài toán sau với một số điều kiện áp lên hàm $f(X, u)$ bằng phương pháp biến phân:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma u - \eta u + f(X, u) = 0 \text{ trong } \Omega, \\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

ở đó Ω là tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $\eta \geq 0$ và $\Delta_\gamma u$ sẽ được định nghĩa trong Chương I, Mục 1.1.1.

Năm 2016 các tác giả C. T. Anh và B. K. My trong [6] đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của Bài toán (4) với $\eta = 0$ và điều kiện của $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:

- $f(X, 0) = 0$, $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(X, \xi)}{|\xi|^{2_\gamma^* - 1}} = 0$, $2_\gamma^* = \frac{2\tilde{N}}{\tilde{N}-2}$, $(2_\gamma^* - 1 = \frac{\tilde{N}+2}{\tilde{N}-2})$;
- $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{F(X, \xi)}{|\xi|^2} = 0$ đều với mỗi $X \in \overline{\Omega}$, trong đó $F(X, u) = \int_0^u f(X, \tau) d\tau$;
- $\limsup_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{F(X, \xi)}{|\xi|^2} < \mu_1$ đều với mỗi $X \in \overline{\Omega}$, với μ_1 là giá trị đầu tiên của toán tử $-\Delta_\gamma$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;
- Tồn tại $C_* \geq 0, \theta > 0$ thỏa mãn:

$$H(X, s) \leq \theta H(X, t) + C_*, \forall s, t \in \mathbb{R}, 0 < |s| < |t|, \forall X \in \Omega,$$

$$\text{trong đó } H(X, s) = \frac{1}{2}sf(X, s) - F(X, s).$$

Khi đó Bài toán (4) đã được chứng minh là luôn có nghiệm yếu không tầm thường. Nhiều kết quả đối với bài toán chứa toán tử Δ_γ có thể xem trong [7, 31, 32, 54, 55]. Các tác giả đã chỉ ra rằng đại lượng $2_\gamma^* - 1 = \frac{\tilde{N}+2}{\tilde{N}-2}$ là bậc tăng trưởng tới hạn của hàm $f(x, u)$ theo biến u để Bài toán (4) có hoặc không có nghiệm không tầm thường. Phương trình elliptic cấp hai xuất hiện trong thực tế khá đa dạng như: phương trình mô tả dòng điện hoặc từ trường, mặt cực tiểu,... Gần đây một số chuyên gia, xem [56] đã nghiên cứu phương trình elliptic phi tuyến cấp bốn như phương trình để nghiên cứu sóng truyền trong cầu treo và độ võng tĩnh của bản đàn hồi trong chất lỏng. Bên cạnh đó, từ những năm 80 của thế kỷ trước, nhiều tác giả đã nghiên cứu các phương trình elliptic cấp bốn nửa tuyến

tính chứa bình phương của toán tử Δ Laplace

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(X, u), & X \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ u = \partial_\nu u = 0, & X \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (5)$$

trong đó $f(X, 0) = 0$.

Một số điều kiện đủ đối với dáng điệu của hàm $f(X, u)$ theo biến u đã được các tác giả đưa ra để đảm bảo cho sự tồn tại hoặc là sự không tồn tại nghiệm không tầm thường của Bài toán (5) hoặc là sự tồn tại ít nhất một nghiệm không tầm thường. Tuy nhiên, theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có các nghiên cứu đối với phương trình elliptic suy biến cấp bốn.

Cuối cùng dưới đây là tổng quan các nghiên cứu về các tính chất nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình hyperbolic suy biến. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm bài toán Cauchy cho các phương trình tiến hoá, trong đó có phương trình hyperbolic suy biến, đã được nghiên cứu trong các công trình [2–8, 14, 15, 17, 38, 46, 48, 50–53, 61] trong các miền bị chặn của biến không gian. Trong các công trình này, các tác giả đã sử dụng công cụ Động lực học vô hạn chiều và lý thuyết nửa nhóm để chứng minh sự tồn tại của tập hút toàn cục.

Năm 2005, Fall Djiby trong [21], bằng cách sử dụng phương pháp ước lượng phần đuôi của nghiệm đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ của bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} + \beta u_t + u = \Delta u + f(X, u), & X \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases}$$

ở đây β là hằng số dương, $u_0(X) \in H^1(\mathbb{R}^N)$, $u_1(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$, hàm $f(X, \xi)$ được định nghĩa bởi:

- $\xi - f(X, \xi) = \xi + h_1(\xi) - h_2(X)$, $h_2(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$,
- $h_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $h_1(0) = 0$, $h_1(\xi)\xi \geq CF_1(\xi) \geq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, trong đó C là hằng số dương, $F_1(\xi) = \int_0^\xi h_1(\tau) d\tau$,
- $0 \leq \limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{h_1(\xi)}{\xi} < \infty$.

Năm 2014, các tác giả A. E. Kogoj và S. Sonner trong [32] đã nghiên cứu một lớp các phương trình hyperbolic suy biến, trong đó có bài toán sau đây

$$\begin{cases} u_{tt}(X, t) + \lambda u_t = P_{\alpha, \beta} u(X, t) + f(u(X, t)), & X \in \Omega, t > 0, \\ u(X, t) = 0, & X \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \end{cases} \quad (6)$$

trong đó Ω là miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^N$, $P_{\alpha, \beta}$ là toán tử được xác định bởi (3), λ là hằng số dương và $f(\xi)$ thỏa mãn điều kiện:

$$|f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq C|\xi_1 - \xi_2|(1 + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho), \quad (7)$$

với $C > 0$, $0 \leq \rho < \frac{2}{\tilde{N}_{\alpha, \beta} - 2}$, $\tilde{N}_{\alpha, \beta} = N_1 + N_2 + (\alpha + \beta + 1)N_3$;

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow +\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} < \mu_1, \quad (8)$$

với μ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $(-P_{\alpha, \beta})$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất.

Khi đó Bài toán (6) có nghiệm toàn cục, có tập hút toàn cục. Để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục, tác giả A. E. Kogoj và S. Sonner đã sử dụng ý tưởng và cách tiếp cận trong [15, 39] về đánh giá đuôi nghiệm.

Từ những kết quả ở trên, ta thấy rằng đối với lớp phương trình elliptic suy biến, phương trình hyperbolic suy biến mặc dù đã có một số kết quả, tuy nhiên các kết quả thu được vẫn còn ít và còn nhiều vấn đề mở cần được nghiên cứu. Nghiên cứu về phương trình chứa toán tử elliptic suy biến thường phức tạp hơn so với phương trình chứa toán tử elliptic và nó có ứng dụng trong thực tế rất rộng lớn khi ta nghiên cứu vật chất có mật độ không đồng đều, chỗ rất mỏng chỗ lại rất dày. Những vật chất này tồn tại vô số trong vũ trụ bao la của chúng ta. Những vấn đề mở mà chúng tôi quan tâm trong luận án này bao gồm:

- Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm không tầm thường của bài toán Dirichlet trong miền bị chặn đối với phương trình elliptic suy biến cấp bốn chứa toán tử Δ_γ^2 trong một số trường hợp liên quan đến bậc tăng trưởng của hàm phi tuyến. Vấn đề này được ứng dụng trong lý thuyết đàn hồi.
- Nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm tích phân toàn cục; đáng chú ý khi thời gian rất lớn của nghiệm (thông qua tập hút toàn cục) của Bài toán (6) chứa toán tử elliptic suy biến $P_{\alpha,\beta}$ trong cả không gian $\mathbb{R}^N$ và chứng minh sự tồn tại của tập hút toàn cục khi phương trình có thêm số hạng $l(X)u$ và vế phải $f(X, \xi)$ phụ thuộc thêm biến X .

Với các lý do nêu trên chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là “**Một số tính chất nghiệm của lớp phương trình chứa toán tử elliptic suy biến mạnh**”.

2. Mục đích nghiên cứu

- *Nội dung 1*: Nghiên cứu sự tồn tại và không tồn tại nghiệm của bài toán Dirichlet cho phương trình Δ_γ^2 -Laplace nửa tuyến tính cấp bốn

trong miền bị chặn với các nội dung: sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường; sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường.

- *Nội dung 2*: Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận khi thời gian lớn của các phương trình hyperbolic nửa tuyến tính có chứa các toán tử elliptic suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$ trong toàn không gian với các nội dung sau: sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục; sự tồn tại tập hút toàn cục compact và cấu trúc của nó.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là xét bài toán biên và bài toán biên giá trị ban đầu có chứa toán tử elliptic suy biến Δ_γ , được xác định bởi

$$\Delta_\gamma u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\gamma_j^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} \right),$$

trong đó γ_j là các hàm thỏa mãn một số điều kiện phù hợp được phát biểu sau.

4. Phương pháp nghiên cứu

- Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán chúng tôi sử dụng phương pháp biến phân và các định lý tổng quát của lý thuyết điểm tới hạn.

- Để nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm mạnh chúng tôi thiết lập các đồng nhất thức kiểu Pohozaev phù hợp đối với toán tử Δ_γ^2 và khai thác cấu trúc hình học của miền đang xét.

- Để nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân toàn cục, chúng tôi sử dụng các phương pháp và công cụ của Giải tích hàm phi tuyến: phương pháp xấp xỉ Galerkin, các dạng phù hợp của bổ đề compact, các bổ đề xử lý số hạng phi tuyến.

- Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm và sự tồn tại của tập hút toàn cục, chúng tôi sử dụng các công cụ và phương pháp của lý

thuyết hệ động lực vô hạn chiều (xem [10, 14, 15, 35, 40, 44, 57]), nói riêng là phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận và phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm.

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án đã đạt được những kết quả chính sau đây.

- Đối với bài toán Dirichlet trong miền bị chặn cho phương trình elliptic suy biến cấp bốn chứa toán tử Δ_γ^2 đã đưa ra được các điều kiện đủ về độ tăng trưởng của số hạng phi tuyến để không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường; chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán với một số điều kiện về độ tăng trưởng của số hạng phi tuyến. Đây là nội dung của Chương 2.

- Đối với phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$ trong $\mathbb{R}^N$: đưa ra điều kiện đủ để có sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục của bài toán Cauchy. Chứng minh được sự tồn tại của tập hút toàn cục compact và mô tả cấu trúc của nó. Đây là nội dung của Chương 3.

Các kết quả của luận án là mới, có ý nghĩa khoa học và góp phần hoàn thiện việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm trong miền bị chặn của bài toán biên cho phương trình elliptic suy biến cấp bốn và đáng chú ý tiệm cận nghiệm của các phương trình hyperbolic tắt dần chứa toán tử elliptic suy biến trong cả không gian.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố trong 02 bài báo trên các tạp chí chuyên ngành quốc tế và đã được báo cáo tại:

- Xê-mi-na của Bộ môn Giải tích Toán học, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên;
- Xê-mi-na của phòng Giải tích Toán học, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

6. Cấu trúc luận án

Ngoài các phần mở đầu, tổng quan, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình được công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án bao gồm 3 chương

- Chương 1: *Trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho các chương sau.* Trong chương này chúng tôi trình bày về toán tử Δ_γ , một số tính chất, ví dụ và một số kiến thức bổ trợ (một số không gian hàm và một số định lý nhúng); trình bày một số kết quả về điểm tới hạn; tập hút toàn cục và tính chất.

- Chương 2: *Trình bày sự tồn tại nghiệm và không tồn tại của nghiệm của phương trình Δ_γ^2 -Laplace nửa tuyến tính trong miền bị chặn.* Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và không tồn tại nghiệm cho bài toán Dirichlet đối với phương trình nửa tuyến tính cấp bốn chứa toán tử Δ_γ^2 :

$$\Delta_\gamma^2 u = f(x, u) \text{ trong } \Omega, u = \partial_\gamma u = 0 \text{ trên } \partial\Omega,$$

trong đó ν là pháp tuyến ngoài đơn vị tại các điểm biên của Ω . Chương này gồm ba phần. Phần thứ nhất trình bày về đồng nhất thức kiểu Pohozaev đối với toán tử Δ_γ^2 . Phần thứ hai đưa ra một số kết quả về sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường. Phần ba nói về sự tồn tại của nghiệm yếu không tầm thường.

Nội dung của chương này dựa trên Bài báo [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

- Chương 3: *Trình bày dáng điệu khi thời gian lớn của nghiệm phương trình hyperbolic suy biến mạnh trong cả không gian.* Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của tập hút toàn cục compact cho nửa nhóm của bài toán Cauchy đối với phương trình hyperbolic suy biến nửa

tuyến tính. Chương này gồm hai phần. Phần thứ nhất trình bày về sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục, trong cả không gian. Phần thứ hai trình bày về các điều kiện đối với vế phải và thành phần tuyến tính của phương trình và đưa phương trình về hệ phương trình cấp một, sau đó chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $S_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Nội dung của chương này dựa trên Bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả phục vụ cho các chương sau. Cụ thể chúng tôi trình bày: định nghĩa toán tử elliptic suy biến Δ_γ , một số không gian hàm, các kết quả về phép nhúng, một số kết quả của phương pháp biến phân và lý thuyết điểm tới hạn, định lý qua núi, nửa nhóm, tập hút toàn cục và một số kiến thức bổ trợ khác.

1.1 Toán tử Δ_γ -Laplace

1.1.1 Toán tử Δ_γ -Laplace

Trong không gian $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ta định nghĩa toán tử (xem trong [29]):

$$\Delta_\gamma := \sum_{j=1}^N \partial_{x_j} (\gamma_j^2 \partial_{x_j}), \quad \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, 2, \dots, N,$$

trong đó hàm $\gamma_j : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \in C(\mathbb{R}^N)$ và $\gamma_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, N$ trong $\mathbb{R}^N \setminus \Pi$, với

$$\Pi := \left\{ X = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \prod_{j=1}^N x_j = 0 \right\}.$$

Ta giả sử $\gamma_j(X)$ thỏa mãn các tính chất:

- i) $\gamma_1(X) \equiv 1, \gamma_j(X) = \gamma_j(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}), j = 2, \dots, N;$
- ii) Với mỗi $X \in \mathbb{R}^N$ ta có $\gamma_j(X) = \gamma_j(X^*), j = 1, 2, \dots, N$, trong đó

$$X^* = (|x_1|, \dots, |x_N|) \text{ nếu } X = (x_1, x_2, \dots, x_N);$$

- iii) Tồn tại hằng số $\rho \geq 0$ sao cho: nếu $\gamma_j \in C^1(\mathbb{R}_+^N)$ thì

$$0 \leq x_k \partial_{x_k} \gamma_j(X) \leq \rho \gamma_j(X), \forall k \in \{1, 2, \dots, j-1\}, \forall j = 2, \dots, N,$$

với mỗi $X \in \mathbb{R}_+^N := \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j > 0, \forall j = 1, 2, \dots, N\};$

- iv) Tồn tại nửa nhóm $\{\delta_t\}_{t>0}$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned} \delta_t : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (x_1, \dots, x_N) &\longmapsto \delta_t(x_1, \dots, x_N) = (t^{\varepsilon_1} x_1, \dots, t^{\varepsilon_N} x_N) \end{aligned}$$

với $1 = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \dots \leq \varepsilon_N$, sao cho γ_j là δ_t -thuần nhất bậc $\varepsilon_j - 1$, tức là

$$\gamma_j(\delta_t(X)) = t^{\varepsilon_j - 1} \gamma_j(X), \forall X \in \mathbb{R}^N, \forall t > 0, j = 1, \dots, N. \quad (1.1)$$

Khi đó toán tử Δ_γ là δ_t -thuần nhất bậc hai, tức là

$$\Delta_\gamma(u(\delta_t)(X)) = t^2(\Delta_\gamma u)(\delta_t(X)), \text{ nếu } \gamma_j \in C^2(\mathbb{R}^N), j = 2, 3, \dots, N.$$

Ta định nghĩa $\tilde{N}$ là *số chiều thuần nhất* của $\mathbb{R}^N$ đối với nửa nhóm $\{\delta_t\}_{t>0}$, tức là

$$\tilde{N} := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N.$$

Số chiều thuần nhất $\tilde{N}$ này đóng vai trò rất quan trọng không những trong các định lý nhúng của các không gian hàm liên quan đến toán tử Δ_γ mà còn tham gia vào các điều kiện đối với vế phải của phương trình.

1.1.2 Ví dụ

Trong mục này chúng tôi đưa ra một số ví dụ về toán tử Δ_γ .

Ví dụ 1.1. (Toán tử Grushin (xem [29])). Cho $\alpha \geq 0$ là một số thực, toán tử Grushin là toán tử có dạng

$$G_\alpha := \Delta_x + |x|^{2\alpha} \Delta_y, \quad \alpha \geq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2},$$

trong đó $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_2$, $|x|$ là chuẩn Euclide trong không gian $\mathbb{R}^{N_1}$ và $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ xác định bởi

$$\gamma_i(x, y) = 1, i = 1, \dots, N_1, \quad \gamma_j(x, y) = |x|^\alpha, j = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2.$$

Nhóm co giãn $\{\delta_t\}_{t>0}$ xác định bởi $\delta_t(x, y) = (tx, t^{1+\alpha}y)$.

Số chiều thuần nhất tương ứng với nhóm $\{\delta_t\}_{t>0}$ là $\tilde{N}_\alpha = N_1 + N_2(1 + \alpha)$.

Ví dụ 1.2. (Toán tử elliptic suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$). Cho $\alpha, \beta \geq 0$ là các số thực. Xét toán tử

$$P_{\alpha,\beta} := \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2\alpha}|y|^{2\beta}\Delta_z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3},$$

với $N_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, 2, 3$, $|x|, |y|$ tương ứng là chuẩn Euclide của x, y trong không gian $\mathbb{R}^{N_1}, \mathbb{R}^{N_2}$ và $\gamma = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \gamma^{(3)})$ xác định bởi

$$\gamma_j^{(1)}(x, y, z) \equiv 1, \quad j = 1, \dots, N_1;$$

$$\gamma_j^{(2)}(x, y, z) \equiv 1, \quad j = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2;$$

$$\gamma_l^{(3)}(x, y, z) = |x|^\alpha |y|^\beta, \quad l = N_1 + N_2 + 1, \dots, N_1 + N_2 + N_3.$$

Nhóm co giãn $\{\delta_t\}_{t>0}$ và số chiều thuần nhất tương ứng là

$$\{\delta_t\}(x, y, z) = (tx, ty, t^{1+\alpha+\beta}z),$$

$$\tilde{N} = N_1 + N_2 + (1 + \alpha + \beta)N_3.$$

Khi $\beta = 0$ thì toán tử này trở thành toán tử suy biến P_α được xét trong [46].

Ví dụ 1.3. Tổng quát hơn ta xét đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})$ với $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, k-1$. Ta định nghĩa toán tử

$$\Delta_\gamma = \Delta_{x^{(1)}} + |x^{(1)}|^{2\alpha_1} \Delta_{x^{(1)}} + |x^{(2)}|^{2\alpha_2} \Delta_{x^{(2)}} + \dots + |x^{(k-1)}|^{2\alpha_{k-1}} \Delta_{x^{(k-1)}}$$

với $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_k}$, $N_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \dots, k$.

Khi đó hàm $\gamma = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(k)})$ xác định bởi

$$\gamma_j^{(1)}(x) \equiv 1, j = 1, \dots, N_1,$$

$$\gamma_j^{(i)}(x) = |x^{(i-1)}|^{\alpha_{i-1}}, i = 2, \dots, k, j = N_1 + \dots + N_{i-1} + 1, \dots, N_1 + \dots + N_{i-1} + N_i$$

và nhóm co giãn tương ứng là

$$\delta_t(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}) = (t^{\varepsilon_1} x^{(1)}, t^{\varepsilon_2} x^{(2)}, \dots, t^{\varepsilon_k} x^{(k)})$$

với $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_i = 1 + \alpha_{i-1} \varepsilon_{i-1}$ với $i = 2, \dots, k$. Số chiều thuần nhất tương ứng là

$$\tilde{N} = \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2 + \dots + \varepsilon_k N_k.$$

1.2 Một số không gian hàm và định lý nhúng

Trong mục này giới thiệu một số không gian kiểu Sobolev trong miền bị chặn và trong toàn không gian và các định lý nhúng tương ứng.

1.2.1 Không gian kiểu Sobolev trong miền bị chặn và định lý nhúng

Giả sử các hàm số $\gamma_j(x)$, $j = 1, \dots, N$ đã được xác định trong Mục 1.1.1.

Định nghĩa 1.1 ([34]). Giả sử Ω là miền bị chặn có biên trơn trong $\mathbb{R}^N$. Ta định nghĩa $S_{\gamma,0}^{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < +\infty$) là bao đóng của $C_0^\infty(\Omega)$ cùng với chuẩn

$$\|u\|_{S_{\gamma,0}^{1,p}(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N |\gamma_j \partial_{x_j} u|^p \right) dX \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Ta định nghĩa không gian $S_{\gamma}^{2,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < +\infty$) là tập tất cả các hàm $u \in L^p(\Omega)$ thỏa mãn $\gamma_j \partial_{x_j} u \in L^p(\Omega)$ và $\gamma_j \partial_{x_j} (\gamma_i \partial_{x_i} u) \in L^p(\Omega)$ với mọi $i, j = 1, \dots, N$. Chuẩn được định nghĩa trên không gian $S_{\gamma}^{2,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < +\infty$) là

$$\|u\|_{S_{\gamma}^{2,p}(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left(|u|^p + \sum_{j=1}^N |\gamma_j \partial_{x_j} u|^p + \sum_{i,j=1}^N |\gamma_j \partial_{x_j} (\gamma_i \partial_{x_i} u)|^p \right) dX \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Nếu $p = 2$ khi đó tích vô hướng trên không gian $S_{\gamma}^{2,2}(\Omega)$ là

$$\begin{aligned} (u, v)_{S_{\gamma}^{2,2}(\Omega)} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^N (\gamma_j \partial_{x_j} u, \gamma_j \partial_{x_j} v)_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^N (\gamma_j \partial_{x_j} (\gamma_i \partial_{x_i} u), \gamma_j \partial_{x_j} (\gamma_i \partial_{x_i} v))_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Giả sử $C_0^\infty(\Omega) \subset S_{\gamma}^{2,2}(\Omega)$. Khi đó, không gian $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ được định nghĩa là bao đóng của $C_0^\infty(\Omega)$ trong không gian $S_{\gamma}^{2,2}(\Omega)$.

Ký hiệu

$$\nabla_{\gamma} u := (\gamma_1 \partial_{x_1} u, \gamma_2 \partial_{x_2} u, \dots, \gamma_N \partial_{x_N} u), \quad |\nabla_{\gamma} u| := \left(\sum_{j=1}^N |\gamma_j \partial_{x_j} u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sử dụng (1.18) trong [29], ta có:

Mệnh đề 1.1 (Xem trong [34]). *Giả sử Ω là một miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^N$, $\tilde{N} > 4$. Khi đó phép nhúng*

$$S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \text{ở đó } 1 \leq q \leq 2_{*}^{\gamma} := \frac{2\tilde{N}}{\tilde{N} - 4}$$

là liên tục, tức là tồn tại $C_q > 0$ thỏa mãn

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_q \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}, \quad \forall u \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega).$$

Hơn nữa, phép nhúng sau:

$$S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

là compact với mỗi $1 \leq q < 2_*^\gamma$.

Nhận xét 1.1. Từ [28], ta nhận thấy $\|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}$ và

$$|||u|||_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\Delta_\gamma u|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}}$$

là hai chuẩn tương đương.

1.2.2 Không gian kiểu Sobolev trong toàn không gian và định lý nhúng

Ký hiệu $S_1^2(\mathbb{R}^N)$ là bao đóng của không gian $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ cùng với chuẩn

$$\|u\|_{S_1^2(\mathbb{R}^N)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^2 + |\nabla_{\alpha,\beta} u|^2 \right) dX \right\}^{\frac{1}{2}},$$

trong đó

$$\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

$$\nabla_{\alpha,\beta} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{N_1}}, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial y_{N_2}}, |x|^\alpha |y|^\beta \frac{\partial u}{\partial z_1}, \dots, |x|^\alpha |y|^\beta \frac{\partial u}{\partial z_{N_3}} \right)$$

và

$$|\nabla_{\alpha,\beta} u| := \left(\sum_{i=1}^{N_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 + \sum_{j=1}^{N_2} \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 + |x|^{2\alpha} |y|^{2\beta} \sum_{l=1}^{N_3} \left| \frac{\partial u}{\partial z_l} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Khi đó $S_1^2(\mathbb{R}^N)$ là không gian Hilbert cùng với tính vô hướng

$$(u, v)_{S_1^2(\mathbb{R}^N)} = (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\nabla_{\alpha, \beta} u, \nabla_{\alpha, \beta} v)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Từ Bổ đề 2.1 trong [3], ta có các khẳng định sau

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dX \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p) \|u\|_{S_1^2(\mathbb{R}^N)},$$

trong đó $2 \leq p \leq 2_{\alpha, \beta}^* = \frac{2\tilde{N}_{\alpha, \beta}}{\tilde{N}_{\alpha, \beta} - 2}$, $C(p) > 0$, $\tilde{N}_{\alpha, \beta} = N_1 + N_2 + (1 + \alpha + \beta)N_3$. Vì vậy, $L^p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow S_1^2(\mathbb{R}^N)$. Hơn nữa, nếu $2 \leq p < 2_{\alpha, \beta}^*$ thì phép nhúng này là compact.

Nhận xét 1.2. Khi $\Delta_\gamma = P_{\alpha, \beta}$ thì $2_*^\gamma = 2_*^{\alpha, \beta} = \frac{2\tilde{N}_{\alpha, \beta}}{\tilde{N}_{\alpha, \beta} - 4}$. Do đó, $2_{\alpha, \beta}^*$ và $2_*^{\alpha, \beta}$ là hai đại lượng khác nhau.

1.3 Một số kết quả về lý thuyết điểm tới hạn

Mục này trình bày một số kết quả về điểm tới hạn và giá trị tới hạn để sau này áp dụng trong chứng minh sự tồn tại nghiệm và vấn đề nhiều nghiệm của bài toán Dirichlet đối với phương trình elliptic suy biến.

Định nghĩa 1.2 ([62, 63]). Cho B và $\mathbb{B}$ là các không gian Banach, $\mathcal{O}(u)$ là lân cận của điểm u .

(i) Ánh xạ $\Phi : \mathcal{O}(u) \subset B \rightarrow \mathbb{B}$ được gọi là khả vi Gâteaux tại $u \in \mathcal{O}(u)$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính bị chặn $T \in \mathcal{L}(B, \mathbb{B})$ sao cho

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(u + th) - \Phi(u)}{t} = Th, \quad \forall h \in B \quad (1.2)$$

(ii) Ánh xạ $\Phi : \mathcal{O}(u) \subset B \rightarrow \mathbb{B}$ được gọi là *khả vi Fréchet tại điểm u* nếu sự hội tụ trong (1.2) là đều đối với h thoả mãn $\|h\|_B \leq 1$, nghĩa là

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\Phi(u+h) - \Phi(u) - Th\|_{\mathbb{B}}}{\|h\|_B} = 0. \quad (1.3)$$

Nếu Φ khả vi Gâteaux (Fréchet) thì ánh xạ T được gọi là đạo hàm Gâteaux (Fréchet) của Φ tại u và ký hiệu là $D\Phi(u)$. Như vậy, $D\Phi(u) = T$.
(iii) Nếu đạo hàm $D\Phi(u)$ liên tục tại một lân cận của u thì Φ được gọi là khả vi liên tục Gâteaux (Fréchet) tại u .

Nhận xét 1.3. Nếu Φ khả vi Gâteaux (Fréchet) trong một lân cận của $u \in \mathcal{O}(u)$ và ánh xạ biến phần tử $u \in \mathcal{O}(u)$ thành phần tử $\Phi_u \in \mathcal{L}(B, \mathbb{B})$ liên tục tại u thì Φ được gọi là khả vi liên tục Gâteaux (Fréchet) tại u . Người ta chứng minh được rằng, nếu Φ là khả vi liên tục Gâteaux tại u thì Φ khả vi liên tục Fréchet tại u và khi đó các đạo hàm Gâteaux và Fréchet thu được là trùng nhau.

Định nghĩa 1.3 ([62, 63]). Giả sử Φ là ánh xạ khả vi Fréchet tại u từ không gian Banach B vào không gian Banach $\mathbb{B}$. Cho $D\Phi : B \rightarrow \mathbb{B}$ là đạo hàm Fréchet tại u của Φ . Khi đó *đạo hàm của Φ tại u theo hướng $v \in B$* ký hiệu bởi $\langle v, D\Phi(u) \rangle = D\Phi(u)(v)$.

Định nghĩa 1.4 ([62, 63]). Giả sử $\mathbb{B}$ là không gian Banach thực cùng với không gian đối ngẫu $\mathbb{B}^*$ và $\Phi \in C^1(\mathbb{B}, \mathbb{R})$. Với mỗi $c \in \mathbb{R}$ nói Φ *thoả mãn điều kiện $(C)_c$* nếu với mỗi dãy $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{B}$ với

$$\Phi(x_n) \rightarrow c \text{ và } (1 + \|x_n\|_{\mathbb{B}}) \|\Phi'(x_n)\|_{\mathbb{B}^*} \rightarrow 0,$$

thì có một dãy con $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ hội tụ mạnh trong $\mathbb{B}$.

Nếu Φ thoả mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c > 0$, ta nói Φ thoả mãn *điều kiện Cerami*.

Định lý 1.1 (Xem trong [62, 63]). *Giả sử $\mathbb{B}$ là không gian Banach thực và giả sử $\Phi \in C^1(\mathbb{B}, \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện Cerami và*

(i) *Tồn tại hằng số $\rho, \alpha > 0$ thỏa mãn $\Phi(u) \geq \alpha$*

với mọi $\|u\|_{\mathbb{B}} = \rho$;

(ii) *Tồn tại $u_1 \in \mathbb{B}, \|u_1\|_{\mathbb{B}} > \rho$ thỏa mãn $\Phi(u_1) \leq 0$.*

Khi đó Φ có ít nhất một điểm tới hạn x_0 và giá trị tới hạn β tương ứng xác định như sau

$$\beta = \inf_{\lambda \in \Lambda} \max_{0 \leq t \leq 1} \Phi(\lambda(t)) \geq \alpha,$$

ở đây $\Lambda := \{\lambda \in C([0, 1], \mathbb{B}) : \lambda(0) = 0, \lambda(1) = u_1\}$.

Định lý 1.2 (xem trong [64]). *Giả sử $\mathbb{B}$ là không gian Banach vô hạn chiều, $\mathbb{B} = \mathbb{Y} \oplus \mathbb{Z}$, trong đó $\mathbb{Y}$ là không gian hữu hạn chiều và giả sử $\Phi \in C^1(\mathbb{B}, \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện Cerami, $\Phi(0) = 0, \Phi(-u) = \Phi(u)$ với mọi $u \in \mathbb{B}$ và*

(i) *Tồn tại hằng số $\rho, \alpha > 0$ thỏa mãn $\Phi(u) \geq \alpha$ với mọi $u \in \mathbb{Z}$ và $\|u\|_{\mathbb{B}} = \rho$;*

(ii) *Với mỗi không gian con hữu hạn chiều $\widehat{\mathbb{B}} \subset \mathbb{B}$, tồn tại $R = R(\widehat{\mathbb{B}}) > 0$ thỏa mãn $\Phi(u) \leq 0$ trên $\widehat{\mathbb{B}} \setminus B_R$, trong đó $B_R = \{x \in \mathbb{B}; \|x\|_{\mathbb{B}} \leq R\}$.*

Khi đó Φ có một dãy các giá trị tới hạn không bị chặn.

1.4 Tập hút toàn cục và tính chất

1.4.1 Một số định nghĩa

Định nghĩa 1.5 ([39]). *Giả sử B là một không gian Banach và $S(t) : B \rightarrow B$, với $t \geq 0$ là một họ các ánh xạ thỏa mãn*

- i) $S(0) = Id$, với Id là phép đồng nhất;
- ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, với mọi $t, s \geq 0$;
- iii) Với mỗi $t \geq 0, S(t) \in C(B, B)$;
- iv) Với mỗi $u \in B, t \mapsto S(t)u \in C((0, +\infty), B)$.

Khi đó $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ được gọi là *nửa nhóm liên tục trên B* .

Định nghĩa 1.6 ([36]). Họ ánh xạ $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ được gọi là một nửa nhóm tuyến tính liên tục mạnh trên B (hoặc đơn giản là C_0 -nửa nhóm trên B) nếu $S(t) : H \rightarrow B$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn trên B với mọi $t \geq 0$ và

- i) $S(0) = Id$, với Id là phép đồng nhất;
- ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$, với mọi $t, s \geq 0$;
- iii) Với mỗi $u \in B, t \mapsto S(t)u \in C([0, +\infty), B)$.

Định nghĩa 1.7 ([62, 63]). Giả sử $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là một C_0 -nửa nhóm trên B . Ta định nghĩa *toán tử sinh A* của nó như sau:

$$D(A) = \left\{ u \in B : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ tồn tại trong } B \right\},$$

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = \frac{d^+(S(t)u)}{dt} \Big|_{t=0}, \quad \forall u \in D(A).$$

Định nghĩa 1.8 ([39]). Giả sử $S(t)$ là một nửa nhóm trên B .

1. Hàm $\Phi \in C(B, \mathbb{R})$ được gọi là *hàm Lyapunov* nếu

$$\Phi(S(t)u) \leq \Phi(u), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in B.$$

2. Hàm Lyapunov Φ được gọi là *hàm Lyapunov ngặt* nếu $\Phi(S(t)u) = \Phi(u)$ với mọi $t \geq 0$, kéo theo u là điểm cân bằng, tức là $S(t)u = u$ với mọi $t \geq 0$.

3. Nửa nhóm $S(t)$ được gọi là *hệ gradient liên tục* nếu nó có hàm Lyapunov ngặt và nửa nhóm $S(t)$ là nửa nhóm liên tục.

Định nghĩa 1.9 ([55]). Một tập con khác rỗng $\mathcal{A}$ của B gọi là một *tập hút toàn cục* đối với nửa nhóm $(S(t))_{t \geq 0}$ nếu:

1. $\mathcal{A}$ là một tập đóng và bị chặn;
2. $\mathcal{A}$ là tập bất biến, tức là $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, với mọi $t \geq 0$;
3. $\mathcal{A}$ là hút mọi tập bị chặn, tức là với mọi tập bị chặn $\mathcal{B} \subset B$ thì $\text{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow +\infty$, ở đây

$$\text{dist}(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) = \sup_{a \in S(t)\mathcal{B}} \inf_{b \in \mathcal{A}} d(a, b).$$

Định nghĩa 1.10 ([55]). Giả sử B là không gian Banach, nửa nhóm $S(t)$ gọi là *compact tiệm cận* nếu với mọi $t > 0$, $S(t)$ có thể biểu diễn được dưới dạng

$$S(t) = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t),$$

ở đó $S^{(1)}(t)$ và $S^{(2)}(t)$ thỏa mãn các tính chất sau

1. Với bất kỳ tập bị chặn $\mathcal{B} \subset B$

$$\sup_{y \in \mathcal{B}} \|S^{(1)}(t)y\|_B \rightarrow 0, \text{ khi } t \rightarrow +\infty;$$

2. Với bất kỳ tập bị chặn $\mathcal{B}$ trong B tồn tại t_0 sao cho bao đóng của

$$\bigcup_{t \geq t_0} S^{(2)}(t)\mathcal{B}$$

là compact trong B .

Định nghĩa 1.11 ([62, 63]). Cho M là không gian metric đầy đủ.

- a) *Quỹ đạo dương* của $x \in M$ là tập hợp $\gamma^+(x) = \{S(t)x : t \geq 0\}$.

Nếu $\mathcal{M} \subset M$, thì *quỹ đạo dương* của $\mathcal{M}$ là tập hợp

$$\gamma^+(\mathcal{M}) = \bigcup_{t \geq 0} S(t)\mathcal{M} = \bigcup_{z \in \mathcal{M}} \gamma^+(z).$$

Tổng quát hơn, với $\tau \geq 0$, ta định nghĩa quỹ đạo sau thời điểm τ của $\mathcal{M}$ bởi $\gamma_\tau^+(\mathcal{M}) = \gamma^+(S(\tau)\mathcal{M})$.

b) Phần tử $u_0 \in M$ được gọi là *điểm cân bằng* nếu $S(t)u_0 = u_0$ với mọi $t \geq 0$.

c) Giả sử u_0 là điểm cân bằng khi đó tập

$$W^u(u_0) = \{y \in M : S(t)y \rightarrow u_0 \text{ khi } t \rightarrow +\infty\},$$

được gọi là *đa tập không ổn định* của u_0 .

d) Giả sử $\mathcal{N} \subset M$, tập hợp

$$\omega(\mathcal{N}) = \left\{ y \in H : \text{tồn tại } t_n \geq 0, y_n \in \mathcal{N} \text{ sao cho } t_n \rightarrow +\infty \text{ và } S(t_n)y_n \rightarrow y \text{ khi } n \rightarrow +\infty \right\},$$

được gọi là tập ω -giới hạn của $\mathcal{N}$.

1.4.2 Một số mệnh đề phụ trợ

Định lý 1.3 ([39], Định lý 4.6). *Giả sử $S(t)$, $t \geq 0$ là một hệ gradient compact tiệm cận, thỏa mãn với mỗi tập bị chặn $\mathcal{B} \subset B$, với $\tau \geq 0$ ta có $\gamma_\tau^+(\mathcal{B})$ là bị chặn. Khi đó, nếu tập các điểm cân bằng E bị chặn thì $S(t)$ có một tập hút toàn cục compact $\mathcal{A}$ và $\mathcal{A} = W^u(E)$, trong đó $W^u(E) = \bigcup_{u_0 \in E} W^u(u_0)$. Hơn nữa, nếu B là không gian Banach thì $\mathcal{A}$ là liên thông.*

Bổ đề 1.1 ([16], [45]). *Giả sử B_0 , B , B_1 là các không gian Banach sao cho B_0 nhúng compact trong B , B nhúng liên tục trong B_1 và B_0 , B_1 là các không gian phản xạ. Với $1 < p, q < \infty$, đặt*

$$W = \{u \in L^p(0, T; B_0), \frac{du}{dt} \in L^q(0, T; B_1)\},$$

với chuẩn

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^p(0,T;B_0)} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^q(0,T;B_1)}.$$

Khi đó W nhúng compact trong $L^p(0, T; B)$.

Định lý 1.4 ([36], Định lý Stone). *A là toán tử sinh của một C_0 -nhóm các toán tử unita trên không gian Hilbert H khi và chỉ khi iA là toán tử tự liên hợp.*

Định lý 1.5 ([36], Định lý 2.2). *Giả sử A là toán tử sinh của một C_0 nửa nhóm và $T(t) = e^{tA}$ là một C_0 -nửa nhóm. Khi đó tồn tại các hằng số $\omega \geq 0$ và $M \geq 1$ thỏa mãn*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \in [0, \infty),$$

trong đó $\mathcal{L}(H)$ là tập các toán tử tuyến tính liên tục từ không gian Hilbert H vào H .

Chương 2

Nghiệm của bài toán biên đối với phương trình elliptic suy biến cấp bốn

Trong chương này, chúng tôi thay thế biến X ở Chương 1 bởi biến x và nghiên cứu bài toán Dirichlet đối với phương trình cấp bốn chứa toán tử Δ_γ^2 như sau:

$$\begin{cases} \Delta_\gamma^2 u = f(x, u) & \text{trong } \Omega, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \text{trên } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một miền trơn bị chặn, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ là véc tơ pháp tuyến ngoài đơn vị trên biên $\partial\Omega$ và $\Delta_\gamma^2 := \Delta_\gamma(\Delta_\gamma)$. Một số bài toán trong lý thuyết đàn hồi đưa tới việc xét bài toán này.

Kết quả đạt được là các định lý về sự không tồn tại của nghiệm mạnh không tầm thường và các định lý về sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường với một số điều kiện áp đặt lên hàm phi tuyến $f(x, \xi)$. Chương này gồm hai phần:

- Phần thứ nhất: Thiết lập đồng nhất thức kiểu Pohozaev đối với Δ_γ^2 và định lý về sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường. Đây là

lần đầu tiên đồng nhất thức kiểu Pohozaev được đưa ra cho Δ_γ^2 . Thậm chí nó cũng mới ngay cả cho trường hợp elliptic không suy biến $\Delta_\gamma^2 = \Delta^2$.

- Phần thứ hai: Trình bày một số định lý về sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường khi vế phải $f(x, u)$ có độ tăng thích hợp đối với biến u .

Nội dung của chương này dựa trên Bài báo [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1 Đồng nhất thức kiểu Pohozaev và định lý về sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường

Trong mục này sẽ giả thiết thêm $\gamma_j(x) \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $j = 2, \dots, N$ với $\tilde{N} > 4$ và đưa ra đồng nhất thức kiểu Pohozaev đối với toán tử cấp bốn Δ_γ^2 . Trên cơ sở đó sẽ đưa ra kết quả về sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường đối với trường hợp miền Ω là δ_t -hình sao. Đặt

$$T := \sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i \partial_{x_i}. \quad (2.2)$$

Toán tử T cũng có thể được xem như là véc tơ $T = (\varepsilon_1 x_1 \partial_{x_1}, \dots, \varepsilon_N x_N \partial_{x_N})$. Kết quả chính đầu tiên trong phần này là mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.1. *Giả sử $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ và $\Delta_\gamma^2 u \in L^1(\Omega)$. Khi đó*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[T(u) \Delta_\gamma^2 u + T(\Delta_\gamma u) \Delta_\gamma u \right] dx &= (\tilde{N} - 2) \int_{\Omega} \langle \nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \Delta_\gamma u \rangle dx + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[T(u) \langle \nabla_\gamma \Delta_\gamma u, \nu_\gamma \rangle + T(\Delta_\gamma u) \langle \nabla_\gamma u, \nu_\gamma \rangle \right] dS - \\ &- \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_\gamma u, \nabla_\gamma \Delta_\gamma u \rangle \langle T, \nu \rangle dS, \end{aligned} \quad (2.3)$$

trong đó T là trường vectơ được định nghĩa bởi (2.2), $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ là vectơ pháp tuyến ngoài đơn vị trên $\partial\Omega$, $\nu_\gamma = (\gamma_1\nu_1, \dots, \gamma_N\nu_N)$, $\tilde{N} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N$, dS là phần tử diện tích của $\partial\Omega$.

Nhận xét 2.1. Từ định nghĩa của bộ $\gamma_j(x)$ ta suy ra:

$$\Delta_\gamma u = \sum_{i=1}^N \gamma_j^2(x) \partial_{x_j}^2 u.$$

Do $\gamma_j(x) \in C^2(\mathbb{R}^N)$ nên các tích phân của (2.3) đều hội tụ.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} T(u) \Delta_\gamma^2 u dx &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial\Omega} \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u \gamma_j^2 \partial_{x_j} \Delta_\gamma u \nu_j dS - \\ &\quad - \int_{\Omega} \gamma_j^2 \partial_{x_j} \Delta_\gamma u \partial_{x_j} (\varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u) dx =: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Khi đó

$$I_1 = \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega} \varepsilon_i x_i \partial_{x_i} u \langle \nabla_\gamma \Delta_\gamma u, \nu_\gamma \rangle dS = \int_{\partial\Omega} T(u) \langle \nabla_\gamma \Delta_\gamma u, \nu_\gamma \rangle dS \quad (2.5)$$

và

$$\begin{aligned} I_2 &= - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_j \gamma_j^2 \partial_{x_j} \Delta_\gamma u \partial_{x_j} u dx - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} \Delta_\gamma u \partial_{x_i x_j}^2 u dx \\ &=: I_{2,1} + I_{2,2}. \end{aligned}$$

Trước hết ta ước lượng tích phân $I_{2,2}$

$$\begin{aligned}
I_{2,2} &= - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} \Delta_{\gamma} u \partial_{x_i x_j}^2 u dx \\
&= - \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u \rangle \langle T, \nu \rangle dS + \tilde{N} \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u \rangle dx + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \partial_{x_i x_j}^2 \Delta_{\gamma} u dx + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \partial_{x_j} u \partial_{x_j} \Delta_{\gamma} u T \gamma_j^2 dx,
\end{aligned}$$

do $\gamma_j(x) \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $j = 1, \dots, N$ và $\Delta_{\gamma} := \sum_{j=1}^N \gamma_j^2 \partial_{x_j}^2$.

Hàm γ_j là δ_t -thuần nhất bậc $\varepsilon_j - 1$, vì vậy

$$T \gamma_j^2 = 2 \gamma_j T \gamma_j = 2(\varepsilon_j - 1) \gamma_j^2, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Để chứng minh (2.6) ta xuất phát từ đẳng thức (1.1), tức là

$$\gamma_j(t^{\varepsilon_1} x_1, \dots, t^{\varepsilon_N} x_N) = t^{\varepsilon_j - 1} \gamma_j(x_1, \dots, x_N).$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên theo t , rồi cho $t = 1$ vào hai vế, từ (2.2) suy ra

$$T \gamma_j = (\varepsilon_j - 1) \gamma_j$$

và nhận được (2.6). Điều này dẫn tới

$$\begin{aligned}
I_{2,2} &= - \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u \rangle \langle T, \nu \rangle dS + \tilde{N} \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u \rangle dx + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \partial_{x_i x_j}^2 \Delta_{\gamma} u dx + \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} 2(\varepsilon_j - 1) \partial_{x_j} u \partial_{x_j} \Delta_{\gamma} u \gamma_j^2 dx \\
&= - \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u \rangle \langle T, \nu \rangle dS + (\tilde{N} - 2) \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u \rangle dx + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \partial_{x_i x_j}^2 \Delta_{\gamma} u dx - 2I_{2,1}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Kết hợp các đánh giá (2.4)-(2.7) dẫn tới

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} T(u) \Delta_{\gamma}^2 u dx &= \int_{\partial\Omega} T(u) \langle \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u, \nu_{\gamma} \rangle dS - \int_{\partial\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u \rangle \langle T, \nu \rangle dS + \\
&\quad + (\tilde{N} - 2) \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma} u, \nabla_{\gamma} \Delta_{\gamma} u \rangle dx - I_{2,1} + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \partial_{x_i x_j}^2 \Delta_{\gamma} u dx. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Chúng minh tương tự

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} T(\Delta_{\gamma} u) \Delta_{\gamma} u dx &= \int_{\partial\Omega} T(\Delta_{\gamma} u) \langle \nabla_{\gamma} u, \nu_{\gamma} \rangle dS - \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_j \gamma_j^2 \partial_{x_j} \Delta_{\gamma} u \partial_{x_j} u dx - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \partial_{x_i x_j}^2 \Delta_{\gamma} u dx \\
&= \int_{\partial\Omega} T(\Delta_{\gamma} u) \langle \nabla_{\gamma} u, \nu_{\gamma} \rangle dS + I_{2,1} - \\
&\quad - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varepsilon_i x_i \gamma_j^2 \partial_{x_j} u \partial_{x_i x_j}^2 \Delta_{\gamma} u dx. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.8) và (2.9) suy ra (2.3). Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Định nghĩa 2.1 (Xem trong [29, 50]). Miền Ω được gọi là δ_t -hình sao ứng với điểm gốc tọa độ nếu $0 \in \Omega$ và $\langle T, \nu \rangle \geq 0$ tại mỗi điểm trên $\partial\Omega$.

Định nghĩa 2.2. Hàm $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ được gọi là *nghiệm mạnh của Bài toán (2.1)* nếu $\Delta_{\gamma}^2 u = f(x, u)$ trong Ω và $u = \partial_{\nu} u = 0$ trên $\partial\Omega$ và $f(x, u(x)) \in L^1(\Omega)$.

Nếu $u \equiv 0$ thì u được gọi là *nghiệm tầm thường* của Bài toán (2.1).

Mệnh đề 2.2. Giả sử $f(x, \xi) \equiv f(\xi)$ và $f(0) = 0$. Giả sử $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ là *nghiệm mạnh của Bài toán (2.1)*. Khi đó hàm u thỏa

mãn đồng nhất thức

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{N}F(u) - \frac{\tilde{N}-4}{2}uf(u) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 \langle T, \nu \rangle dS, \quad (2.10)$$

trong đó $F(\xi) = \int_0^{\xi} f(\tau) d\tau$.

Chứng minh. Do $u = 0$ trên $\partial\Omega$ nên

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[T(u)\Delta_{\gamma}^2 u + T(\Delta_{\gamma}u)\Delta_{\gamma}u \right] dx &= \int_{\Omega} \left[T(u)f(u) + T(\Delta_{\gamma}u)\Delta_{\gamma}u \right] dx \\ &= -\frac{\tilde{N}}{2} \int_{\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 \langle T, \nu \rangle dS - \tilde{N} \int_{\Omega} F(u) dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Mặt khác, do $u = \partial_{\nu}u = 0$ trên $\partial\Omega$, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} uf(u) dx &= - \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma}u, \nabla_{\gamma}\Delta_{\gamma}u \rangle dx, \\ \int_{\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 dx &= - \int_{\Omega} \langle \nabla_{\gamma}u, \nabla_{\gamma}\Delta_{\gamma}u \rangle dx, \\ \int_{\partial\Omega} \left[T(u)\langle \nabla_{\gamma}\Delta_{\gamma}u, \nu_{\gamma} \rangle + T(\Delta_{\gamma}u)\langle \nabla_{\gamma}u, \nu_{\gamma} \rangle - \langle \nabla_{\gamma}u, \nabla_{\gamma}\Delta_{\gamma}u \rangle \langle T, \nu \rangle \right] dS &= 0. \end{aligned}$$

Điều này kết hợp với Mệnh đề 2.1 và (2.11) suy ra

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{N}F(u) - \frac{\tilde{N}-4}{2}uf(u) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 \langle T, \nu \rangle dS.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

Từ Mệnh đề 2.2 ta có các định lý sau đây về sự không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường.

Định lý 2.1. *Giả sử $f(x, \xi) \equiv f(\xi)$, $f(0) = 0$ và Ω là δ_t -hình sao ứng với điểm góc tọa độ và bất đẳng thức sau đây được thoả mãn*

$$\tilde{N}F(\xi) - \frac{\tilde{N}-4}{2}\xi f(\xi) < 0, \quad \forall \xi \neq 0.$$

Khi đó Bài toán (2.1) không có nghiệm mạnh không tầm thường $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$.

Chứng minh. Giả sử $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ là nghiệm không tầm thường của Bài toán (2.1). Từ Mệnh đề 2.2 ta có

$$\int_{\Omega} \left(\tilde{N}F(u) - \frac{\tilde{N}-4}{2}uf(u) \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 \langle T, \nu \rangle dS.$$

Mặt khác, do Ω là δ_t -hình sao ứng với điểm gốc tọa độ nên

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 \langle T, \nu \rangle dS \geq 0.$$

Hơn nữa

$$\tilde{N}F(\xi) - \frac{\tilde{N}-4}{2}\xi f(\xi) < 0, \quad \forall \xi \neq 0,$$

vì vậy hai vế của đẳng thức trên luôn trái dấu nhau. Điều này chỉ ra Bài toán (2.1) không có nghiệm không tầm thường. $\square$

Định lý 2.2. Giả sử $f(x, \xi) \equiv |\xi|^{p-1}\xi$ và $\tilde{N} > 4$, Ω là δ_t -hình sao ứng với điểm gốc tọa độ và

$$p > \frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}.$$

Khi đó Bài toán (2.1) không có nghiệm mạnh không tầm thường $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$.

Chứng minh. Giả sử $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\overline{\Omega})$ là nghiệm không tầm thường của Bài toán (2.1). Từ Bổ đề 2.2 suy ra

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\tilde{N}}{p+1} - \frac{\tilde{N}-4}{2} \right) |u|^{p+1} dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 \langle T, \nu \rangle dS. \quad (2.12)$$

Mặt khác, do Ω là δ_t -hình sao ứng với điểm gốc tọa độ, nên

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\Delta_{\gamma}u|^2 \langle T, \nu \rangle dS \geq 0.$$

Ngoài ra

$$p > \frac{\tilde{N} + 4}{\tilde{N} - 4} \text{ suy ra } \int_{\Omega} \left(\frac{\tilde{N}}{p+1} - \frac{\tilde{N}-4}{2} \right) |u|^{p+1} dx < 0.$$

Vì vậy vế trái đẳng thức (2.12) luôn âm còn vế phải của đẳng thức (2.12) không âm. Chứng minh của định lý hoàn thành. $\square$

Ví dụ 2.1. Giả sử $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ là hình cầu bán kính 1 và tâm là gốc tọa độ. Khi đó bài toán

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right)^2 u = |u|^3 u \text{ trong } B_1(0), \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ trên } \partial B_1(0) \end{cases} \quad (2.13)$$

không có nghiệm mạnh không tầm thường, vì ở đây ta có $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = x^2$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1 + 2 = 3$, $\tilde{N} = 1 + 2(1 + 2) = 7$, $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4} = \frac{11}{3}$, $B_1(0)$ là δ_t -hình sao và bậc tăng trưởng của vế phải bằng 4 lớn hơn $\frac{11}{3}$.

2.2 Một số kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình elliptic suy biến cấp bốn

Trong mục này, chúng tôi sẽ giả thiết thêm $\gamma_j(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$, $\tilde{N} > 4$ và trình bày một số kết quả về sự tồn tại nghiệm và tính nhiều nghiệm của Bài toán (2.1) với điều kiện thích hợp của hàm phi tuyến $f(x, \xi)$.

Dựa trên Mệnh đề 1.1 chúng tôi đưa ra định nghĩa nghiệm yếu như sau.

Định nghĩa 2.3. Hàm $u \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ được gọi là *nghiệm yếu* của Bài toán (2.1) nếu các điều kiện sau được thỏa mãn

$$(a) f(x, u(x)) \in L^{\frac{2\tilde{N}}{\tilde{N}+4}}(\Omega);$$

(b) Với mọi $\varphi \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ đẳng thức sau được thoả mãn

$$\int_{\Omega} \Delta_{\gamma} u \Delta_{\gamma} \varphi dx - \int_{\Omega} f(x, u(x)) \varphi dx = 0.$$

Để tìm nghiệm yếu của Bài toán (2.1), ta đi tìm điểm tới hạn của phiếm hàm Φ sau đây:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta_{\gamma} u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx. \quad (2.14)$$

Bổ đề 2.1. *Giả sử $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory, tức là tồn tại $p \in (2, 2^*)$, $f_1(x) \in L^{p_1}(\Omega)$, $f_2(x) \in L^{p_2}(\Omega)$, trong đó $p_1/(p_1 - 1) < 2^*$, $pp_2/(p_2 - 1) \leq 2^*$, $p_1 > \max\{1, \frac{2^* p_2}{p_2(p-1)+2^*}\}$, $p_2 > 1$ thoả mãn*

$$|f(x, \xi)| \leq f_1(x) + f_2(x) |\xi|^{p-1} \quad \text{với } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ hầu khắp nơi,}$$

trong đó $2^* = \frac{2\tilde{N}}{\tilde{N}-4}$.

Khi đó $\Phi_1(u) \in C^1(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega), \mathbb{R})$ và

$$\Phi'_1(u)(v) = \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

với mọi $v \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, ở đây

$$\Phi_1(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad F(x, \xi) = \int_0^{\xi} f(x, \tau) d\tau.$$

Chứng minh. Ta chứng minh định lý trên theo các bước sau.

Bước 1. Ta chứng minh Φ_1 có đạo hàm theo nghĩa Gâteaux. Thật vậy, cho u, v là hai hàm bất kỳ trong $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, với mọi $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ và

$0 < |t| < 1$ theo Định lý giá trị trung bình sẽ tồn tại $\lambda \in [0, 1]$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x, u(x) + tv(x)) - F(x, u(x))}{t} \right| \\ &= |f(x, u(x) + \lambda tv(x))v(x)| \leq \\ &\leq (f_1(x) + f_2(x)|u(x) + tv(x)|^{p-1})|v(x)| \leq \\ &\leq \left(f_1(x) + 2^{p-1}f_2(x)(|u(x)|^{p-1} + |v(x)|^{p-1}) \right) |v(x)|. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder và Mệnh đề 1.1 ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_1(x)|v(x)|dx &\leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{\frac{p_1}{p_1-1}} dx \right)^{\frac{p_1-1}{p_1}} \leq \\ &\leq C \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|v\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}, \\ \int_{\Omega} f_2(x)|u(x)|^{p-1}|v(x)|dx &\leq \\ &\leq \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{pp_2}{p_2-1}} dx \right)^{\frac{(p-1)(p_2-1)}{pp_2}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{\frac{pp_2}{p_2-1}} dx \right)^{\frac{p_2-1}{pp_2}} \leq \\ &\leq C \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^{p-1} \|v\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}, \\ \int_{\Omega} f_2(x)|v(x)|^p dx &\leq \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^{\frac{pp_2}{p_2-1}} dx \right)^{\frac{p_2-1}{pp_2}} \leq \\ &\leq C \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|v\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Do đó

$$\left| \frac{F(x, u(x) + tv(x)) - F(x, u(x))}{t} \right| \in L^1(\Omega).$$

Nên theo Định lý giá trị trung bình và Định lý Lebesgue thì tồn tại đạo hàm Gâteaux của Φ_1 tại u và

$$D\Phi_1(u)(v) = \int_{\Omega} f(x, u(x))v(x)dx, \quad \forall v \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega).$$

Bước 2. Ta chứng minh đạo hàm Gâteaux của Φ_1 chính là đạo hàm Fréchet. Tức là ta sẽ chỉ ra đạo hàm Gâteaux của Φ_1 sẽ liên tục tại u trong $(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega))^*$ -topology. Thật vậy, giả sử $u_n \rightarrow u$ trong $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ theo Mệnh đề 1.1 thì dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ chứa một dãy con, để cho đơn giản ta vẫn ký hiệu là $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa mãn

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u \text{ trong } L^p, 1 \leq p \leq 2_*^\gamma \text{ khi } n \rightarrow \infty, \\ u_n \rightarrow u \text{ h.k.n trong } \Omega \text{ khi } n \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.15)$$

Đặt

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = f_1(x) + f_2(x)|u_n(x)|^{p-1} \quad \forall n = 1, 2, \dots, \\ \varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)|u(x)|^{p-1}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Vì f là ánh xạ Carathéodory, kết hợp với (2.15) và (2.16) ta có

$$\begin{cases} \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ h.k.n trong } \Omega, \\ |f(x, u_n(x))| \leq \varphi_n(x) \text{ h.k.n trong } \Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

Với mọi hàm $v \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ áp dụng bất đẳng thức Hölder và Mệnh đề 1.1 dẫn tới

$$|(D\Phi_1(u_n) - D\Phi_1(u))(v)| \leq C \|f(\cdot, u_n) - f(\cdot, u)\|_{L^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}}(\Omega)} \|v\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}.$$

Như vậy

$$\begin{aligned} & \| (D\Phi_1(u_n) - D\Phi_1(u)) \|_{(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega))^*} \leq \\ & \leq C \|f(\cdot, u_n) - f(\cdot, u)\|_{L^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Mặt khác theo (2.17) ta có

$$\begin{aligned}
& \left| f(x, u_n(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} \leq \\
& \leq C \left| f(x, u_n(x)) \right|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} + C \left| f(x, u(x)) \right|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} \leq \\
& \leq C |\varphi_n(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} + C |\varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} \leq \\
& \leq C_1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} + C_1 |\varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}}
\end{aligned}$$

hầu khắp nơi trong Ω . Theo Bổ đề Fatou

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(C_1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} + C_1 |\varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} - \right. \\
& \quad \left. - \left| f(x, u_n(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} \right) dx \leq \\
& \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(C_1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} + C_1 |\varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} - \right. \\
& \quad \left. - \left| f(x, u_n(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} \right) dx \leq \\
& \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(C_1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} + C_1 |\varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} - \right. \\
& \quad \left. - \left| f(x, u_n(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} \right) dx \leq \\
& \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(C_1 |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} + C_1 |\varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} \right) dx,
\end{aligned}$$

kết hợp với (2.17) kéo theo

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} dx \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Nên

$$\int_{\Omega} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| f(x, u_n(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} dx = 0.$$

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| f(x, u_n(x)) - f(x, u(x)) \right|^{\frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}} dx = 0.$$

Cùng với (2.18) ta có

$$\|(D\Phi_1(u_n) - D\Phi_1(u))\|_{(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega))^*} = 0.$$

Như vậy Φ_1 khả vi Fréchet và

$$\Phi_1'(u)(v) = \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad \forall v \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega).$$

Bổ đề được chứng minh. □

Chúng ta giả sử $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thỏa mãn:

(A1) Tồn tại $p \in (2, 2_*^\gamma)$, $f_1(x) \in L^{p_1}(\Omega)$, $f_2(x) \in L^{p_2}(\Omega)$, ở đó $p_1/(p_1-1) < 2_*^\gamma$, $pp_2/(p_2-1) < 2_*^\gamma$, $p_1 > \max\{1, \frac{2_*^\gamma p_2}{p_2(p-1)+2_*^\gamma}\}$, $p_2 > 1$, sao cho

$$|f(x, \xi)| \leq f_1(x) + f_2(x) |\xi|^{p-1} \quad \text{hầu khắp nơi } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

$$\text{trong đó } 2_*^\gamma = \frac{2\tilde{N}}{\tilde{N}-4};$$

(A2) $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(x, \xi)}{\xi} = 0$, đều với $x \in \Omega$;

(A3) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{|F(x, \xi)|}{\xi^2} = \infty$, với mọi $x \in \Omega$,

$$F(x, \xi) \geq 0 \quad \text{với mọi } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R};$$

(A4) Tồn tại các hằng số $\mu > 2$ và $r_1 > 0$ sao cho

$$\mu F(x, \xi) \leq \xi f(x, \xi) \quad \text{với mọi } (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad |\xi| \geq r_1;$$

(A'4) Tồn tại các hằng số C_0 , $r_2 > 0$ và $\kappa > \max\{1, \frac{\tilde{N}}{2}\}$ sao cho

$$|F(x, \xi)|^\kappa \leq C_0 |\xi|^{2\kappa} \mathcal{F}(x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad |\xi| \geq r_2,$$

trong đó

$$\mathcal{F}(x, \xi) = \frac{1}{2} f(x, \xi) \xi - F(x, \xi);$$

(A5) $f(x, \xi)$ là một hàm lẻ với ξ .

Nhận xét 2.2. Do $2_*^\gamma = \frac{2\tilde{N}}{\tilde{N}-4}$ và $p < 2_*^\gamma$ nên từ điều kiện (A₁) suy ra bậc tăng trưởng của $f(x, \xi)$ theo ξ là nhỏ hơn $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$.

Nhận xét 2.3. Từ Bổ đề 2.1 và f thỏa mãn điều kiện (A1), phiếm hàm Φ là xác định trên $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$. Hơn nữa, $\Phi \in C^1(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega), \mathbb{R})$ và

$$\Phi'(u)(v) = \int_{\Omega} \Delta_{\gamma} u \Delta_{\gamma} v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx$$

với mọi $v \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$. Từ định nghĩa của nghiệm yếu và đạo hàm của Φ , suy ra điểm tới hạn của Φ cũng là nghiệm yếu của Bài toán (2.1).

Kết quả chính của chương này là hai định lý sau.

Định lý 2.3. *Giả sử f thỏa mãn (A1)-(A3) và (A4). Bài toán (2.1) có nghiệm yếu không tầm thường.*

Hơn nữa, nếu điều kiện (A5) được thỏa mãn, Bài toán (2.1) có vô số nghiệm yếu không tầm thường.

Định lý 2.4. *Giả sử f thỏa mãn (A1)-(A3) và (A'4). Bài toán (2.1) có nghiệm yếu không tầm thường.*

Hơn nữa, nếu điều kiện (A5) được thỏa mãn, Bài toán (2.1) có vô số nghiệm yếu không tầm thường.

Nhận xét 2.4. Từ Nhận xét 2.2 và các Định lý 2.2, 2.3, 2.4 ta suy ra $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ là giá trị tới hạn đối với bậc tăng trưởng của hàm $f(x, u)$ cho sự tồn tại của nghiệm không tầm thường.

Để chứng minh Định lý 2.3 và Định lý 2.4, ta sẽ sử dụng Định lý 1.1 và Định lý 1.2. Thật vậy, trước hết ta sẽ đi kiểm tra điều kiện Cerami của phiếm hàm $\Phi(u)$.

Bổ đề 2.2. *Giả sử f thỏa mãn (A1), (A3) và (A4). Phiếm hàm Φ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$ trên $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$.*

Chứng minh. Giả sử $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ là một dãy trong không gian $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ thỏa mãn

$$\left(1 + \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}\right) \|\Phi'(u_m)\|_{(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega))^*} \rightarrow 0 \text{ và } \Phi(u_m) \rightarrow c \text{ khi } m \rightarrow \infty,$$

suy ra

$$\begin{aligned} \Phi'(u_m)(u_m) &\rightarrow 0, \\ \frac{1}{2} \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m) dx &\rightarrow c \text{ khi } m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Khi đó với m là đủ lớn

$$\begin{aligned} c + 1 &\geq \Phi(u_m) - \frac{1}{\mu} \Phi'(u_m)(u_m) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_m) u_m - F(x, u_m)\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega_m(0, r_1)} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_m) u_m - F(x, u_m)\right) dx + \\ &\quad + \int_{\Omega_m(r_1, \infty)} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_m) u_m - F(x, u_m)\right) dx \geq \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega_m(0,r_1)} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_m) u_m - F(x, u_m)\right) dx,$$

trong đó $\Omega_m(a, b) = \{x \in \Omega : a \leq |u_m(x)| < b\}$ với $0 \leq a < b$.

Trước hết, ta chứng minh dãy $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ là bị chặn trong $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ bằng phương pháp phản chứng. Thật vậy, có thể sai khác một dãy con nếu cần, giả sử với mỗi m thỏa mãn $\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} > 1$ và

$$\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} \rightarrow \infty \text{ khi } m \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Đặt

$$v_m = \frac{u_m}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}},$$

khi đó $\|v_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = 1$. Do đó, có một dãy con $v_m \rightharpoonup v$ hội tụ yếu trong $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, khi đó từ Mệnh đề 1.1 suy ra $v_m \rightarrow v$ hội tụ mạnh trong $L^q(\Omega)$, $2 \leq q < 2_\gamma^*$ và $v_m \rightarrow v$ hầu khắp nơi trong Ω .

Từ (2.20) và (2.21), ta đạt được

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} \int_{\Omega_m(0,r_1)} \left(\frac{1}{\mu} f(x, u_m) u_m - F(x, u_m)\right) dx &\leq \\ &\leq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} < 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Bây giờ chúng ta xét hai trường hợp của v là $v = 0$ hoặc $v \neq 0$.

Trường hợp 1: Nếu $v \equiv 0$, khi đó $v_m \rightarrow 0$ hội tụ mạnh trong $L^q(\Omega)$, $2 \leq q < 2_\gamma^*$, và $v_m \rightarrow 0$ hội tụ hầu khắp nơi trong Ω . Từ điều kiện

(A1), suy ra

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega_m(0,r_1)} \frac{f(x, u_m)u_m - \mu F(x, u_m)}{\mu \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx \right| \leq \\
& \leq C \int_{\Omega_m(0,r_1)} \left(|f_1(x)| \frac{|u_m|}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}} + |f_2(x)| |v_m|^2 \right) dx \leq \\
& \leq C \left(\|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|v_m\|_{L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)} + \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|v_m\|_{L^{\frac{2p_2}{p_2-1}}(\Omega)}^2 \right) \rightarrow 0 \text{ khi } m \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

mâu thuẫn với (2.22).

Trường hợp 2: $v \neq 0$. Đặt $\Omega^* = \{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}$ khi đó $\text{meas}(\Omega^*) > 0$. Với mỗi $x \in \Omega^*$ thì

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |u_m(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} v_m(x) = \infty.$$

Từ các điều kiện (A1), (A3), (2.19) và Bổ đề Fatou, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx \geq \\
&\geq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega^*} \frac{F(x, u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx \geq \\
&\geq \int_{\Omega^*} \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx \\
&= \int_{\Omega^*} \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_m)}{|u_m|^2} v_m^2 dx = +\infty,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

điều này là mâu thuẫn với (2.22). Do đó dãy $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ bị chặn trong không gian $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$\begin{aligned}
u_m &\rightharpoonup u \text{ trong } S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega) \text{ khi } m \rightarrow \infty \\
u_m &\rightarrow u \text{ trong } L^q(\Omega) \text{ khi } m \rightarrow \infty, 2 \leq q < 2_{*}^{\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Theo điều kiện (A1)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x, u_m)(u_m - u) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |f_1(x)| |u_m - u| dx + \\ &+ \int_{\Omega} |u_m - u| |u_m|^{p-1} |f_2(x)| dx \leq \|u_m - u\|_{L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)} \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} + \\ &+ \|u_m - u\|_{L^{\frac{pp_2}{p_2-1}}(\Omega)} \|u_m\|_{L^{\frac{p_1-1}{pp_2}}(\Omega)}^{p-1} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Do (2.24), ta có

$$\int_{\Omega} f(x, u_m)(u_m - u) dx \rightarrow 0 \text{ khi } m \rightarrow \infty.$$

Do vậy

$$\int_{\Omega} [f(x, u_m) - f(x, u)] (u_m - u) dx \rightarrow 0 \text{ khi } m \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} \|u_m - u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 &= \langle \Phi'(u_m) - \Phi'(u), u_m - u \rangle + \\ &+ \int_{\Omega} [f(x, u_m) - f(x, u)] (u_m - u) dx. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\langle \Phi'(u_m) - \Phi'(u), u_m - u \rangle \rightarrow 0 \text{ khi } m \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

Từ (2.25)-(2.26)

$$\|u_m - u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 \rightarrow 0 \text{ khi } m \rightarrow \infty.$$

Do đó, dãy $u_m \rightarrow u$ trong $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.3. Giả sử f thỏa mãn các điều kiện (A1), (A3) và (A'4). Khi đó Φ thỏa mãn điều kiện $(C)_c$ với mọi $c \in \mathbb{R}$ trên $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$.

Chứng minh. Giả sử $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ là một dãy trong không gian $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ thỏa mãn

$$\left(1 + \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}\right) \|\Phi'(u_m)\|_{(S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega))^*} \rightarrow 0 \text{ và } \Phi(u_m) \rightarrow c \text{ khi } m \rightarrow \infty,$$

suy ra

$$\begin{aligned} \Phi'(u_m)(u_m) \rightarrow 0 \text{ và } \frac{1}{2} \|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} F(x, u_m) dx \rightarrow c \\ \text{khi } m \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Chúng ta chứng minh dãy $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ là bị chặn trong không gian $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ bằng phương pháp phản chứng. Thật vậy, giả sử dãy $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ không bị chặn, khi đó không mất tính tổng quát với mỗi m thỏa mãn $\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} > 1$ và

$$\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} \rightarrow \infty \text{ khi } m \rightarrow \infty.$$

Đặt

$$v_m = \frac{u_m}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}},$$

suy ra $\|v_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = 1$. Do vậy

$$\begin{aligned} v_m &\rightharpoonup v \text{ hội tụ yếu trong } S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega) \text{ khi } m \rightarrow \infty, \\ v_m &\rightarrow v \text{ hội tụ hầu khắp nơi trong } \Omega \text{ khi } m \rightarrow \infty. \\ v_m &\rightarrow v \text{ hội tụ mạnh trong } L^q(\Omega) \text{ khi } m \rightarrow \infty, 2 \leq q < 2_{*}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Từ (2.27), khi đó m đủ lớn

$$c + 1 \geq \Phi(u_m) - \frac{1}{2} \Phi'(u_m)(u_m) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx. \quad (2.29)$$

Bây giờ ta xét hai trường hợp của v là $v = 0$ hoặc $v \neq 0$.

Trường hợp 1: Nếu $v = 0$ khi đó $v_m \rightarrow v$ trong $L^p(\Omega)$, $2 \leq p < 2_*^\gamma$ và $v_m \rightarrow 0$ hầu khắp nơi trong Ω . Từ (2.27), ta có

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{F(x, u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx = \frac{1}{2}. \quad (2.30)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_m(0,r_2)} \frac{F(x, u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx \\ & \leq C \left(\|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|v_m\|_{L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)} + \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|v_m\|_{L^{\frac{2p_2}{p_2-1}}(\Omega)}^2 \right) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

khi $m \rightarrow \infty$.

Đặt $\kappa' = \kappa/(\kappa - 1)$, $\kappa > \max\{1, \tilde{N}/2\}$, khi đó $2\kappa' \in [2, 2_*^\gamma]$. Từ (A'4), (2.29) và (2.28)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_m(r_2, +\infty)} \frac{F(x, u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx = \int_{\Omega_m(r_2, +\infty)} \frac{F(x, u_m)}{|u_m|^2} |v_m|^2 dx \leq \\ & \leq \left[\int_{\Omega_m(r_2, +\infty)} \left(\frac{F(x, u_m)}{|u_m|^2} \right)^\kappa dx \right]^{1/\kappa} \left[\int_{\Omega_m(r_2, +\infty)} |v_m|^{2\kappa'} dx \right]^{1/\kappa'} \leq \\ & \leq C_0^{1/\kappa} \left[\int_{\Omega_m(r_2, +\infty)} \mathcal{F}(x, u_m) dx \right]^{1/\kappa} \left[\int_{\Omega_m(r_2, +\infty)} |v_m|^{2\kappa'} dx \right]^{1/\kappa'} \leq \quad (2.32) \\ & \leq [C_0(C+1)]^{1/\kappa} \left[\int_{\Omega_m(r_0, +\infty)} |v_m|^{2\kappa'} dx \right]^{1/\kappa'} \leq \\ & \leq [C_0(C+1)]^{1/\kappa} \|v_m\|_{L^{2\kappa'}(\Omega)}^2 \rightarrow 0, \quad \text{khi } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Kết hợp (2.31) cùng với (2.32), khi đó

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{F(x, u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx \\ &= \int_{\Omega_m(0,r_2)} \frac{F(x, u_m)}{|u_m|^2} |v_m|^2 dx + \int_{\Omega_m(r_2,+\infty)} \frac{F(x, u_m)}{|u_m|^2} |v_m|^2 dx \rightarrow 0, \quad \text{khi } m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn với (2.30).

Trường hợp 2: $v \neq 0$. Chứng minh tương tự như trường hợp 2 trong Bổ đề 2.2.

Tương tự như Bổ đề 2.2 có điều phải chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.4. *Giả sử (A1) và (A2) là thỏa mãn. Khi đó tồn tại $\alpha, \rho > 0$ thỏa mãn*

$$\Phi(u) \geq \alpha, \quad \forall u \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega), \quad \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = \rho.$$

Chứng minh. Từ (A1) và (A2), với mỗi $\varepsilon > 0$, có hằng số $C(\varepsilon) > 0$ thỏa mãn

$$|f(x, \xi)| \leq \varepsilon |\xi| + C(\varepsilon) |\xi|^{p-1}, \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Bởi Mệnh đề 1.1, ta có

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{C(\varepsilon)}{p} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 - \frac{\varepsilon}{2} C_2^2 \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 - \frac{C(\varepsilon)}{p} C_p^p \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Do ε là đủ nhỏ và $p > 2$, chọn $\alpha, \rho > 0$ thỏa mãn $\Phi(u) \geq \alpha$ khi $\|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = \rho$. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.5. *Giả sử (A1) và (A3) là thỏa mãn. Khi đó, với mỗi không gian con hữu hạn chiều $\widehat{\mathbb{X}} \subset S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, có $R = R(\widehat{\mathbb{X}}) > 0$ thỏa mãn*

$$\Phi(u) \leq 0, \quad \forall u \in \widehat{\mathbb{X}}, \quad \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} \geq R.$$

Chứng minh. Dùng phương pháp phản chứng để chứng minh. Giả sử có một dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \widehat{\mathbb{X}}$ thỏa mãn $\|u_n\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} \rightarrow \infty$, tức là có $M > 0$ sao cho $\Phi(u_n) \geq -M$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Đặt

$$v_n(x) = \frac{u_n}{\|u_n\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}}.$$

Khi đó $\|v_n\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = 1$. Không mất tính tổng quát, ta có

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \text{ hội tụ yếu trong } S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega) \text{ khi } n \rightarrow \infty, \\ v_n &\rightarrow v \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \text{ khi } n \rightarrow \infty, \\ v_n &\rightarrow v \text{ hội tụ mạnh trong } L^q(\Omega) \text{ khi } n \rightarrow \infty, 2 \leq q < 2_*^\gamma. \end{aligned}$$

Do không gian $\widehat{\mathbb{X}}$ là hữu hạn chiều, khi đó

$$v_n \rightarrow v \text{ hội tụ mạnh trong } \widehat{\mathbb{X}} \text{ khi } n \rightarrow \infty$$

và $v \in \widehat{\mathbb{X}}$, $\|v\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = 1$. Do đó, từ (2.23) ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{-M}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} - \int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{F(x, u_m)}{\|u_m\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2} dx = -\infty, \end{aligned}$$

mâu thuẫn. Do vậy, tồn tại $R = R(\widehat{\mathbb{X}}) > 0$ thỏa mãn $\Phi(u) \leq 0$ với $u \in \widehat{\mathbb{X}}$ và $\|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} \geq R$. $\square$

Giả sử $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ là cơ sở trực giao trong không gian $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$ và $\mathbb{X}_j = \mathbb{R}e_j$,

$$\mathbb{Y}_k = \bigoplus_{j=1}^k \mathbb{X}_j, \quad \mathbb{Z}_k = \bigoplus_{j=k+1}^\infty \mathbb{X}_j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Đặt

$$\beta_k = \sup_{\substack{u \in \mathbb{Z}_k \\ \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = 1}} \|u\|_{L^q(\Omega)}, \quad 2 \leq q < 2_*^\gamma \quad (2.33)$$

khi đó $\beta_k \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$. Thật vậy, giả sử điều này không xảy ra, khi đó có $\varepsilon_0 > 0$ và $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, $\|u_j\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = 1$, cùng với $u_j \perp \mathbb{Y}_{k_j}$, $\|u_j\|_{L^q(\Omega)} \geq \varepsilon_0$ ở đây $k_j \rightarrow \infty$ khi $j \rightarrow \infty$. Với mỗi $v \in S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, ta xác định được $w_j \in \mathbb{Y}_{k_j}$ sao cho $w_j \rightarrow v$ khi $j \rightarrow \infty$. Do đó

$$\left| (u_j, v)_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} \right| = \left| (u_j, w_j - v)_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} \right| \leq \|w_j - v\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}$$

khi $j \rightarrow \infty$, tức là, $u_j \rightarrow 0$ hội tụ yếu trong $S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$. Suy ra $u_j \rightarrow 0$ trong $L^q(\Omega)$, mâu thuẫn. Vì vậy $\beta_k \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$.

Bổ đề 2.6. *Giả sử (A1) và (A3) là thỏa mãn. Khi đó tồn tại các hằng số $\rho, \alpha, k > 0$ sao cho $\Phi(u) \geq \alpha$ với mọi $u \in \mathbb{Z}_k$ và $\|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = \rho$.*

Chứng minh. Với mỗi $u \in \mathbb{Z}_k$ và $\|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} > 0$, sử dụng bất đẳng thức Hölder dẫn tới

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \frac{1}{2} \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 - \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|u\|_{L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)} - \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \|u\|_{L^{\frac{pp_1}{p_1-1}}(\Omega)}^p \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 - \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \left\| \frac{u}{\|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}} \right\|_{L^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\Omega)} \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} - \\ &\quad - \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \left\| \frac{u}{\|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}} \right\|_{L^{\frac{pp_1}{p_1-1}}(\Omega)}^p \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Bởi vì $2 \leq 2p_1/(p_1 - 1) < 2_*^\gamma$, $2 \leq pp_2/(p_2 - 1) < 2_*^\gamma$, nên

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^2 - \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \beta_k \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} - \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \beta_k^p \|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)}^p.$$

Do (2.33), chọn k đủ lớn và $\|u\|_{S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)} = \frac{1}{2}$ thỏa mãn

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \beta_k - \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \beta_k^p \frac{1}{2^p} = \alpha > 0.$$

□

Chứng minh Định lý 2.3 Từ các Bổ đề 2.2, 2.4 và 2.5, tất cả các điều kiện trong Định lý 1.1 là thỏa mãn. Do đó, Bài toán (2.1) có nghiệm yếu không tầm thường.

Nếu $f(x, -\xi) = -f(x, \xi)$ khi đó ta chọn $\mathbb{B} \equiv S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{Y}_k$, $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}_k$. Từ các Bổ đề 2.2, 2.5 và 2.6 tất cả các điều kiện trong Định lý 1.2 là thỏa mãn. Do đó, Bài toán (2.1) có vô số nghiệm yếu không tầm thường.

Chứng minh Định lý 2.4 Từ các Bổ đề 2.3, 2.4 và 2.5 tất cả các điều kiện trong Định lý 1.1 là thỏa mãn. Do đó, Bài toán (2.1) có nghiệm không tầm thường.

Nếu $f(x, -\xi) = -f(x, \xi)$ ta xác định $\mathbb{B} \equiv S_{\gamma,0}^{2,2}(\Omega)$, $\mathbb{Y} \equiv \mathbb{Y}_k$, $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}_k$. Từ các Bổ đề 2.3, 2.5 và 2.6 tất cả các điều kiện trong Định lý 1.2 là thỏa mãn. Do đó, Bài toán (2.1) có vô số nghiệm yếu không tầm thường.

Ví dụ 2.2. Bài toán

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^4 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right)^2 u = |u|^2 u \text{ trong miền giới nội } \Omega \subset \mathbb{R}^3, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ trên } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.34)$$

có vô số nghiệm yếu không tầm thường. Thật vậy, cũng như trong Ví dụ 2.1 ta có $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = \gamma_3 = x^2$, $\tilde{N} = 7$, $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4} = \frac{11}{3}$. Trong trường hợp này ta có $C_0^\infty \subset S_{\gamma}^{2,2}(\Omega)$ và bậc tăng trưởng của vế phải bằng 3 nhỏ hơn $\frac{11}{3}$.

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này chúng tôi đã nghiên cứu sự tồn tại và không tồn tại nghiệm trong miền bị chặn của bài toán Dirichlet đối với phương trình cấp bốn chứa toán tử Δ_γ^2 . Các kết quả đạt được bao gồm:

1. Thiết lập được đồng nhất thức kiểu Pohozaev đối với Δ_γ^2 từ đó suy

ra điều kiện không tồn tại nghiệm mạnh không tầm thường của Bài toán (2.1) khi miền thoả mãn điều kiện hình học phù hợp, được nêu trong Bổ đề 2.2, Định lý 2.1 và Định lý 2.2 khi vế phải $f(x, u)$ có bậc tăng theo u lớn hơn $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ và miền Ω là δ_t -hình sao;

2. Nhận được các kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu không tầm thường và tính nhiều nghiệm của bài toán được nêu trong Định lý 2.3 và Định lý 2.4 khi vế phải $f(x, u)$ có bậc tăng theo u nhỏ hơn $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$. Các kết quả này là mới đối với trường hợp toán tử elliptic bậc bốn;

3. Đồng nhất thức Pohozaev trước đây chỉ được biết đến đối với trường hợp toán tử cấp hai Δ_γ . Việc thiết lập đồng nhất thức Pohozaev cho toán tử cấp bốn Δ_γ^2 là một kết quả mới, kể cả khi Δ_γ^2 không suy biến. Luận án đã chứng tỏ rằng giá trị $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ là giá trị ngưỡng đối với bậc tăng trưởng của vế phải $f(x, u)$ theo biến u cho tính giải được của bài toán Dirichlet (2.1).

Chương 3

Dáng điệu khi thời gian lớn của nghiệm phương trình hyperbolic suy biến mạnh

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình hyperbolic chứa toán tử elliptic suy biến mạnh trên toàn không gian, với số hạng phi tuyến tăng trưởng kiểu đa thức. Chúng tôi sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân toàn cục của bài toán Cauchy, sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $S_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$. Chương này gồm hai phần.

- Phần thứ nhất: Trình bày sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục, từ đó sinh ra nửa nhóm của bài toán;
- Phần thứ hai: Trình bày sự tồn tại của tập hút toàn cục compact trong không gian $S_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$.

Nội dung của chương này dựa trên Bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1 Sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân

3.1.1 Đặt bài toán và các không gian hàm

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu bài toán sau:

$$u_{tt} + \lambda u_t + l(X)u = P_{\alpha,\beta}u + f(X, u), t > 0, \quad (3.1)$$

$$X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} := \mathbb{R}^N,$$

$$u(X, 0) = u_0(X), u_t(X, 0) = u_1(X), \quad (3.2)$$

trong đó λ là hằng số dương, $u_0(X) \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$, $u_1(X) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ và

$$P_{\alpha,\beta}u = \Delta_x u + \Delta_y u + |x|^\alpha |y|^\beta \Delta_z u,$$

$$\Delta_x := \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \Delta_y := \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, \Delta_z := \sum_{l=1}^{N_3} \frac{\partial^2}{\partial z_l^2}, u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$|x|^{2\alpha} := \left(\sum_{i=1}^{N_1} x_i^2 \right)^\alpha, |y|^{2\beta} := \left(\sum_{j=1}^{N_2} y_j^2 \right)^\beta, \alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

trong đó $N_1 \geq 1, N_2 \geq 1, N_3 \geq 1$. Số chiều thuần nhất

$$\tilde{N}_{\alpha,\beta} := N_1 + N_2 + (1 + \alpha + \beta)N_3.$$

Nhận xét 3.1. So sánh với Bài toán (6) ở phần Mở đầu, trong phương trình (3.1) đã có sự thay đổi sau đây:

- a) Bổ sung số hạng $l(X)u$;
- b) Vế phải $f(X, u)$ có thể phụ thuộc thêm biến X ;
- c) Miền Ω là cả không gian $\mathbb{R}^N$

Giả sử $l : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ và $f(X, \xi) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện

i) $l : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm thỏa mãn tính chất sau:

(i_1) Với mỗi $\theta \in (0, \infty)$ có hằng số $C_\theta \in (0, \infty)$ sao cho với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |l(X)| |u(X)|^2 dX \leq \theta \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + C_\theta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2. \quad (3.3)$$

(i_2) Có hằng số $\lambda_0 > 0$ thỏa mãn với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$,

$$\|\nabla_{\alpha, \beta} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} l(X) |u(X)|^2 dX \geq \lambda_0 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \quad (3.4)$$

trong đó $\nabla_{\alpha, \beta} u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_{N_1}} u, \partial_{y_1} u, \dots, \partial_{y_{N_2}} u, |x|^\alpha |y|^\beta \partial_{z_1} u, \dots, \partial_{z_{N_3}} u)$;

ii)

$$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, \xi) \mapsto f(X, \xi)$$

là hàm thỏa mãn điều kiện Carathéodory, tức là với mỗi $\xi \in \mathbb{R}$, ánh xạ $X \mapsto f(X, \xi)$ là đo được Lebesgue và với hầu khắp $X \in \mathbb{R}^N$, ánh xạ $\xi \mapsto f(X, \xi)$ là liên tục.

Nguyên hàm của f theo biến ξ được định nghĩa bởi

$$F(X, \xi) = \int_0^\xi f(X, \tau) d\tau,$$

và f thỏa mãn các tính chất sau:

$$(f_1) \quad f(X, 0) = h(X) \in L^2(\mathbb{R}^N);$$

(f_2) Tồn tại hằng số C_1 sao cho với mọi $X \in \mathbb{R}^N$ và $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ ta có

$$|f(X, \xi_1) - f(X, \xi_2)| \leq C_1 |\xi_1 - \xi_2| (g(X) + |\xi_1|^\rho + |\xi_2|^\rho) \quad (3.5)$$

với $0 < \rho \leq \frac{2}{\tilde{N}_{\alpha, \beta} - 2}$ và $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm đo được và thỏa mãn với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g(X)|^2 |u(X)|^2 dX \leq C_2 \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2, \quad (3.6)$$

ở đây C_2 là hằng số dương.

(f_3) Tồn tại các hàm $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ thỏa mãn

$$f(X, \xi)\xi \leq g_1(X) \text{ với hầu khắp } X \in \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

$$F(X, \xi) \leq g_2(X) \text{ với hầu khắp } X \in \mathbb{R}^N, \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Nhận xét 3.2. Các điều kiện áp lên về phải $f(\xi)$ trong Bài toán (6) của phần Mở đầu đã được thay đổi và mở rộng. Cụ thể:

- a) Điều kiện (7) được thay thế bởi (f_2);
- b) Điều kiện (8) được thay thế bởi (f_1) và (f_3).

Ký hiệu $L^p_\nu(\mathbb{R}^N)$ là tập tất cả các hàm đo được $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\|u\|_{L^p_\nu(\mathbb{R}^N)} := \sup_{Y \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B(Y)} |u(X)|^p dX \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

ở đây $B(Y) = \{X \in \mathbb{R}^N : Y < X < Y + 1_e, 1_e = (1, 1, \dots, 1)\}, p \geq 1$.

Bổ đề sau đây chỉ ra điều kiện đủ đối với hàm l để nó thỏa mãn điều kiện (i_1).

Bổ đề 3.1. Giả sử $p > 1$ và $\phi \in L^p_\nu(\mathbb{R}^N)$.

(i) Nếu $p \geq \frac{\tilde{N}_{\alpha, \beta}}{2}$ khi đó có hằng số $C \in (0, \infty)$ thỏa mãn

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(X)| |u(X)|^2 dX \leq C \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 \text{ với mọi } u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N).$$

(ii) Nếu $p > \frac{\tilde{N}_{\alpha, \beta}}{2}$ khi đó với mỗi $\theta \in (0, \infty)$ có một hằng số $C_\theta \in (0, \infty)$ thỏa mãn

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(X)| |u(X)|^2 dX \leq \theta \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + C_\theta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \text{ với mọi } u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N).$$

Chứng minh. Với họ $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ là các điểm trong $\mathbb{R}^N$ thỏa mãn $\mathbb{R}^N = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{B(Y_j)}$ và tập $\overline{B(Y_j)}, j \in \mathbb{N}$, là không giao nhau. Ký hiệu $B_j = B(Y_j), j \in \mathbb{N}$. Giả sử $p' = p/(p-1)$. Do $p \geq \tilde{N}_{\alpha, \beta}/2$ ta có $2p' \leq 2_{\alpha, \beta}^*$. Giả sử $C(2p')$ là hằng số tốt nhất trong phép nhúng $\mathbb{S}_1^2(B) \hookrightarrow L^{2p'}(B)$, ở đây $B = B_1(0)$. Khi đó, bằng phép tịnh tiến $C(2p')$ là hằng số tốt nhất của phép nhúng $\mathbb{S}_1^2(B_j(Y)) \hookrightarrow L^{2p'}(B_j(Y))$ với mỗi $Y \in \mathbb{R}^N$. Giả sử $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$ là tùy ý. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(X)| |u(X)|^2 dX &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{B_j} |\phi(X)| |u(X)|^2 dX \\
&\leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\int_{B_j} |\phi(X)|^p dX \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_j} |u(X)|^{2p'} dX \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \|\phi\|_{L_\nu^p(\mathbb{R}^N)} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\int_{B_j} |u(X)|^{2p'} dX \right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|\phi\|_{L_\nu^p(\mathbb{R}^N)} C^2(2p') \sum_{j \in \mathbb{N}} \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(B_j)}^2 \\
&= \|\phi\|_{L_\nu^p(\mathbb{R}^N)} C^2(2p') \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2.
\end{aligned}$$

Suy ra khẳng định (i) là được chứng minh. Nếu $p > N_{\alpha, \beta}/2$, chọn q thỏa mãn $2p' < q$ và $q < 2_{\alpha, \beta}^*$. Sử dụng phép nội suy giữa 2 và q , với mỗi $\theta \in (0, \infty)$ tồn tại hằng số $C_\theta \in (0, \infty)$ thỏa mãn với mọi $j \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_j} |u(X)|^{2p'} dX \right)^{\frac{1}{2p'}} &\leq \theta \left(\int_{B_j} |u(X)|^q dX \right)^{\frac{1}{q}} + C_\theta \left(\int_{B_j} |u(X)|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \theta C(q) \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(B_j)} + C_\theta \|u\|_{L^2(B_j)}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\left(\int_{B_j} |u(X)|^{2p'} dX \right)^{\frac{1}{p'}} \leq 2\theta^2 C^2(q) \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(B_j)}^2 + 2C_\theta^2 \|u\|_{L^2(B_j)}^2.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\phi(X)| |u(X)|^2 dX &\leq \|\phi\|_{L^p_v(\mathbb{R}^N)} \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\int_{B_j} |u(X)|^{2p'} dX \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \|\phi\|_{L^p_v(\mathbb{R}^N)} \sum_{j \in \mathbb{N}} 2\theta^2 C^2(q) \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(B_j)}^2 + 2C_\theta^2 \|u\|_{L^2(B_j)}^2 \\
&= \|\phi\|_{L^p_v(\mathbb{R}^N)} \left(2\theta^2 C^2(q) \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + 2C_\theta^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 3.2. *Giả sử l thỏa mãn điều kiện i) và $0 < \kappa < \lambda_0, 0 < \theta < 1$. Khi đó với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$*

$$\begin{aligned}
\widehat{C}_1 \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 &\leq \|\nabla_{\alpha,\beta} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} l(X) |u(X)|^2 dX - \kappa \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\
&\leq \widehat{C}_2 \|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2,
\end{aligned}$$

trong đó $\widehat{C}_1 = \min\{(\lambda_0 - \kappa)(1 - \theta)/2(\lambda_0 + \theta + C_\theta), (\lambda_0 - \kappa)/2\}$, $\widehat{C}_2 = \max\{1 + \theta, \theta + C_\theta\}$ và θ, C_θ được xác định trong (3.3).

Chứng minh. Do l thỏa mãn điều kiện i), sử dụng khái niệm chuẩn tương đương dễ dàng ta có điều phải chứng minh. $\square$

Từ Bổ đề 3.2, ta có

Bổ đề 3.3. *Giả sử γ thỏa mãn điều kiện i). Với mỗi $u, v \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$ định nghĩa*

$$((u, v))_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)} = (\nabla_{\alpha,\beta} u, \nabla_{\alpha,\beta} v)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (lu, v)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Khi đó $((\cdot, \cdot))_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}$ là một tích vô hướng trên $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$ và chuẩn được định nghĩa bởi tích vô hướng trên là tương đương với chuẩn định nghĩa trên không gian $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$, được xác định trong Mục 1.2.2.

Chứng minh. Từ khái niệm của tích vô hướng và l thoả mãn điều kiện $i)$, ta dễ dàng kiểm tra các điều kiện của tích vô hướng nên ta có điều phải chứng minh. $\square$

3.1.2 Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm tích phân

Đặt $H = \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$, khi đó H là không gian Hilbert cùng với tích vô hướng sau: Với $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \in H$ thì

$$\left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \right)_H = ((p, p_1))_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)} + (q, q_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Ta xác định toán tử $A : H \longrightarrow H$ như sau:

Miền xác định của toán tử A là $D(A) \subset H$ xác định bởi

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} : p, q \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N), P_{\alpha, \beta} p - l(X)p \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

và với mỗi $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in D(A)$ thì

$$\begin{aligned} A : H &\longrightarrow H \\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &\longmapsto A \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ P_{\alpha, \beta} p - l(X)p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ P_{\alpha, \beta} - l(X)I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bổ đề 3.4. *Toán tử liên hợp của toán tử A là toán tử $A^* : H \longrightarrow H$ xác định như sau: Miền xác định của A^* xác định bởi*

$$D(A^*) = \left\{ \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} : \chi, \psi \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N), P_{\alpha, \beta} \chi - l(X)\chi \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}.$$

và với mỗi $\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \in H$ thì

$$\begin{aligned} A^* : H &\longrightarrow H \\ \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} &\longmapsto A^* \left(\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \right) = - \begin{pmatrix} \psi \\ P_{\alpha,\beta}\chi - l(X)\chi \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & I \\ P_{\alpha,\beta} - l(X)I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Chứng minh. Từ định nghĩa của toán tử liên hợp thì $\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} \in D(A^*)$

và $A^* \begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} \chi \\ \psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ P_{\alpha,\beta}p_1 - l(X)p_1 \end{pmatrix} \right), \forall \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \in D(A), \\ &\Leftrightarrow (\nabla_{\alpha,\beta}p, \nabla_{\alpha,\beta}p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (l(X)p, p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (q, q_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= (\nabla_{\alpha,\beta}\chi, \nabla_{\alpha,\beta}q_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (l(X)\chi, q_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\psi, P_{\alpha,\beta}p_1 - l(X)p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \\ &\quad \forall p_1 \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N), P_{\alpha,\beta}p_1 \in L^2(\mathbb{R}^N), \forall p_1 \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

tức là (khi cho $q_1 = 0$)

$$\begin{aligned} &(l(X)p, p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\nabla_{\alpha,\beta}p, \nabla_{\alpha,\beta}p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= (\psi, P_{\alpha,\beta}p_1 - l(X)p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \\ &\quad \forall p_1 \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N), P_{\alpha,\beta}p_1 - l(X)p_1 \in L^2(\mathbb{R}^N) \end{aligned} \tag{3.9}$$

và (khi cho $p_1 = 0$)

$$\begin{aligned} (q, q_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= (\nabla_{\alpha,\beta}\chi, \nabla_{\alpha,\beta}q_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (l(X)\chi, q_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \\ &\quad \forall q_1 \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Áp dụng công thức Gauss-Green

$$\begin{aligned} (\nabla_{\alpha,\beta} p, \nabla_{\alpha,\beta} p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= -(p, P_{\alpha,\beta} p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \\ \forall p_1 \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N), P_{\alpha,\beta} p_1 - l(X)p_1 &\in L^2(\mathbb{R}^N), \end{aligned}$$

cùng với (3.9) dẫn tới

$$(p + \psi, P_{\alpha,\beta} p_1 - l(X)p_1)_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0, \forall p_1 \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N), P_{\alpha,\beta} p_1 - l(X)p_1 \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Do đó $p = -\psi$. Mặt khác (3.10) đúng khi và chỉ khi $P_{\alpha,\beta}\chi - l(X)\chi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ và $q = -P_{\alpha,\beta}\chi + l(X)\chi$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.3. Từ Bổ đề 3.4 ta suy ra toán tử iA là toán tử tự liên hợp, trong đó i là đơn vị ảo. Theo Định lý Stone 1.4, toán tử A sinh ra một C_0 -nhóm e^{At} trên H .

Ta ký hiệu H^* là không gian đối ngẫu của H . Trên không gian H xác định ánh xạ f^* như sau:

$$\begin{aligned} f^* : H &\longrightarrow H \\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &\longmapsto f^* \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda q(X) + f(X, p(X)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bổ đề 3.5. Giả sử $f(X, \xi)$ thỏa mãn các điều kiện ii). Khi đó những khẳng định sau đúng.

a) Ánh xạ Nemytskii

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N) \\ u &\longmapsto \widehat{f}(u)(X) := f(X, u(X)) \end{aligned}$$

là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$.

b) Ánh xạ f^* là Lipschitz trên mọi tập bị chặn của H .

Chứng minh. a) Từ (3.5) ta có

$$|f(X, \xi)|^2 \leq C \left(g^2(X) |\xi|^2 + |\xi|^{2(\rho+1)} + |h(X)|^2 \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(X, p)|^2 dX &\leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \left(g^2(X) |p|^2 + |p|^{2(1+\rho)} \right) dX + \int_{\mathbb{R}^N} |h(X)|^2 dX \right\} \\ &\leq C \left(\|g\|_{L^{N_{\alpha, \beta}}(\mathbb{R}^N)}^2 \|p\|_{L^{2^*_{\alpha, \beta}}(\mathbb{R}^N)}^2 + \|p\|_{L^{2(1+\rho)}(\mathbb{R}^N)}^{2(1+\rho)} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) < +\infty, \end{aligned}$$

với mọi $p \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$.

Giả sử $p, p_1 \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$, $R > 0$ và $\|p_1\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)} \leq R$, $\|p_1\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)} \leq R$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f(X, p) - f(X, p_1)|^2 dX &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |p - p_1|^2 \left(g^2(X) + |p|^{2\rho} + |p_1|^{2\rho} \right) dX \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} g^2(X) |p - p_1|^2 dX + C \int_{\mathbb{R}^N} |p - p_1|^2 |p|^{2\rho} dX + C \int_{\mathbb{R}^N} |p - p_1|^2 |p_1|^{2\rho} dX. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} g^2(X) |p - p_1|^2 dX &\leq \|g\|_{L^{N_{\alpha, \beta}}(\mathbb{R}^N)}^2 \|p - p_1\|_{L^{2^*_{\alpha, \beta}}(\mathbb{R}^N)}^2, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |p - p_1|^2 |p|^{2\rho} dX &\leq \|p\|_{L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^N)}^{2\rho} \|p - p_1\|_{L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^N)}^2, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |p - p_1|^2 |p_1|^{2\rho} dX &\leq \|p_1\|_{L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^N)}^{2\rho} \|p - p_1\|_{L^{2(\rho+1)}(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

Do không gian $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$ nhúng liên tục vào $L^{2^*_{\alpha, \beta}}(\mathbb{R}^N)$ và $1 < 2(\rho+1) \leq 2^*_{\alpha, \beta}$, nên

$$\begin{aligned} \|f(X, p) - f(X, p_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 &\leq C_1 \|p - p_1\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &\quad \times \left(1 + \|p\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^{2\rho} + \|p_1\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^{2\rho} \right), \end{aligned}$$

hay

$$\|f(X, p) - f(X, p_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C(R) \|p - p_1\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}.$$

b) Giả sử $R > 0$, $\left\| \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\|_H \leq R$ và $\left\| \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \right\|_H \leq R$. Ta có

$$f^* \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) - f^* \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda q_1 - \lambda q + f(X, p) - f(X, p_1) \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \left\| f^* \left(\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) - f^* \left(\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \right) \right\|_H^2 &= \|\lambda q_1 - \lambda q + f(X, p) - f(X, p_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &\leq 2 \|\lambda \bar{v} - \lambda v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + 2 \|f(X, p) - f(X, p_1)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \\ &\leq 2C \|p - p_1\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 \left(1 + \|p\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^{2\rho} + \|p_1\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^{2\rho} \right) \\ &\quad + 2\lambda^2 \|q_1 - q\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C_1(R) \left\| \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \right\|_H^2. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bây giờ ta sẽ chuyển Bài toán (3.1)-(3.2) về bài toán Cauchy cho hệ phương trình cấp một. Đặt $v(X, t) = u_t(X, t)$ và

$$\begin{aligned} U : [0, T] &\longrightarrow H \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ở đây $u(t) = u(X, t)$, $v(t) = v(X, t)$. Khi đó Bài toán (3.1)-(3.2) tương đương với bài toán sau đây cho hệ phương trình cấp một

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU + f^*(U(t)), \quad (3.11)$$

$$U(0) = U_0, \quad (3.12)$$

trong đó A là toán tử tuyến tính với ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ P_{\alpha,\beta} - l(X)I & 0 \end{pmatrix}$,
 I là toán tử đơn vị trên $S_1^2(\mathbb{R}^N)$ và $U_0 = \begin{pmatrix} u_0(X) \\ v_0(X) \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 3.1 (xem [41]). Giả sử $T > 0, T \in \mathbb{R}$. Một ánh xạ liên tục $U : [0, T) \rightarrow H$ được gọi là *ng nghiệm tích phân* của Bài toán (3.11)-(3.12) nếu nó là nghiệm của phương trình tích phân

$$U(X, t) = e^{tA}U_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f^*(U(X, s)) ds, \quad t \in [0, T),$$

trong đó e^{tA} là C_0 -nhóm trong H được nói đến trong Nhận xét 3.3. Nếu U khả vi hầu khắp nơi trên $[0, T)$ cùng với U_t và AU thuộc không gian $L_{loc}^1([0, T), H)$ và thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dU}{dt} = AU + f^*(U), \text{ hầu khắp nơi trên } (0, T) \text{ và } U(0) = U_0,$$

khi đó U được gọi là *ng nghiệm mạnh* của Bài toán (3.11)-(3.12).

Sử dụng Bổ đề 3.5 và chứng minh tương tự như Định lý 46.1 (p. 235), Định lý 46.2 (p. 236) trong [41] ta nhận được mệnh đề sau

Mệnh đề 3.1. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn. Khi đó với mỗi $R > 0$ tồn tại $T = T(R) > 0$ đủ nhỏ sao cho với $U_0 \in H, \|U_0\|_H \leq R$, Bài toán (3.11)-(3.12) tồn tại duy nhất một nghiệm tích phân thỏa mãn*

$$U(X, t) = e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f^*(U(X, s)) ds, \quad t \in [0, T),$$

trên khoảng thời gian $[0, T)$. Nghiệm có thể thác triển trên $[0, \tau)$ và ta có hoặc $\tau = +\infty$ hoặc $\lim_{t \rightarrow \tau^-} \|U(., t)\|_H = +\infty$.

Từ điều kiện *ii*), có ước lượng

$$|F(X, \xi)| \leq C \left(g(X)|\xi|^2 + |\xi|^{2+\rho} + |f(X, 0)||\xi| \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |F(X, u)| dX &\leq C_3 \int_{\mathbb{R}^N} \left(g(X)|u|^2 + |u|^{2+\rho} + |h(X)||u| \right) dX \quad (3.13) \\ &\leq C_4 \left(\|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u\|_{L^{2+\rho}(\mathbb{R}^N)}^{2+\rho} + \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right) < +\infty, \end{aligned}$$

với mọi $u \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$.

Bổ đề 3.6. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn. Khi đó nghiệm $u(t)$ của Bài toán (3.1)-(3.2) thỏa mãn*

$$\|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq M, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.14)$$

trong đó M là hằng số chỉ phụ thuộc vào các dữ liệu $l(X)$, $g(X)$, $g_1(X)$, $g_2(X)$ và R khi $\|u_0\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq R$.

Chứng minh. Giả sử $U(t)$ là nghiệm của Bài toán (3.11)-(3.12) với dữ kiện ban đầu U_0 . Định nghĩa

$$E(u(t), u_t(t)) = \|\nabla_{\alpha, \beta} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} \phi(X) |u(X)|^2 dX + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2.$$

Các hằng số κ, θ trong Bổ đề 3.2 là cố định, với mỗi $t \geq 0$

$$\begin{aligned} C_5 \left(\|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) &\leq E(u(t), u_t(t)) \\ &\leq C_6 \left(\|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right), \quad (3.15) \end{aligned}$$

ở đó

$$C_5 = \min \left\{ \widehat{C}_1, 1 \right\}, \quad C_6 = \max \left\{ \widehat{C}_2 + \kappa, 1 \right\}.$$

Lấy tích vô hướng của (3.1) với $u_t(X, t)$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$ và lấy tích phân trên $[0, t]$ đối với biến thời gian thì

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}E(u(t), u_t(t)) + \lambda \int_0^t \|u_t(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau \\
&= \frac{1}{2}E(u(0), u_t(0)) + \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, t)) dX - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, 0)) dX \leq \\
&\leq \frac{1}{2}E(u(0), u_t(0)) + \left| \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, 0)) dX \right| + \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, t)) dX.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Từ (3.8) và (3.13)

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} |F(X, u(X, 0))| dX \leq C_7 \|u_0\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2, \\
& \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, t)) dX \leq \int_{\mathbb{R}^N} g_2(X) dX.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{2}E(u(t), u_t(t)) \leq \frac{1}{2}E(u(0), u_t(0)) + C_7 \|u_0\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} g_2(X) dX,$$

hoặc

$$\|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Nhận xét 3.4. Giả sử B là tập bị chặn trong H , theo Bổ đề 3.6, tồn tại hằng số $C_8 = C_8(B)$ sao cho với mỗi $U = (u(t), u_t(t))$ cùng với dữ kiện ban đầu $(u_0, u_1) \in B$, ta có

$$\int_0^t \|u_t(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau \leq C_8 \tag{3.17}$$

với mỗi $t \geq 0$.

Định lý 3.1. *Giả sử i), ii) được thỏa mãn và $U_0 \in H$. Khi đó Bài toán (3.11)-(3.12) ta có nghiệm tích phân toàn cục duy nhất $U \in C([0, \infty); H)$. Hơn nữa, với mỗi t cố định ánh xạ $U_0 \mapsto S(t)U_0 := U(t)$ là liên tục trên H .*

Chứng minh. Giả sử nghiệm $U(t)$ được xác định trên khoảng cực đại $[0, T_{\max})$. Từ (3.13)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X)) dX &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (g_1(X) + g_2(X)u^2) dX \leq \\ &\leq \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^{2^*_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}^N)}^2 \leq \\ &\leq \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + C^2(2^*_{\alpha,\beta}) \|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{S^2_1(\mathbb{R}^N)}^2. \end{aligned}$$

Hơn nữa theo (3.14) nghiệm $U(t)$ tồn tại trên $[0, T_{\max})$ và thỏa mãn

$$\begin{aligned} \Phi(U(0)) \geq \Phi(U(t)) &\geq \frac{1}{2} \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_{\alpha,\beta} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \\ &- C^2(2^*_{\alpha,\beta}) \|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{S^2_1(\mathbb{R}^N)}^2 - \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Suy ra với mọi t thuộc $[0, T_{\max})$

$$\|U(t)\|_H^2 \leq \frac{2 \left(\Phi(U(0)) + \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \right)}{\min \left\{ 1, 1 - 2C^2(2^*_{\alpha,\beta}) \|g_2\|_{L^{\frac{N_{\alpha,\beta}}{2}}(\mathbb{R}^N)} \right\}} := \tilde{C}. \quad (3.18)$$

Từ (3.14) có $T_{\max} = +\infty$. Thật vậy, giả sử ngược lại $T_{\max} < +\infty$. Khi đó từ (3.14) ta có $\left\| U \left(T_{\max} - \frac{1}{n} \right) \right\|_H^2 \leq \tilde{C}$ với $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq \frac{1}{T_{\max}}$. Từ Mệnh đề 3.1 tồn tại hằng số $T^*(\tilde{C})$ (độc lập với n) sao cho Bài toán (3.11)-(3.12) có nghiệm duy nhất trên $\left[T_{\max} - \frac{1}{n}, T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\tilde{C}) \right)$, tức là $U(t)$ là nghiệm của bài toán trên $\left[0, T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\tilde{C}) \right)$. Nếu $n > \frac{1}{T^*(\tilde{C})}$ khi đó $T_{\max} - \frac{1}{n} + T^*(\tilde{C}) > T_{\max}$. Điều này mâu thuẫn với tính cực đại của $T_{\max}$.

Như vậy với $U_0 \in H$ thì bài toán Bài toán (3.11)-(3.12) có nghiệm duy nhất $U \in C([0, \infty); H)$.

3.1.3 Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu.

Giả sử U, V là hai nghiệm tích phân của Bài toán (3.1)-(3.2) với điều kiện ban đầu tương ứng $U_0, V_0 \in H$. Đặt $W = U - V$, $W_0 = U_0 - V_0$ ta có

$$\begin{aligned} U(t) &= e^{At}U_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f^*(U(s)) ds, \\ V(t) &= e^{At}V_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f^*(V(s)) ds. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lí 1.5 ta nhận được

$$\begin{aligned} \|W(t)\|_H &= \left\| e^{At}W_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} (f^*(U(s)) - f^*(V(s))) ds \right\|_H \leq \\ &\leq \left\| e^{At}W_0 \right\|_H + \int_0^t \left\| e^{A(t-s)} (f^*(U(s)) - f^*(V(s))) \right\|_H ds \leq \\ &\leq M e^{\omega t} \|W_0\|_H + \int_0^t M e^{\omega(t-s)} \|f^*(U(s)) - f^*(V(s))\|_H ds. \end{aligned}$$

Sử dụng tính chất Lipschitz của ánh xạ f^* và bất đẳng thức Gronwall dạng tích phân chúng ta suy ra sự phụ thuộc liên tục của nghiệm tích phân và điều kiện ban đầu. $\square$

3.2 Sự tồn tại tập hút toàn cục compact trong $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$

Từ Định lý 3.1, ta định nghĩa nửa nhóm liên tục $S(t) : H \rightarrow H$ như sau

$$S(t)U_0 := U(t),$$

trong đó $U(t)$ là nghiệm tích phân toàn cục duy nhất của Bài toán (3.11)-(3.12) với điều kiện ban đầu U_0 .

Từ Bổ đề 3.6, với mỗi tập bị chặn B trong H , tồn tại tập con $\mathcal{B}$ bị chặn trong H chỉ phụ thuộc vào B sao cho

$$\bigcup_{t \geq 0} S(t)B \subset \mathcal{B}. \quad (3.19)$$

Bổ đề 3.7. *Giả sử i), ii) được thỏa mãn và $\mathcal{B}$ là một tập bị chặn nói trên trong H . Khi đó mỗi nghiệm $U(t) = (u(X, t), u_t(X, t))$ của Bài toán (3.11)-(3.12) cùng với dữ kiện ban đầu $U_0 \in \mathcal{B}$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} \lim_{T, R \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{|X|_{\alpha, \beta} \geq R} \left(|u(X, t)|^2 + |u_t(X, t)|^2 + |\nabla_{\alpha, \beta} u(X, t)|^2 \right) dX dt \\ = 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

ở đây

$$|X|_{\alpha, \beta} = \left[|x|^{2(1+\alpha+\beta)} + |y|^{2(1+\alpha+\beta)} + (1+\alpha+\beta)^2 |z|^2 \right]^{\frac{1}{2(1+\alpha+\beta)}}.$$

Chứng minh. Chọn hàm trơn ϑ thỏa mãn $0 \leq \vartheta(s) \leq 1$ với $s \in \mathbb{R}^+$ và

$$\vartheta(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq 1; \quad \vartheta(s) = 1, \quad s \geq 2.$$

Khi đó

$$\nabla_{\alpha, \beta} \vartheta \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) = \frac{1}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \vartheta' \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) \nabla_{\alpha, \beta} |X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)},$$

ở đây

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha,\beta}|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)} &= 2(1+\alpha+\beta) \left(x_1|x|^{2(\alpha+\beta)}, \dots, x_{N_1}|x|^{2(\alpha+\beta)}, y_1|y|^{2(\alpha+\beta)}, \right. \\ &\quad \left. \dots, y_{N_2}|y|^{2(\alpha+\beta)}, (1+\alpha+\beta)|x|^\alpha|y|^\beta z_1, \dots, (1+\alpha+\beta)|x|^\alpha|y|^\beta z_{N_3} \right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \left| \nabla_{\alpha,\beta}|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)} \right|^2 &= 4(1+\alpha+\beta)^2 \left[|x|^{4(\alpha+\beta)+2} + |y|^{4(\alpha+\beta)+2} \right. \\ &\quad \left. + (1+\alpha+\beta)^2 |z|^2 |x|^{2\alpha} |y|^{2\beta} \right]. \end{aligned}$$

Từ định nghĩa của hàm ϑ , tồn tại hằng số $C_\vartheta > 0$, sao cho $|\vartheta'(s)| \leq C_\vartheta$ khi $s \in \mathbb{R}^+$ và nếu $|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)} \leq R^{2(1+\alpha+\beta)}$ khi đó

$$\frac{\left| \nabla_{\alpha,\beta}|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)} \right|}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \leq \frac{\sqrt{12}}{R} (1+\alpha+\beta) = \frac{C_9}{R}. \quad (3.21)$$

Nhân hai vế của phương trình (3.1) với $\vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u$, lấy tích phân theo biến X trên $\mathbb{R}^N$ và tích phân $[0, T]$ theo t , khi đó

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(u_{tt} + \lambda u_t + l(X)u \right) u \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) dX dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(P_{\alpha,\beta} u + f(X, u) \right) \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u dX dt. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Do

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta} u \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u dX dt \\
& = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) |\nabla_{\alpha,\beta} u|^2 dX dt + \frac{2}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \\
& \times \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) \vartheta' \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u \nabla_{\alpha,\beta} |X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)} \cdot \nabla_{\alpha,\beta} u dX dt \\
& = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) |\nabla_{\alpha,\beta} u|^2 dX dt = I_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u_t u dX dt \right| \\
& = \left| \frac{1}{2} \int_0^T \left(\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) |u(X, t)|^2 dX \right) dt \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) |u(X, T)|^2 dX \right| + \\
& + \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) |u(X, 0)|^2 dX \right| = I_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_{tt}(X, t) u(X, t) \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) dX dt \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_t(X, T) u(X, T) \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) dX - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} u_t(X, 0) u(X, 0) \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) dX - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u_t(X, t)|^2 \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) dX dt \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\|U(T)\|_H^2 + \|U_0\|_H^2 \right) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u_t(X, t)|^2 \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) dX dt = I_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) u \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) dX dt \leq \\
&\leq T \int_{\mathbb{R}^N} g_1(X) \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) dX = I_4.
\end{aligned}$$

Khi đó từ (3.22)

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(X) \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u^2 dX dt + \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha, \beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) |\nabla_{\alpha, \beta} u|^2 dX dt \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Từ Bổ đề 3.6 và (3.17), ta đạt được

$$I_2 + I_3 \leq C_{10}. \tag{3.24}$$

Áp dụng Bất đẳng thức Hölder và Bất đẳng thức Sobolev ta suy ra

$$|I_1| \leq \frac{C_{11}T}{R}. \quad (3.25)$$

Từ (3.7), ta có

$$I_4 \leq C_{\vartheta}T \int_{|X|_{\alpha,\beta} \geq R} g_1(X) dX. \quad (3.26)$$

Theo (3.24), (3.25) và (3.26)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(X) \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u^2 dX dt + \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) |\nabla_{\alpha,\beta} u|^2 dX dt \leq \\ & \leq C_{10} + C_{\vartheta}T \int_{|X|_{\alpha,\beta} \geq R} g_1(X) dX + \frac{C_{11}T}{R}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Mặt khác, do $\vartheta \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u(X, t) \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)$ và Bổ đề 3.2 nên

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(X) \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u^2 dX + \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla_{\alpha,\beta} \left(\vartheta \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u \right) \right|^2 dX \geq \\ & \geq \widehat{C}_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u^2 dX + \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla_{\alpha,\beta} \left(\vartheta \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u \right) \right|^2 dX \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla_{\alpha,\beta} \left(\vartheta \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u \right) \right|^2 dX \leq \\ & \leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) |\nabla_{\alpha,\beta} u|^2 dX + \frac{C_{11}}{R^2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Áp dụng (3.27), (3.28) và (3.29) dẫn tới

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \vartheta^2 \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u^2 dX dt + \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla_{\alpha,\beta} \left(\vartheta \left(\frac{|X|_{\alpha,\beta}^{2(1+\alpha+\beta)}}{R^{2(1+\alpha+\beta)}} \right) u \right) \right|^2 dX dt \leq \\ & \leq C_{12} + C_{13} T \int_{|X|_{\alpha,\beta} \geq R} g_1(X) dX + \frac{C_{14} T}{R} + \frac{C_{15} T}{R^2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Kết hợp (3.17) và (3.30)

$$\lim_{T, R \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_{|X|_{\alpha,\beta} \geq R} \left(|u(X, t)|^2 + |u_t(X, t)|^2 + |\nabla_{\alpha,\beta} u(X, t)|^2 \right) dX dt = 0.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 3.8. *Giả sử các điều kiện i), ii) được thỏa mãn và $U_n \rightharpoonup U$ trong H . Khi đó với mỗi $t \geq 0$ ta có*

$$S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U \text{ trong } H. \quad (3.31)$$

Chứng minh. Do $U_n \rightharpoonup U$ trong H , nên dãy $\{U_n\}$ là bị chặn trong không gian H . Khi đó theo Bổ đề 3.7 ta có dãy $\{S(t)U_n\}$ bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; H)$ với mọi $T > 0$. Mà $f(X, u)$ thỏa mãn điều kiện (f_2) nên

$\{f^*(S(t)U_n)\}$ cũng bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; H)$. Mặt khác, do $S(t)U_n$ là nghiệm của Bài toán (3.11)-(3.12) với U_n đóng vai trò của U_0 nên $\{\frac{d}{dt}S(t)U_n\}$ bị chặn trong không gian $L^\infty(0, T; H^*)$. Do đó có một dãy con $\{n_m\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} S(t)U_{n_m} \rightharpoonup \Theta(t) & \text{trong } L^2(0, T; H), \\ f^*(S(t)U_{n_m}) \rightharpoonup \chi & \text{trong } L^2(0, T; H), \\ \frac{d}{dt}S(t)U_{n_m} \rightharpoonup \frac{d}{dt}\Theta(t) & \text{trong } L^2(0, T; H^*). \end{cases} \quad (3.32)$$

Giả sử $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $\Theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}$, $S(t)U_n = \begin{pmatrix} S_1(t)U_n \\ S_2(t)U_n \end{pmatrix}$, nên

$$f^*(S(t)U_n) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda S_2(t)U_n + f(X, S_1(t)U_n) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} S_1(t)U_{n_m} \rightharpoonup \theta_1(t) & \text{trong } L^2(0, T; \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)), \\ S_2(t)U_{n_m} \rightharpoonup \theta_2(t) & \text{trong } L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^N)), \end{cases} \quad (3.33)$$

và $\chi = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda\theta_2(t) + \chi^* \end{pmatrix}$.

Ta cần chứng minh $\chi^* = f(\cdot, \theta_1(t))$. Lý luận như ở [59] ta thu được

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n_m} \int_0^{T-a} \|S_1(t)U_{n_m}(t+a) - S_1(t)U_{n_m}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 dt = 0, \forall T > 0. \quad (3.34)$$

Giả sử $\phi \in C^1([0, +\infty))$ là hàm thỏa mãn

$$0 \leq \phi(s) \leq 1, \quad \phi(s) = 1, \quad \forall s \in [0, 1], \quad \phi(s) = 0, \quad \forall s \geq 2.$$

Với mỗi n_m và $\kappa \geq 1$, ta định nghĩa

$$\omega_{n_m, \kappa}(X, t) = \phi\left(\frac{|X|^2}{\kappa^2}\right) S_1(t)U_{n_m}.$$

Khi đó ta có với mọi $\kappa \geq 1$, dãy $\{\omega_{n_m, \kappa}\}_{n_m \leq 1}$ bị chặn trong không gian $L^2(0, T; \mathbb{S}_{\alpha, \beta; 0}^{2, 2}(\Omega_{2\kappa})) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{2\kappa}))$ với mọi $T > 0$. Hơn nữa, ta có

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n_m} \left(\int_0^a \|\omega_{n_m, \kappa}(X, t)\|_{L^2(\Omega_{2\kappa})}^2 dt + \int_{T-a}^T \|\omega_{n_m, \kappa}(X, t)\|_{L^2(\Omega_{2\kappa})}^2 dt \right) = 0,$$

trong đó $\Omega_{2\kappa} = \{X \in \mathbb{R}^N : |X| < 2\kappa\}$.

Mặt khác từ (3.34) ta có với mọi $\kappa \geq 1$

$$\limsup_{a \rightarrow 0} \sup_{n_m} \int_0^{T-a} \|\omega_{n_m, \kappa}(X, t+a) - \omega_{n_m, \kappa}(X, t)\|_{L^2(\Omega_{2\kappa})}^2 dt = 0.$$

Thêm nữa, do $\Omega_{2\kappa}$ là tập bị chặn nên không gian $\mathbb{S}_{\alpha, \beta; 0}^{2, 2}(\Omega_{2\kappa})$ nhúng compact vào không gian $L^2(\Omega_{2\kappa})$. Khi đó, do Bổ đề 1.1, ta có $\{\omega_{n_m, \kappa}\}_{n_m \geq 1}$ là compact tương đối trong $L^2(0, T; L^2(\Omega_{2\kappa}))$.

Vì $\omega_{n_m, \kappa}(X, t) = S_1(t)U_{n_m}(X, t)$ với mọi $X \in \Omega_\kappa$, ta có với mọi $\kappa \geq 1$ dãy $\{S_1(t)U_{n_m}|_{\Omega_\kappa}\}$ là tiền compact trong $L^2(0, T; L^2(\Omega_\kappa))$. Do đó tồn tại một dãy con của dãy $\{S(t)U_{n_m}\}$ ký hiệu là $\{S(t)U_{n_m}^{n_m}\}_{n_m \geq 1}$ thỏa mãn

$$S(t)U_{n_m}^{n_m} \rightarrow \theta_1 \text{ trong } L^2(0, T; L^2(\Omega_k)) \text{ khi } n_m \rightarrow \infty, \forall \kappa \geq 1.$$

Do $f(\cdot, \cdot)$ là liên tục nên $f(X, S_1(t)U_{n_m}^{n_m}) \rightarrow f(X, \theta)$ hầu khắp nơi trong $\Omega_\kappa \times (0, +\infty)$. Mà dãy $\{f(X, S_1(t)U_{n_m}^{n_m})\}$ bị chặn trong $L^2(\Omega_\kappa \times (0, T))$ nên

$$f(X, S_1(t)U_{n_m}^{n_m}) \rightharpoonup f(X, \theta_1) \text{ trong } L^2(0, T; L^2(\Omega_\kappa)).$$

Từ tính duy nhất của giới hạn ta có

$$\chi^* = f(\cdot, \theta_1(t)) \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega_\kappa \times (0, T), \quad \forall T > 0, \forall \kappa \geq 1.$$

Vì $\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} \Omega_k = \mathbb{R}^N$, do vậy

$$\chi^* = f(\cdot, \theta_1(t)) \text{ hầu khắp nơi trong } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

Điều này dẫn tới

$$f^*(S(t)U_{n_m}) \rightharpoonup f^*(\Theta) \quad \text{trong } L^2(0, T; H).$$

Từ đó ta có

$$e^{At}U_{n_m} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f^*(S(\tau)U_{n_m}) d\tau \rightharpoonup e^{At}U + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f^*(\Theta) d\tau \quad \text{trong } H.$$

Sử dụng tính duy nhất của giới hạn, nên

$$\Theta(t) = e^{At}U + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f^*(\Theta) d\tau.$$

Tính duy nhất của nghiệm kéo theo $\Theta = S(t)U$. Do mỗi dãy con của dãy $\{S(t)U_n, \frac{d}{dt}S(t)U_n\}$ có một dãy con hội tụ trong không gian $L^2(0, T; H \times H^*)$ và giới hạn của mỗi dãy con này đều là $(S(t)U, \frac{d}{dt}S(t)U)$. Ta suy ra rằng dãy $\{S(t)U_n, \frac{d}{dt}S(t)U_n\}$ hội tụ yếu đến $(S(t)U, \frac{d}{dt}S(t)U)$ trong $L^2(0, T; H \times H^*)$. Từ đây với mỗi $t \in [0, T]$, ta có $S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U$ trong H^* . Mặt khác với mỗi $t \in [0, T]$, dãy $\{S(t)U_n\}$ là bị chặn trong H . Vì thế $S(t)U_n \rightharpoonup S(t)U$ trong H . Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 3.9. *Giả sử các điều kiện i), ii) được thỏa mãn và dãy $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ hội tụ yếu tới U trong H . Khi đó*

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|S(T)U_n - S(T)U\|_H = 0. \quad (3.35)$$

Chứng minh. Giả sử $S(t)U_n = (u_n(t), u_{nt}(t))$ là nghiệm của Bài toán (3.11)-(3.12) cùng với điều kiện ban đầu $U_n = (u_n(0), u_{nt}(0))$ và $S(t)U_0 = (u(t), u_t(t))$ là nghiệm với điều kiện ban đầu $U_0 = (u(0), u_t(0))$. Theo Bổ đề 3.6

$$\sup_{t \geq 0, n \geq 0} \|S(t)U_n\|_H \leq C_{16}. \quad (3.36)$$

Nhân hai vế của phương trình (3.1) với $u_t + \frac{\lambda}{2}u$, lấy tích phân trên $\mathbb{R}^N$ với biến X và tích phân theo biến t trên đoạn $[0, T]$, ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{2} \left\{ \int_0^T \left[E(u(t), u_t(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u(X, t)) u(X, t) dX \right] dt \right\} \\
&= \frac{1}{2} E(u(0), u_t(0)) \frac{1}{2} E(u(T), u_t(T)) + \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u(X, 0) u_t(X, 0) dX + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, T)) dX + \frac{\lambda^2}{4} \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 - \frac{\lambda^2}{4} \|u(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \\
&+ \frac{\lambda - 1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^2 dX dt - \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u(X, T) u_t(X, T) dX - \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, 0)) dX. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\left| \int_0^T \left[E(u(t), u_t(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u) u dX \right] dt \right| \leq C_{17}. \tag{3.38}$$

Tương tự như trong (3.38)

$$\left| \int_0^T \left[E(u_n(t), u_{nt}(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} f(X, u_n) u_n dX \right] dt \right| \leq C_{18}. \tag{3.39}$$

Nhân phương trình (3.1) với u_t và lấy tích phân trên $[t, T] \times \mathbb{R}^N$, thì

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} E(u(T), u_t(T)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, T)) dX + \lambda \int_t^T \|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau \\
&= \frac{1}{2} E(u(t), u_t(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, t)) dX, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Từ (3.38) và (3.40), ta thu được

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}E(u(T), u_t(T)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, T))dX + \frac{\lambda}{T} \int_0^T \int_t^T \|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2}E(u(t), u_t(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, t))dX \right] dt \geq \\
&\geq \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(-F(X, u(X, t)) + \frac{1}{2}f(X, u)u \right) dX dt - \frac{C_{17}}{2T}. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Kết hợp (3.39) và (3.40) dẫn đến

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}E(u_n(T), u_{nt}(T)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u_n(X, T))dX + \frac{\lambda}{T} \int_0^T \int_t^T \|u_{n\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt \\
&\leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(-F(X, u_n(X, t)) + \frac{1}{2}f(X, u_n)u_n \right) dX dt + \frac{C_{18}}{2T}. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Từ (3.41) và (3.42), ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}E(u_n(T), u_{nt}(T)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u_n(X, T))dX + \frac{\lambda}{T} \int_0^T \int_t^T \|u_{n\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt \\
&\leq \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(F(X, u(X, t)) - F(X, u_n(X, t)) \right) dX dt + \\
&+ \frac{1}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \left(f(X, u_n)u_n - f(X, u)u \right) dX dt + \frac{1}{2}E(u(T), u_t(T)) - \\
&- \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, T))dX + \frac{\lambda}{T} \int_0^T \int_t^T \|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau dt + \frac{C_{17} + C_{18}}{2T}.
\end{aligned}$$

Do đó với mỗi $\epsilon > 0$ tùy ý, tồn tại hằng số T_0 thoả mãn

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} E(u_n(T), u_{nt}(T)) \leq E(u(T), u_t(T)) + \epsilon, \\ \text{với mọi } T \geq T_0. \quad (3.43)$$

Theo Bổ đề 3.2 và Bổ đề 3.8, suy ra

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|S(T)U_n - S(T)U_0\|_H^2 &\leq C_{19} \limsup_{n \rightarrow +\infty} E(u_n(T) - u(T), u_{nt}(T) - u_t(T)) \\ &= C_{19} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{\alpha, \beta} u_n|^2 dX - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla_{\alpha, \beta} u_n \cdot \nabla_{\alpha, \beta} u_n dX + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{\alpha, \beta} u|^2 dX + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(X) |u_n(T)|^2 dX - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(X) u_n(T) u(T) dX + \int_{\mathbb{R}^N} \gamma(X) |u(T)|^2 dX + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N} |u_{nt}(T)|^2 dX - 2 \int_{\mathbb{R}^N} u_{nt}(T) u_t(T) dX + \int_{\mathbb{R}^N} |u_t(T)|^2 dX \right\} \\ &= C_{19} \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} E(u_n(T), u_{nt}(T)) - E(u(T), u_t(T)) \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Kết hợp (3.43) và (3.44) ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Ta đưa ra kết quả chính của chương này như sau.

Định lý 3.2. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thoả mãn. Khi đó $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là compact tiệm cận trong H , nghĩa là, với mọi dãy bị chặn $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ trong H và mọi dãy không âm $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ thoả mãn $t_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, thì từ $\{S(t_n)U_n\}_{n=1}^\infty$ trích ra được một dãy con hội tụ trong H .*

Chứng minh. Theo (3.19), tồn tại một tập bị chặn $\mathcal{B}$ trong H thoả mãn $S(t_n)U_n \subset \mathcal{B}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó tồn tại $U \in H$ và một dãy con $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ sao cho

$$S(t_{n_k})U_{n_k} \rightharpoonup U \text{ trong } H.$$

Vì vậy,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|S(t_{n_k})U_{n_k}\|_H \geq \|U\|_H. \quad (3.45)$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh tồn tại một dãy con của dãy $S(t_{n_k})U_{n_k}$ hội tụ mạnh tới U trong H bằng cách xây dựng dãy con $S(t_{n_{k_j}})U_{n_{k_j}}$ của $S(t_{n_k})U_{n_k}$ thỏa mãn

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \|S(t_{n_{k_j}})U_{n_{k_j}}\|_H \leq \|U\|_H.$$

Thật vậy, từ Bổ đề 3.9, với mỗi $l > 0$, tồn tại $T_0 = T_0(l, \mathcal{B})$ sao cho với mỗi $\{\varphi_i\} \subset \mathcal{B}, \varphi_i \rightharpoonup \varphi$ trong H , thì

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \|S(T_0)\varphi_i\|_H \leq \|S(T_0)\varphi\|_H + \frac{1}{l}. \quad (3.46)$$

Vì $t_{n_k} \geq T_0$, nên

$$S(t_{n_k} - T_0)U_{n_k} \subset \mathcal{B}.$$

Vì vậy có U_{T_0} và một dãy con $\{n_{k_j(l)}\}_{j(l)=1}^\infty$ của dãy $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ thỏa mãn

$$S(t_{n_{k_j(l)}} - T_0)U_{n_{k_j(l)}} \rightharpoonup U_{T_0} \text{ trong } H. \quad (3.47)$$

Sử dụng Bổ đề 3.8, suy ra

$$S(t_{n_{k_j(l)}})U_{n_{k_j(l)}} = S(T_0)S(t_{n_{k_j(l)}} - T_0)U_{n_{k_j(l)}} \rightharpoonup S(T_0)U_{T_0} \text{ trong } H.$$

Do tính duy nhất của giới hạn nên $U = S(T_0)U_{T_0}$. Lấy $\varphi_{k_j(l)} = S(t_{n_{k_j(l)}} - T_0)U_{n_{k_j(l)}}$ trong (3.46), ta có

$$\limsup_{j(l) \rightarrow \infty} \|S(T_0)S(t_{n_{k_j(l)}} - T_0)U_{n_{k_j(l)}}\|_H \leq \|S(T_0)U_{T_0}\|_H + \frac{1}{l}.$$

Suy ra,

$$\limsup_{j(l) \rightarrow \infty} \|S(t_{n_{k_j(l)}})U_{n_{k_j(l)}}\|_H \leq \|U\|_H + \frac{1}{l}. \quad (3.48)$$

Với $l = 1$, từ (3.48), tồn tại $j_1(1)$ thỏa mãn

$$\left\| S(t_{n_{k_{j_1(1)}}})U_{n_{k_{j_1(1)}}} \right\|_H \leq \|U\|_H + 2.$$

Ký hiệu $j_1(1)$ bởi j_1 .

Với $l = 2$, từ (3.48), tồn tại $j_2(2)$ thỏa mãn $n_{k_{j_1}} < n_{k_{j_2(2)}}$ và

$$\left\| S(t_{n_{k_{j_2(2)}}})U_{n_{k_{j_2(2)}}} \right\|_H \leq \|U\|_H + 1.$$

Ta định nghĩa $j_2(2)$ bởi j_2 .

Tương tự, với $l = m$, từ (3.48), tồn tại $j_m(m)$ thỏa mãn $n_{k_{j_{m-1}}} < n_{k_{j_m(m)}}$ và

$$\left\| S(t_{n_{k_{j_m(m)}}})U_{n_{k_{j_m(m)}}} \right\|_H \leq \|U\|_H + \frac{2}{m}.$$

Ta định nghĩa $j_m(m)$ bởi j_m .

Cứ làm như vậy ta thu được dãy $\{n_{k_{j_i}}\}_{i=1}^{\infty}$ là dãy con của dãy $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ và thỏa mãn

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \left\| S(t_{n_{k_{j_i}}})U_{n_{k_{j_i}}} \right\|_H \leq \|U\|_H.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Định lý dưới đây khẳng định sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm $S(t)$ trong H .

Định lý 3.3. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thỏa mãn. Khi đó nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi Bài toán (3.11)-(3.12) có một tập hút toàn cục compact tiệm cận $\mathcal{A}_H$ trong H .*

Chứng minh. Ký hiệu

$$\mathcal{B} = \left\{ U \in H : \|U\|_H^2 < M \right\},$$

ở đây M là hằng số trong (3.14). Khi đó $\mathcal{B}$ là tập hấp thụ của $S(t)$ trong H . Hơn nữa, $S(t)$ là compact tiệm cận trong H do Định lý 3.2. Điều này

chỉ ra sự tồn tại tập hút toàn cục compact tiệm cận $\mathcal{A}_H$ của $S(t)$ trong H . $\square$

Ví dụ 3.1. Ta sẽ chỉ ra sự tồn tại tập hút toàn cục của bài toán Cauchy sau

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} + u = P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} u + f(X, u) \text{ với } X \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(X, 0) = u_0(X), \frac{\partial u}{\partial t}(X, 0) = u_1(X), X \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (3.49)$$

trong đó $u_0(\cdot) \in \mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^3)$, $u_1(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, λ là hằng số dương,

$$P_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + |x| |y| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

và

$$f(X, \xi) = \begin{cases} \frac{-\xi(1-\xi)}{|X|^8+1} \text{ với } \xi < 1, |X|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ \frac{\xi(1-\xi)}{|X|^8+1} \text{ với } \xi \geq 1. \end{cases}$$

Khi đó

$$F(X, \xi) = \begin{cases} \frac{-1}{|X|^8+1} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} \right) & \text{với } \xi < 1, \\ \frac{1}{|X|^8+1} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} - \frac{1}{3} \right) & \text{với } \xi \geq 1. \end{cases}$$

Rõ ràng $f(X, \xi)\xi \leq 0$, $F(X, u) \leq 0$ với mọi $X \in \mathbb{R}^3$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(X, \xi)$ thoả mãn các điều kiện $(f_1) - (f_3)$ với $N_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 4$, $\rho = 2$, $h(X) = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 1$,

$$g(X) = \frac{1}{|X|^8 + 1}, g_1(X) = g_2(X) \equiv 0.$$

Áp dụng Định lý 3.3, Bài toán (3.49) có một tập hút toàn cục compact tiệm cận $\mathcal{A}_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)}$ trong $\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$ đối với nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi Bài toán (3.49).

3.3 Phương pháp hệ gradient và cấu trúc của tập hút toàn cục compact

Trong mục này chúng tôi sẽ áp dụng một phương pháp khác, được gọi là phương pháp hệ gradient, mà đã được phát triển trong [17] để chứng minh sự tồn tại của tập hút toàn cục đối với hệ động lực $(H, S(t))$ đã được xét trong Mục 3.2, đồng thời mô tả cấu trúc của tập hút toàn cục này. Khái niệm hệ gradient được nêu trong Định nghĩa 1.8.

Ta xét hệ động lực $(H, S(t))$ mà đã được mô tả trong Mục 3.2. Ký hiệu $\mathcal{N}_0$ là tập hợp các điểm dừng của hệ này, tức là

$$\mathcal{N}_0 = \{(u, 0) \in H : -P_{\alpha, \beta}u + l(X)u = f(X, u), X \in \mathbb{R}^N\}$$

Đa tập không ổn định của hệ động lực này được xác định bởi

$$W^u(\mathcal{N}_0) = \bigcup W^u(u_0, 0),$$

trong đó $W^u(u_0, 0) = \{(u, v); S(t)(u_0, 0) \rightarrow (u, v) \text{ khi } t \rightarrow +\infty\}$.

Dưới đây là định lý về sự tồn tại của tập hút toàn cục compact và liên thông cùng với việc mô tả cấu trúc của nó.

Định lý 3.4. *Giả sử các điều kiện i) và ii) được thoả mãn. Khi đó hệ động lực $(H, S(t))$ liên kết với Bài toán (3.1)-(3.2) là hệ gradient và compact tiệm cận, đồng thời có một tập hút toàn cục compact liên thông $\mathcal{A}$. Hơn nữa, $\mathcal{A} = W^u(\mathcal{N}_0)$ và là đa tập không ổn định của hệ động lực này.*

Chứng minh. Để chứng minh định lý ta sẽ kiểm tra các điều kiện của

Định lý 1.3, trước tiên ta định nghĩa một hàm Φ trên H như sau

$$\Phi(U) = \frac{1}{2} \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} l(X) u^2 dX + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \right) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X)) dX. \quad (3.50)$$

Khi đó từ (3.1), ta đạt được

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(S(t)U_0) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} E(u(t), u_t(t)) - \int_{\mathbb{R}^N} F(X, u(X, t)) dX \right] \\ &= -\lambda \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq 0, \end{aligned}$$

nghĩa là

$$\Phi(S(t)U_0) + \lambda \int_0^t \|u_\tau(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau = \Phi(U_0), \quad \forall U_0 \in H,$$

và nếu $\Phi(S(t)U_0) = \Phi(U_0)$ với mọi $t > 0$ và với một số U_0 , nó kéo theo

$$\lambda \int_0^t \|u_\tau(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 d\tau = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Điều này có chỉ khi $S(t)U = (u_0, 0)$ là một điểm tới hạn. Do đó Φ là một hàm Lyapunov nghiêm ngặt. Dễ dàng chỉ ra rằng với bất kỳ $U \in H$

$$\begin{aligned} \Phi(U) &\geq C_{20} \|U\|_H^2 - \|g_2\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}, \\ \Phi(U) &\leq C_{21} \|U\|_H^2 + \|g_2\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Vì thế $\Phi(U)$ là tập bị chặn trên bất kỳ tập bị chặn của H và tập $\Phi_R = \{U : \Phi(U) \leq R\}$ là bị chặn với bất kỳ R . Cuối cùng, ta sẽ chỉ ra rằng $\mathcal{N}_0$ là bị chặn trong H . Lấy tích vô hướng của phương trình $-P_{\alpha, \beta} u + l(X)u = f(X, u)$ với $u(X)$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$, ta được

$$\|\nabla_{\alpha, \beta} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}^2 + \int_{\mathbb{R}^N} l(X) |u(X)|^2 dX \leq \|g_1\|_{L^1(\mathbb{R}^N)},$$

suy ra

$$\|u\|_{\mathbb{S}_1^2(\mathbb{R}^N)}^2 \leq C_{22}.$$

Từ Định lý 1.3, ta nhận được kết quả. □

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp bài toán hyperbolic chứa toán tử elliptic suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$. Ngoài việc phương trình chứa thêm số hạng tuyến tính, số hạng phi tuyến được giả thiết tăng trưởng kiểu đa thức theo ẩn hàm u và có thể phụ thuộc biến không gian. Các kết quả đạt được bao gồm:

- 1) Chứng minh được sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục của bài toán (Định lý 3.1).
- 2) Chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục compact của bài toán bằng các phương pháp của lý thuyết hệ động lực vô hạn chiều (Định lý 3.3).
- 3) Chứng minh được tập hút toàn cục compact là liên thông bằng phương pháp hệ gradient, đồng thời mô tả cấu trúc của nó (Định lý 3.4).
- 4) Điểm mới của chương này là: Đã đưa ra một lớp hàm phi tuyến, chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân và xem xét dáng điệu tiệm cận của bài toán trong toàn không gian. Các kết quả đối với lớp hàm này là mới khi toán tử $P_{\alpha,\beta}$ là toán tử elliptic.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Các kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

1. Đối với phương trình Δ_γ^2 -Laplace nửa tuyến tính cấp bốn đưa ra được đẳng thức tích phân kiểu Pohozaev của bài toán Dirichlet, từ đó chứng minh sự không tồn tại nghiệm không tầm thường trong miền δ_t -hình sao khi vế phải có độ tăng trưởng theo u lớn hơn $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$; đồng thời chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu, tính nhiều nghiệm của bài toán với điều kiện số hạng phi tuyến có bậc tăng trưởng theo u là nhỏ hơn $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$, $\tilde{N}$ là số chiều thuần nhất. Qua đó đã chứng tỏ giá trị $\frac{\tilde{N}+4}{\tilde{N}-4}$ là giá trị tới hạn của bậc tăng trưởng của vế phải theo u .
2. Đối với bài toán Cauchy trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$ cho phương trình hyperbolic chứa toán tử elliptic suy biến mạnh $P_{\alpha,\beta}$. Đưa ra các điều kiện đủ đối với các thành phần tuyến tính và phi tuyến của phương trình để đảm bảo sự tồn tại duy nhất của nghiệm tích phân toàn cục, sự tồn tại của tập hút toàn cục compact liên thông trong không gian $S_1^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$, đồng thời mô tả cấu trúc của nó.

Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Liên quan tới chủ đề luận án, những vấn đề sau là mở và theo chúng tôi là đáng quan tâm:

1. Điều kiện tồn tại nghiệm của các bài toán biên nói trên trong miền không bị chặn.
2. Nghiên cứu các tính chất của tập hút toàn cục như: số chiều, sự phụ thuộc liên tục vào các tham số, tính trơn, ...
3. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của các phương trình hyperbolic suy biến với các điều kiện biên khác nhau, chẳng hạn điều kiện biên không thuần nhất, điều kiện biên Neumann, điều kiện biên hỗn hợp, điều kiện biên phi tuyến, ... Để làm được điều này cần xây dựng được không gian có trọng tương ứng, định lý nhúng kiểu Sobolev.
4. Nghiên cứu sự tồn tại tập hút khi hàm phi tuyến phụ thuộc thời gian như tập hút lùi, tập hút đều.
5. Các mô hình ứng dụng thực tế.

Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án

- [1] D. T. Luyen and P. T. K. Yen (2021), “Long time behavior of solutions to semilinear hyperbolic equations involving strongly degenerate elliptic differential operators”, *J. Korean Math. Soc.* 58 (2021), No. 5, 1279-1298.
- [2] D.T. Luyen. H.T. Ngoan and P.T.K. Yen (2022), “Existence and non-existence of solutions for semilinear bi- Δ_γ -Laplace equation”. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 45, no. 2, 819-838.

Tài liệu tham khảo

- [1] Adimurthi, F. Pacella and S. L. Yadava, (1995), “Characterization of concentration points and L^∞ -estimates for solutions of a semilinear Neumann problem involving critical Sobolev exponent”, *Differential and Integral Equations*, 8, 41-68.
- [2] C. T. Anh (2010), “Pullback attractors for non-autonomous parabolic equations involving Grushin operator”, *Electron. J. Differ. Equ*, 11, 1-14.
- [3] C. T. Anh (2014), “Global attractor for a semilinear strongly degenerate parabolic equation on $\mathbb{R}^N$ ”, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 21, No.5, 663-678.
- [4] C. T. Anh, P. Q. Hung, T. D. Ke and T. T. Phong (2008), “Global attractor for a semilinear parabolic equation involving the Grushin operator”, *Electron. J. Differ. Equ*, 32, 1-11.
- [5] C. T. Anh and T. D. Ke (2009), “Existence and continuity of global attractors for a degenerate semilinear parabolic equation”, *Electron. J. Differ. Equ*., 61, 1-13.
- [6] C. T. Anh and B. K. My (2016), “Existence of solutions to Δ_λ -Laplace equations without the Ambrosetti-Rabinowitz condition”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 61, No.1, 137-150.

- [7] C. T. Anh and B. K. My (2017), “Liouville-type theorems for elliptic inequalities involving the Δ_λ -Laplace operator”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 61 (2016), No. 7, 1002-1013.
- [8] C. T. Anh and V. M. Toi (2016), “Null controllability in large time of a parabolic equation involving the Grushin operator with an inverse-square potential”, *Nonlinear Differential Equations and Applications*, Vol. 23, no. 2, 23:20.
- [9] F. V. Atkinson, H. Brezis and L. Peletier (1990), “Nodal solutions of elliptic equations with critical Sobolev exponents”, *J. Differential Equations*, 85, 151-170.
- [10] A. V. Babin and M. I. Vishik (1992), *Attractors of Evolution Equations*, Nauka, Moscow, English translation, North-Holland, pp. 532.
- [11] T. Bieske (2002), “Viscosity solutions on Grushin type planes”, *Illinois J. Math.*, 46, 893-911.
- [12] H. Brezis and L. Nirenberg (1983), “Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 36, 437-477.
- [13] C. Budd, M. C. Knaap and L. A. Pelrtier (1991), “Asymptotic behaviour of solutions of Elliptic equations with critical exponents and Neumann boundary conditions”, *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh*, 117A, 225-250.
- [14] A. Carvalho, J. A. Langa and J. C. Robinson (2013), *Attractors for Infinite Dimensional Non-Autonomous Dynamical Systems*, Appl. Math. Sci., 182. Berlin: Springer, pp. 409.

- [15] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik (2002), *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI. pp. 363.
- [16] I. D. Chueshov (2002), *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems*, ACTA Scientific Publishing House, Kharkov, Ukraine, pp. 436.
- [17] L. D. Chueshov and L. Ladieska (2008), *Long-time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Mem. Amer. Math. Soc., pp. 195, No 912.
- [18] N. M. Chuong, T. D. Ke , N. V. Thanh and N. M. Tri (1999), “Non-existence theorem for boundary value problem for some classes of semilinear degenerate elliptic operators”, *Proceeding of the conference on PDEs and their applications*, Hanoi Dec, 185-190.
- [19] N. M. Chuong and T. D. Ke (2004), “Existence of Solutions for a nonlinear degenerate elliptic system”, *Electron. J. Differ. Equ*, (93), 1-15.
- [20] N. M. Chuong and T. D. Ke (2005), “Existence results for a semilinear parametric problem with Grushin type operator”, *Electron. J. Differ. Equ*, (94), 1-12.
- [21] Fall Djiby (2005), *Longtime Dynamics of Hyperbolic Evolutionary Equations in Unbounded Domains and Lattice Systems*, Graduate Theses and Dissertations, University of South Florida, pp. 67 <http://scholarcommons.usf.edu/etd/2875>.

- [22] Friedman (1958), “On the regularity of the solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations”, *J. Math. Mech.*, 7, 43-59.
- [23] V. V. Grushin (1970), “A certain class of hypoelliptic operators”, *Mat. Sb*, 83, 456-473.
- [24] V. V. Grushin (1971), “A certain class of elliptic pseudo differential operators that are degenerated on a submanifold”, *Mat. Sb*, vol. 84 (126), 163-195.
- [25] B. Helffer and J. Nourrigat (1985), *Hypoellipticite Maximal pour des Operateurs Polynomes de Champ de Vecteur*, Birkhauser, pp. 275.
- [26] L. Hörmander (1966), “Pseudo-differential operators and nonelliptic boundary problems”, *Ann. Math.*, 83, 129-209.
- [27] L. Hörmander (1967), “Hypoelliptic second order differential equation”, *Acta Math*, 119, 147-171.
- [28] L. P. Rothschild and E. M. Stein, “Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups,” *Acta Math*, 137 (1976), no. 3-4, 247-320.
- [29] A. E. Kogoj and E. Lanconelli (2012), “On semilinear Δ_λ -Laplace equation”, *Nonlinear Analysis*, 75, 4637-4649.
- [30] A. E. Kogoj and S. Sonner (2013), “Attractors for a class of semilinear degenerate parabolic equations”, *J. Evol. Equ.*, 13, 675–691.
- [31] A. E. Kogoj and S. Sonner (2016), “Hardy type inequalities for Δ_λ -Laplacians”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, Volume 61, Issue 3, 422 - 442.

- [32] A. E. Kogoj and S. Sonner (2014), “Attractors met X-elliptic operators”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 420, 407-434.
- [33] E. Lanconelli and A. E. Kogoj (2000), “X-elliptic operators and X-control distances”, *Contributions in honor of the memory of Ennio De Giorgi, Ric. Mat.* 49, suppl., 223–243.
- [34] D. T. Luyen and N. M. Tri (2015), “Existence of solutions to boundary value problems for semilinear Δ_γ differential equations”, *Mathematical Notes*, Vol. 97, No. 1, 73-84.
- [35] A. Miranville and S. Zelik (2008), “Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains”, *Handbook of differential equations: Evolutionary equations*. Vol. IV. Amsterdam: Elsevier/ North-Holland. Handbook of Differential Equations, 103-200.
- [36] A. Pazy (1983), *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Appl. Math. Sci., Vol.44 , Springer, New York, pp. 279.
- [37] S. I. Pohozaev (1965), “Eigenfunctions for the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ ” *Russian Dokl. Akad. Nauk SSSR*, (165), 33-36.
- [38] D. T. Quyet, L. T. Thuy and N. X. Tu (2017), “Semilinear strongly degenerate parabolic equation with a new class of nonlinearities”, *Vietnam J. Math.* 45, no. 3, 507-517.
- [39] G. Raugel (2002), “Global attractors in partial differential equations”, *In Handbook of dynamical systems*, Vol. 2, 885-892, North-Holland, Amsterdam.

- [40] J. C. Robinson (2001), *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 461.
- [41] G. R. Sell and Y. You (2002), *Dynamics of Evolutionary Equations*, Springer, New York, pp. 670.
- [42] N. M. Stavrakakis and N. B. Zographopoulos (1999), “Existence results for quasilinear Elliptic systems in R^n ”, *Electron. J. Differ. Equ*, 3, 1-15.
- [43] D. Tartakoff and L. Zanghirati (2005), “Local real analiticity of solutions for sums of squares of nonlinear vector fields”, *J. Diff. Equat.*, 213, 341-351.
- [44] R. Temam (1988), *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York, pp. 500.
- [45] R. Temam (1995), *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, 2nd edition, Philadelphia, pp. 141.
- [46] N. T. C. Thuy and N. M. Tri (2002), “Some existence and non-existence results for boundary value problem (BVP) for semilinear elliptic degenerate operators”, *Russ. J. Math. Phys*, 366-371.
- [47] P. T. Thuy and N. M. Tri (2012), “Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations”, *Nonlinear Diff. Equ. Appl.*, 19, 279-298.
- [48] P. T. Thuy and N. M. Tri (2013), “Long time behavior of solutions to semilinear parabolic equations involving strongly degenerate elliptic differential operators”, *Nonlinear Diff. Equ. Appl.*, 20, No 3, 1213-1224.

- [49] F. Treves (1999), “Symplectic geometry and analytic hypoellipticity of differential equations”, La Pietra 1996, *Proceed. Sympos. Pure Math. A. M. S.*, 65, 201-219.
- [50] N. M. Tri (1998), “On the Grushin equation”, *Math. Notes* (63), 84-93.
- [51] N. M. Tri (1998), “Critical Sobolev exponent for hypoelliptic operators”, *Acta Mathematica Vietnamica*, 23, N1, 83-94.
- [52] N. M. Tri (1999), “Semilinear perturbation of powers of the Mizohata operators”. *Comm. Partial Differential Equations*, 24, no. 1-2, 325–354.
- [53] N. M. Tri (2008), “Semilinear hypoelliptic differential operators with multiple characteristics”. *Trans. Amer. Math. Soc.* 360, no. 7, 3875–3907.
- [54] N. M. Tri (2010), *Semilinear Degenerate Elliptic Differential Equations, Local and global theories*, Lambert Academic Publishing, pp. 271.
- [55] N. M. Tri (2014), *Recent Progress in the Theory of Semilinear Equations Involving Degenerate Elliptic Differential Operators*, Publishing House for Science and Technology of the Vietnam Academy of Science and Technology, pp. 380.
- [56] W.Zhang, J. Zhang (2017) and Zh. Luo, (2017), “Multiple solutions for the fourth-order elliptic equation with vanishing potential”, *Applied Mathematics Letters* 73, 98-1-105.

- [57] B. Wang (1999), “Attractors for reaction-diffusion equation in unbounded domains”, *Physica D*, 128, 41-52.
- [58] C. J. Xu (1992), “Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, 45, 77-96.
- [59] R. Rosa (1998), “The global attractor for the 2D Navier-Stokes flow on some unbounded domains”, *Nonlinear Anal.* 32, 71-85.
- [60] D. Jerison and J. M. Lee (1987), “The Yamabe problem on CR manifolds” *J. Differential Geom*, 25, no.2, 167-197.
- [61] T. T. Khanh and N. M. Tri (2010), “On the analyticity of solutions to semilinear differential equations degenerated on a submanifold,” *J. Differential Equations*, 249, no.10, 2440-2475.
- [62] G. Cerami (1978), “An existence criterion for the critical points on unbounded manifolds”, *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A*, 112, 332-336. (in Italian).
- [63] G. Cerami (1980), “On the existence of eigenvalues for a nonlinear boundary value problem”, *Ann. Mat. Pura Appl*, 124, 161-179. (in Italian).
- [64] P. H. Rabinowitz (1986) *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 65. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI. viii+100 pp.