

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

INTHAVICHIT PADAPHET

VỀ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI KIỂU CARTAN
CHO HÀM ĐẾM RÚY GỌN VÀ VẤN ĐỀ DUY NHẤT

Ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9460102

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2023

Công trình được hoàn thành tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS HÀ TRẦN PHƯƠNG
TS. NGUYỄN VĂN THÌN

Phản biện 1:.....

Phản biện 2:.....

Phản biện 3:.....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp.....
họp tại: TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM-ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Vào hồi.....ngày.....tháng.....năm.....

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- THƯ VIỆN QUỐC GIA
- TRUNG TÂM SỐ - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
- THƯ VIỆN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Trong những năm gần đây, Lý thuyết phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình, hay còn gọi là Lý thuyết Nevanlinna-Cartan đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Được xem như bắt đầu bởi các công trình của H. Cartan vào năm 1933 khi Ông xây dựng các dạng định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai cho đường cong chỉnh hình, Lý thuyết Nevanlinna-Cartan được đánh giá là một trong những thành tựu sâu sắc, đẹp đẽ và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của Toán học như vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình, tính suy biến của đường cong đại số, lý thuyết hệ động lực, phương trình vi phân phức và một số lĩnh khác.

Kí hiệu $\mathcal{K}$ trường đóng đại số, có đặc số không, đầy đủ với chuẩn sinh bởi giá trị tuyệt đối không Acsimet, $\mathbb{W}$ là $\mathbb{C}$ hoặc $\mathcal{K}$ và $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là không gian xạ ảnh n chiều trên $\mathbb{W}$. Với đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có một biểu diễn tối giản là $(f_0, \dots, f_n)$, hàm

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan* của đường cong f , trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$.

Cho H là một siêu phẳng, L là một dạng tuyến tính xác định H và M là một số nguyên dương. Ta gọi $n_f(r, H)$ và $n_f^M(r, H)$ lần lượt là số không điểm của $L(f)(z)$ trong đĩa $\{|z| \leq r\}$, tương ứng kể cả bội hay bội cắt cụt bởi M . Hàm

$$N_f(r, H) = N_f(r, L) = \int_0^r \frac{n_f(t, H) - n_f(0, H)}{t} dt + n_f(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* và hàm

$$N_f^M(r, H) = N_f^M(r, L) = \int_0^r \frac{n_f^M(t, H) - n_f^M(0, H)}{t} dt + n_f^M(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi M của đường cong f kết hợp với siêu phẳng H .

Năm 1933, H. Cartan đã chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên mặt phẳng phức:

Định lý A. *Cho đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và q siêu phẳng $H_1, \dots, H_q$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó bất đẳng thức*

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^n(r, H_j) + o(T_f(r))$$

đúng với mọi $r > 0$ đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Định lý A cho ta một quan hệ giữa hàm đặc trưng của đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính với các hàm đếm bội cắt cụt với mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Công trình này của H. Cartan được đánh giá hết sức quan trọng, mở ra một hướng nghiên cứu mới cho việc phát triển lý thuyết Nevanlinna - nghiên cứu các dạng định lý cơ bản thứ hai cho ánh xạ phân hình, chỉnh hình và các ứng dụng của nó. Các kết quả nghiên cứu theo hướng này trong thời gian gần đây tập trung vào hai vấn đề:

1. Xây dựng các dạng của Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{W}^p$ hoặc một miền trong $\mathbb{W}^p$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ hoặc một đa tập đại số xạ ảnh trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ với mục tiêu là các siêu phẳng, siêu mặt cố định hoặc di động, bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan với các hàm xấp xỉ hoặc các dạng hàm đếm khác nhau.

2. Nghiên cứu các ứng dụng của các dạng của Định lý cơ bản thứ hai trong các lĩnh vực khác nhau của toán học, chẳng hạn, tính chất của số khuyết, vấn đề duy nhất cho hàm hay đường cong chỉnh hình, sự suy biến của các đường cong đại số và một số lĩnh vực khác.

Theo hướng nghiên cứu thứ nhất, tiếp nối công trình của H. Cartan, đã có nhiều tác giả xây dựng các dạng định lý cơ bản thứ hai bằng cách thiết lập các

quan hệ bất đẳng thức giữa hàm đặc trưng của một đường cong chỉnh hình với các xấp xỉ và hàm đếm không kể bội hay hàm đếm bội cắt cụt. Cụ thể, năm 1983, E. I. Nochka đã chứng minh một mở rộng của Định lý A cho trường hợp họ các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát trong không gian xạ ảnh phức $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Năm 1995, H. H. Khoai và M. V. Tu đã nghiên cứu Định lý A cho trường hợp đường cong chỉnh hình trên trường $\mathcal{K}$ và thu được kết quả:

Định lý B. *Cho $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong không suy biến tuyến tính và $H_1, \dots, H_q$ các siêu phẳng phân biệt $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó*

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^n(r, H_j) - \frac{n(n+1)}{2} \log r + O(1).$$

P. C. Hu và C. C. Yang đã mở rộng kết quả của H. H. Khoai và M. V. Tu cho trường hợp họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát. Trong những năm gần đây, có rất nhiều tác giả trong và ngoài nước đã nghiên cứu các dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{W}^m$ hay một miền trên $\mathbb{W}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ hay một đa tạp đại số xạ ảnh trong $\mathbb{W}$, trong các trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt cố định hay di động, với các dạng hàm đếm khác nhau. Chẳng hạn M. Ru, Q. M. Yan và Z. H. Chen, G. Dethloff, T. V. Tan, D. D. Thai, D. D. Thai, S. D. Quang, L. Shi, T. T. H. An và H. T. Phuong, H. T. Phuong và N. V. Thin, H. T. Phuong và L. Vilaisavan, P. C. Hu, N. V. Thin và nhiều tác giả khác.

Năm 2014, dựa trên các nghiên cứu về bội không điểm của các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của một họ hữu hạn các hàm chỉnh hình trên mặt phẳng phức tại một điểm, J. M. Anderson và A. Hinkkanen đã đưa ra một khái niệm mới về hàm đếm, được gọi là hàm đếm rút gọn và chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn này cho trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng cố định.

Cho $f : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là một đường cong chỉnh hình và $(f_0, \dots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của f . Kí hiệu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_n)$ là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các hàm $f_0, \dots, f_n$. Từ Bổ đề 1.4 ta thấy, với mỗi $z_0 \in \mathbb{W}$, các bội không điểm có thể có của các hàm thuộc $\mathcal{L}$ tại z_0 tạo nên một

dãy thỏa mãn

$$0 = d_0(z_0) < d_1(z_0) < \cdots < d_n(z_0).$$

Với siêu phẳng H xác định bởi dạng tuyến tính L , hiển nhiên $L(f) \in \mathcal{L}$ nên tồn tại $j \in \{0, \dots, n\}$ sao cho bậc không điểm của $L(f)$ tại z_0 bằng $d_j(z_0)$, tức là $\text{ord}_{L(f)}(z_0) = d_j(z_0)$. Ta kí hiệu $\nu(H, z_0) = j$ và gọi là *bội rút gọn* tại không điểm của $L(f)$ tại z_0 , hay còn gọi là bội rút gọn của f kết hợp với siêu phẳng H tại z_0 . Và gọi $\varepsilon(H, z_0) = d_j - j$ là *bội dư* của $L(f)$ tại z_0 hay còn gọi là bội dư của f kết hợp với siêu phẳng H tại z_0 .

Định nghĩa 1. Với mỗi $r > 0$, ta kí hiệu $\nu_f(r, H) = \sum_{|z| \leq r} \nu(H, z)$. Và hàm

$$\mathcal{N}_f(r, H) = \int_0^r \frac{\nu_f(t, H) - \nu_f(0, H)}{t} dt + \nu_f(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm rút gọn* của hàm f kết hợp với siêu phẳng H .

Từ định nghĩa ta thấy $\nu(H, z_0) \leq \min\{d_j, n\}$ nên $\nu_f(r, H) \leq n_f^n(r, H)$.

$$\mathcal{N}_f(r, H) \leq N_f^n(r, H). \quad (1)$$

Cho $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ và L_j là dạng tuyến tính định nghĩa H_j , $j = 1, 2, \dots, q$. Đặt

$$H = \frac{L_1(f)L_2(f) \dots L_q(f)}{W},$$

trong đó W là định thức Wronskian của $f_0, \dots, f_n$. Từ Bổ đề 1.6, với mỗi z_0 tùy ý ta luôn có $\sum_{j=1}^q \varepsilon(H_j, z_0) \leq \text{ord}_W(z_0)$. Đặt

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}, z) = \text{ord}_W(z) - \sum_{j=1}^q \varepsilon(H_j, z) \geq 0.$$

Và kí hiệu

$$\mathcal{V}_f(r, \mathcal{H}) = \sum_{|z| \leq r} \mathcal{V}(\mathcal{H}, z).$$

Định nghĩa 2. Hàm

$$\mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) = \int_0^r \frac{\mathcal{V}_f(t, \mathcal{H}) - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H})}{t} dt - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H}) \log r$$

được gọi là *hàm đếm bội dư* tại các không điểm của hàm f kết hợp với họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$.

Năm 2014, J. M. Anderson và A. Hinkkanen đã chứng minh

Định lý C. Cho $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geq n+1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó ta có

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q \mathcal{N}_f(r, H_j) - \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - N(r, H) + O(\log r) + O(\log T_f(f)), \quad (2)$$

khi $r \rightarrow \infty$ nằm ngoài một tập có độ đo tuyến tính hữu hạn.

Chú ý rằng, từ (1) ta thấy hàm đếm bội rút gọn $\mathcal{N}_f(r, H_j)$ trong Định lý C nhỏ hơn so với hàm đếm bội cắt cụt trong công trình của H. Cartan nên nó là một cải tiến kết quả của H. Cartan. Công trình này sẽ gợi ý cho chúng ta một vấn đề nghiên cứu mới trong lý thuyết Nevanlinna-Cartan: xem xét các dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn.

Theo hướng nghiên cứu thứ hai, trong luận án này chúng tôi tập trung vào nghiên cứu ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna-Cartan trong vấn đề duy nhất cho đường cong phân, chỉnh hình. Những kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về H. Fujimoto khi ông mở rộng Định lý năm điểm của R. Nevanlinna cho ánh xạ phân hình. Sau đó, vấn đề này ngay lập tức thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả thu được nhiều kết quả quan trọng.

Cho U là một miền trong $\mathbb{W}$, kí hiệu $\mathcal{F}$ là một họ các ánh xạ chỉnh hình khác hằng từ U vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$. Họ các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là *tập xác định duy nhất không kể bội*, kí hiệu URSIM (hoặc *tập xác định duy nhất kể cả bội*, kí hiệu URSCM) cho họ ánh xạ $\mathcal{F}$ nếu với mỗi cặp ánh xạ $f, g \in \mathcal{F}$, điều kiện $\overline{E}_f(\mathcal{D}) = \overline{E}_g(\mathcal{D})$ (hoặc $E_f(\mathcal{D}) = E_g(\mathcal{D})$ tương ứng) kéo theo $f \equiv g$. Các tập URSIM, URSCM được gọi chung là *tập xác định duy nhất* cho họ ánh xạ $\mathcal{F}$.

Trong các công trình H. Fujimoto đã chứng minh sự tồn tại các tập xác định duy nhất kể cả bội gồm $3n+2$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát cho họ các ánh xạ phân hình phức không suy biến tuyến tính và $2n+3$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát cho họ các ánh xạ phân hình phức không suy biến đại số. Năm 1983, L. Smiley đã chỉ ra sự tồn tại của các tập xác định duy nhất không kể bội gồm $3n+2$ siêu

phẳng cho đường cong chỉnh hình phức và H. Fujimoto đã nghiên cứu lại vấn đề này vào năm 1998. Năm 2006, G. Dethloff và T. V. Tan xem xét vấn đề tương tự cho trường hợp siêu phẳng di động. Năm 2006, D. D. Thai và S. D. Quang đã xem xét vấn đề duy nhất trong trường hợp mục tiêu là $3n + 1$ siêu phẳng. Năm 2008, M. Dulock và M. Ru và năm 2009, H. T. Phuong đã chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất trong trường hợp siêu mặt đối với đường cong chỉnh hình trên mặt phẳng phức. Năm 2009, Z. Chen, Q. Yan và năm 2010, G. Dethloff, T. V. Tan chỉ ra các tập duy nhất cho các đường cong chỉnh hình gồm $2n + 3$ siêu phẳng.

Kí hiệu $R_0 > 1$ là một số thực dương hoặc $+\infty$ và

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$$

là một hình vành khuyên trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Năm 2013, H. T. Phuong và T. H. Minh đã chứng minh một định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát và năm 2021, H. T. Phuong và L. Vilaisavanh đã nghiên cứu vấn đề này trong trường hợp các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese. Thời gian gần đây, các tác giả đã tiếp tục phát triển các dạng định duy nhất cho các lớp đường cong khác nhau với mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt, cố định hay di động. Chú ý rằng, hầu hết các chứng minh của các kết quả về tập xác định duy nhất đều dựa vào các dạng Định lý cơ bản thứ hai.

Như vậy, việc tiếp tục phát triển các dạng Định lý cơ bản thứ hai bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng với các dạng hàm đếm và ứng dụng của các định lý này trong vấn đề duy nhất cho ánh xạ phân, chỉnh hình là thực sự cần thiết. Hiện nay, những vấn đề nghiên cứu này đang được phát triển mạnh mẽ, thu hút được sự quan tâm nhiều tác giả và có nhiều công trình được công bố. Sự lựa chọn đề tài "**Về định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho hàm đếm rút gọn và vấn đề duy nhất**" của tác giả luận án này cũng nhằm tiếp tục phát triển thêm một số dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn, hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình trên trường $\mathbb{W}$ và xây dựng một số điều kiện đủ cho vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

• Đối tượng nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi tập trung nghiên cứu về tính chất của đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet hoặc trên trường các số phức $\mathbb{C}$ và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong mặt phẳng phức. Đây cũng là các đối tượng nghiên cứu cơ bản của lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna-Cartan.

• Mục đích nghiên cứu :

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu theo hai hướng như sau:

Hướng nghiên cứu thứ nhất: Xây dựng một số dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên một trường không Acsimet hoặc trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ với các mục tiêu là siêu phẳng ở vị trí tổng quát hay dưới tổng quát bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan với hàm đếm rút gọn.

Hướng nghiên cứu thứ hai: Thiết lập một số điều kiện đủ để hai đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên là trùng nhau trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát.

3. Tổng quan về luận án

Đối với hướng nghiên cứu thứ nhất, chúng tôi đã xây dựng được một số dạng Định lý cơ bản thứ hai như sau:

Định lý 1 (Định lý 1.7, Chương 1). Cho $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geq n + 1$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$. Khi đó ta có:

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q \mathcal{N}_f(r, H_j) - \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - N(r, H) - \frac{n(n+1)}{2} \log r + O(1),$$

khi $r \rightarrow \infty$ ngoài một tập có độ đo hữu hạn tuyến tính.

Định lý 2 (Định lý 2.4, Chương 2). Cho $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geq 2N - n + 1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí N -dưới tổng quát. Khi đó

$$(q - 2N + n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q \mathcal{N}_f(r, H_j) - \frac{N}{n} \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - \frac{N}{Mn} N(r, \Phi) - \frac{(N+1)n}{2} \log r + O(1),$$

khi $r \rightarrow \infty$ nằm ngoài một tập có độ đo tuyến tính hữu hạn.

Các định lý 1 và 2 là hai dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn cho đường cong chỉnh hình trường không Acsimet $\mathcal{K}$ trong hai trường hợp: họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát và ở vị trí dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$. Đối với đường cong chỉnh hình trên trường số phức chúng tôi thu được kết quả:

Để chứng minh kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, chúng tôi đã chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt. Cụ thể, cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ta kí hiệu

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R = +\infty \\ O(\log \frac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R < +\infty. \end{cases}$$

Định lý 3 (Định lý 2.13, Chương 2). Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và $D_j, 1 \leq j \leq q$, là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc d_j tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi d là bội chung nhỏ nhất của các d_j và đặt $M = \binom{n+d}{n} - 1$. Khi đó, với mỗi $1 < r < R_0$ và $q \geq M + 1$, ta có

$$\| (q - M - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j) + O_f(r). \quad (3)$$

Định lý 3 là một dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

Cho $\mathcal{D} = \{D_j, j = 1, \dots, q\}$ là một họ gồm q siêu mặt bậc d_j tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi d là bội chung nhỏ nhất của các d_j , kí hiệu

$$\delta_{\mathcal{D}} := \min\{d_1, \dots, d_q\}, \quad n_{\mathcal{D}} = \binom{n+d}{n} - 1$$

và

$$B(\mathcal{D}) = (d(n+1)^{2^{n+1}} + 1)^n.$$

Cho ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta kí hiệu

$$\overline{E}_f(D_j) = \{z \in \Delta \mid (D_j, f)(z) = 0 \text{ không kể bội}\}$$

và đặt

$$\overline{E}_f(\mathcal{D}) = \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} \overline{E}_f(D_j).$$

Các kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên chúng tôi thu được trong luận án này như sau:

Định lý 4 (Định lý 3.2, Chương 3). *Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm q siêu mặt ở vị trí tổng quát và $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số thỏa mãn $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Giả sử rằng*

$$\text{a) } \overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset \text{ với mỗi } i \neq j \in \{1, \dots, q\};$$

$$\text{b) } \overline{E}_f(D_j) \subset \overline{E}_g(D_j) \text{ với mỗi } j = 1, 2, \dots, q \text{ và } f(z) = g(z) \text{ với mọi } z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}).$$

$$\text{c) } \liminf_{r \rightarrow R_0} \sum_{j=1}^q N_f^1(r, D_j) / \sum_{j=1}^q N_g^1(r, D_j) > \frac{M}{M+1}.$$

Nếu $q \geq 2M+3$ thì tồn tại một tập con $S \subset \{1, \dots, q\}$ thỏa mãn $\#S > M+1$ và

$$\frac{(f, D_k)^{d/d_k}}{(f, D_l)^{d/d_l}} \equiv \frac{(g, D_k)^{d/d_k}}{(g, D_l)^{d/d_l}} \text{ với mọi } k \neq l \in S. \quad (4)$$

Định lý 4 cho chúng ta một kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình không suy biến đại số trên hình vành khuyên chia sẻ một số siêu mặt.

Định lý 5 (Định lý 3.5, Chương 3). *Cho f và g là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n+1+2nB(\mathcal{D})/\delta_{\mathcal{D}}$ các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.*

Định lý 6 (Định lý 3.6, Chương 3). *Cho f và g là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) =$*

$o(T_g(r))$. Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n + 1 + 2B(\mathcal{D})/\delta_{\mathcal{D}}$ siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho

$$(a) \ f(z) = g(z) \text{ với mọi } z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D}),$$

$$(b) \ \overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset \text{ và } \overline{E}_g(D_i) \cap \overline{E}_g(D_j) = \emptyset \text{ với mọi } i \neq j \in \{1, \dots, q\}.$$

Khi đó $f \equiv g$.

Các định lý 5, 6 là các điều kiện đại số để xác định duy nhất đối với đường cong chính hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát.

4. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản: trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu theo hướng nghiên cứu, chúng tôi phát hiện các vấn đề mở cần phải giải quyết và sử dụng các kiến thức, kỹ thuật của giải tích phức, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna-Cartan, đại số tuyến tính, hình học đại số để đề xuất những phương pháp phù hợp hoặc sử dụng một số kỹ thuật đã có nhằm giải quyết các vấn đề đặt ra.

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại :

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên hằng năm.
- Hội nghị Quốc tế về Đại số - Lý thuyết số - Hình học - Tô pô 2019, 04 - 08/12/2019 tại Trường CDSP Bà Rịa-Vũng Tàu.
- Hội nghị Quốc tế về Đại số - Lý thuyết số - Hình học - Tô pô 2021, 21 - 23 /10/ 2021 tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1

Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn cho đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet

1.1. Một số kiến thức cơ sở

Gọi $\mathcal{K}$ là một trường đóng đại số, có đặc số không, đầy đủ với chuẩn sinh bởi giá trị tuyệt đối không Acsimet (trường $\mathbb{C}_p$ là một ví dụ), $\mathbb{W}$ là $\mathbb{C}$ hoặc $\mathcal{K}$ và kí hiệu $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là không gian xạ ảnh n chiều trên $\mathbb{W}$.

Định nghĩa 1.2. Cho f là một đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{W}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$, khi đó tồn tại các hàm chỉnh hình $f_0, \dots, f_n$ trên $\mathbb{W}$, trong đó có ít nhất một hàm không đồng nhất bằng không sao cho

$$f(z) = (f_0(z) : \dots : f_n(z))$$

với mọi $z \notin \{f_0 = \dots = f_n = 0\}$. Ta gọi $(f_0, \dots, f_n)$ là một *biểu diễn* của đường cong f . Nếu các hàm $f_0, \dots, f_n$ không có không điểm chung trên $\mathbb{W}$ thì ta gọi $(f_0, \dots, f_n)$ là một *biểu diễn tối giản* của f .

Định nghĩa 1.3. Một đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ được gọi là *suy biến tuyến tính* nếu tồn tại một không gian con tuyến tính thực sự H của $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ sao cho $f(\mathbb{W}) \subset H$. Đường cong f được gọi là *suy biến đại số* nếu tồn tại một tập con đại số thực sự G của $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ sao cho $f(\mathbb{W}) \subset G$.

Cho X là một không gian con tuyến tính xạ ảnh k chiều ($1 \leq k \leq n$) của $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ và một số nguyên dương N . Cho $\{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geq N+1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$, trong đó H_j được định nghĩa bởi dạng tuyến tính L_j , $1 \leq j \leq q$.

Họ $\{H_1, \dots, H_q\}$ được gọi là ở vị trí N -dưới tổng quát đối với X nếu với mọi tập con $\{i_0, \dots, i_N\}$ của $\{1, \dots, q\}$ gồm $N + 1$ phần tử, ta có

$$\{x \in X : L_{i_j}(x) = 0, j = 0, \dots, N\} = \emptyset. \quad (1.1)$$

Khi $k = n$, họ các siêu phẳng $\{H_1, \dots, H_q\}$ được gọi là ở vị trí N -dưới tổng quát (đối với $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$). Khi $N = n = k$ thì họ $\{H_1, \dots, H_q\}$ được gọi là ở vị trí tổng quát.

1.2. Định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan

Cho $f_0, \dots, f_n$ là các hàm nguyên, độc lập tuyến tính không có không điểm chung trên $\mathbb{W}$. Kí hiệu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_n)$ là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các hàm $f_0, \dots, f_n$. Với z_0 là một điểm tùy ý trên $\mathbb{W}$, Năm 2014, Anderson và Hinkkanen đã chứng minh:

Bổ đề 1.4. Với mỗi $z_0 \in \mathbb{C}$, các bội không điểm có thể có tại z_0 của các hàm thuộc $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_n)$ tạo nên một dãy $d_0(z_0), d_1(z_0), \dots, d_n(z_0)$ thỏa mãn

$$0 = d_0(z_0) < d_1(z_0) < \dots < d_n(z_0).$$

Bổ đề 1.4 cho chúng ta một tính chất về các bội có thể có của các hàm thuộc $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \dots, f_n)$ trong trường hợp các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ tại một điểm tùy ý. Chú ý rằng, Bổ đề 1.4 cũng đúng cho trường hợp không Acsimet.

Định nghĩa 1.9. Các số $d_0(z_0), d_1(z_0), \dots, d_n(z_0)$ trong định nghĩa trên được gọi là dãy các bội đặc trưng của các hàm $f_0, \dots, f_n$ tại z_0 .

Bổ đề sau đây cho thấy mối quan hệ giữa Wronskian của các hàm chỉnh hình và dãy các bội đặc trưng của chúng:

Bổ đề 1.5. Cho $f_0, \dots, f_n$ là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$ không có không điểm chung và ít nhất một trong chúng khác hằng. Với mỗi $z_0 \in \mathbb{C}$, gọi $d_0(z_0), \dots, d_n(z_0)$ là dãy các bội đặc trưng của $f_0, \dots, f_n$ tại z_0 . Khi đó

- i) Nếu $W(z_0) \neq 0$ thì $d_0(z_0) = 0 < d_1(z_0) < \dots < d_n(z_0) = n$;
- ii) Nếu $W(z_0) = 0$ thì $d_0(z_0) = 0 < d_1(z_0) < \dots < d_n(z_0)$ phụ thuộc vào z_0 ,

hơn nữa, trong trường hợp này bậc không điểm của W tại z_0 bằng

$$\sum_{j=1}^n d_j(z_0) - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bổ đề 1.5 được chứng minh bởi Anderson và Hinkkanen vào năm 2014 cho trường hợp các hàm phân hình phức. Chú ý rằng nó vẫn đúng trong trường hợp các hàm chỉnh hình không Acsimet.

Bổ đề 1.6. Cho $f : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $f = (f_0 : \dots : f_n)$ là biểu diễn tối giản của f . Cho $N \geq n$ là một số nguyên. Giả sử $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$, $q \geq N + 1$ là một họ các siêu phẳng ở vị trí N - dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$. Khi đó

$$\sum_{j=1}^q \varepsilon(H_j, z_0) \leq (N - n + 1) \text{ord}_W(z_0).$$

Cho $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình không Acsimet và H là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$. Ta kí hiệu

$$\nu_f(r, H) = \sum_{|z| \leq r} \nu(H, z).$$

Định nghĩa 1.10. Hàm

$$\mathcal{N}_f(r, H) = \int_0^r \frac{\nu_f(t, H) - \nu_f(0, H)}{t} dt + \nu_f(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm rút gọn* của hàm f kết hợp với siêu phẳng H .

Dễ thấy

$$\nu_f(r, H) \leq n_f^n(r, H)$$

Nên ta có

$$\mathcal{N}_f(r, H) \leq N_f^n(r, H).$$

Cho $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ các siêu phẳng $H_1, \dots, H_q$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ và L_j là dạng tuyến tính định nghĩa H_j , $j = 1, 2, \dots, q$. Đặt

$$H = \frac{L_1(f)L_2(f) \dots L_q(f)}{W},$$

trong đó W là định thức Wronskian của $f_0, f_1, \dots, f_n$. Từ Bổ đề 1.6, với mỗi z_0 tùy ý ta luôn có

$$\sum_{j=1}^q \varepsilon(H_j, z_0) \leq \text{ord}_W(z_0).$$

Đặt

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}, z) = \text{ord}_W(z_0) - \sum_{j=1}^q \varepsilon(H_j, z) \geq 0.$$

Và kí hiệu

$$\mathcal{V}_f(r, \mathcal{H}) = \sum_{|z| \leq r} \mathcal{V}(\mathcal{H}, z).$$

Định nghĩa 1.11. Hàm

$$\mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) = \int_0^r \frac{\mathcal{V}_f(t, \mathcal{H}) - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H})}{t} dt - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H}) \log r$$

được gọi là *hàm đếm bội dư* tại các không điểm của hàm f kết hợp với họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$.

Định lý sau đây là một dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho đường cong chỉnh hình không Acsimet với hàm đếm rút gọn.

Định lý 1.7. Cho $f = (f_0 : \dots : f_n) : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geq n + 1$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$. Khi đó ta có:

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q \mathcal{N}_f(r, H_j) - \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - N(r, H) - \frac{n(n+1)}{2} \log r + O(1),$$

khi $r \rightarrow \infty$ ngoài một tập có độ đo hữu hạn tuyến tính.

Chú ý 1.2. Với mỗi đường cong chỉnh hình f và với mỗi siêu phẳng H . Từ định nghĩa ta dễ dàng nhận thấy

$$\mathcal{N}_f(r, H) \leq N_f^n(r, H).$$

Do đó bất đẳng thức trong Định lý 1.7 của chúng tôi mạnh hơn bất đẳng thức trong Định lý B của H. H. Khoai và M. V. Tu.

Chương 2

Một số dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình

2.1. Định lý kiểu Cartan-Nochka cho đường cong trên trường không Acsimet

Với mỗi một tập hữu hạn R , ta kí hiệu $|R|$ là số các phần tử của R . Năm 1983, E. I. Nochka đã chứng minh hai kết quả sau liên quan đến họ các siêu mặt ở vị trí N -dưới tổng quát.

Bổ đề 2.1. Cho $q > 2N - n + 1$ và $\{H_j\}_{j=1}^q$ là một họ các siêu phẳng ở vị trí N -dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Kí hiệu $Q = \{1, 2, \dots, q\}$. Khi đó tồn tại các số hữu tỷ dương $w(j)$ thỏa mãn các điều kiện:

i) $0 < w(j) \leq 1$ với mọi $j \in Q$;

ii) Đặt $w^* = \max_{j \in Q} w(j)$, ta có

$$\sum_{j=1}^q w(j) = w^*(q - 2N + n - 1) + n + 1;$$

iii) $\frac{n+1}{2N-n+1} \leq w^* \leq \frac{n}{N}$;

iv) Với mỗi $R \subset Q$ thỏa mãn $0 < |R| \leq N + 1$, ta có

$$\sum_{j \in R} w(j) \leq \text{rank}\{H_j\}_{j \in R};$$

Các số hữu tỷ không âm $w(j), j = 1, \dots, q$, trong Bổ đề 2.1 được gọi là *trọng Nochka* và w^* được gọi là *hằng số Nochka*.

Bổ đề 2.2. Cho $q > 2N - n + 1$ và $\{H_j\}_{j=1}^q$ là một họ các siêu phẳng ở vị trí

N -dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Gọi $w(j), j \in Q$, là các trọng Nochka trong Bổ đề 2.1. Kí hiệu $Q = \{1, 2, \dots, q\}$ và $E_j \geq 1, j \in Q$, là các số thực tùy ý. Khi đó, với mỗi $R \subset Q$ với $0 < |R| \leq N + 1$, tồn tại một tập con $R_0 \subset R$ thỏa mãn

$$|R_0| = \text{rank}\{H_j\}_{j \in R_0} = \text{rank}\{H_j\}_{j \in R},$$

và

$$\prod_{j \in R} E_j^{w(j)} \leq \prod_{j \in R_0} E_j.$$

Chú ý rằng các bổ đề 2.1 và 2.2 cũng đúng trong trường hợp họ các siêu mặt ở vị trí N -dưới tổng quát trong không gian $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$.

Cho H là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$, ta nhắc lại với mỗi $z_0 \in \mathcal{K}$, $\varepsilon(H, z_0)$ là bội dư của $H_j \circ f$ tại điểm z_0 , tức là $\varepsilon(H, z_0) = d_j(z_0) - j \geq 0$ khi $\text{ord}_{H_j \circ j}(z_0) = d_j(z_0)$. Ta có bổ đề sau về quan hệ giữa bội không điểm của Wronskian một đường cong chỉnh hình f và bội dư với trọng Nochka của f kết hợp với một họ các siêu phẳng.

Bổ đề 2.3. Cho $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ gồm $q > 2N - n + 1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí N -dưới tổng quát. Gọi $w(j), j = 1, \dots, q$, là các trọng Nochka trong Bổ đề 2.1. Khi đó với mỗi $z_0 \in \mathbb{K}$, ta có

$$\sum_{j=1}^q w(j) \varepsilon(H_j, z_0) \leq \text{ord}_{W_f}(z_0). \quad (2.1)$$

trong đó $\text{ord}_{W_f}(z_0)$ là bội không điểm của W_f tại z_0 .

Cho $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $(f_0, \dots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của f . Cho $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geq 2N - n + 1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí N -dưới tổng quát. Gọi $w(j), j = 1, \dots, q$, là các trọng Nochka của họ $\mathcal{H}$ trong Bổ đề 2.1. Với mỗi $z \in \mathcal{K}$, ta kí hiệu

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}, z) = \text{ord}_{W_f}(z) - \sum_{j=1}^q w(j) \varepsilon(H_j, z),$$

ở đây $W_f = W(f_0, \dots, f_n)$. Theo Bổ đề 2.3 ta dễ dàng thấy rằng $\mathcal{V}(\mathcal{H}, z) \geq 0$.

Với $r \geq 0$ ta đặt

$$\mathcal{V}_f(r, \mathcal{H}) = \sum_{|z| \leq r} \mathcal{V}(\mathcal{H}, z)$$

và gọi

$$\mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) = \int_0^r \frac{\mathcal{V}_f(t, \mathcal{H}) - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H})}{t} dt - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H}) \log r$$

hàm đếm bội dư với trọng Nochka của đường cong chỉnh hình f kết hợp với họ siêu phẳng $\mathcal{H}$.

Với mỗi $j = 1, \dots, q$, giả sử rằng

$$w(j) = a_j/b_j$$

trong đó a_j, b_j là các số nguyên không âm và $b_j \neq 0$. Kí hiệu $M = b_1 \dots b_q$. Và đặt

$$\Phi = \frac{L_1(f)^{Mw(1)} \dots L_q(f)^{Mw(q)}}{W_f^M}, \quad (2.5)$$

trong đó $W_f = W(f_0, \dots, f_n)$. Năm 2023 chúng tôi đã chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn cho đường cong chỉnh hình không Acsimet kết hợp với một họ các siêu phẳng ở vị trí N -dưới tổng quát trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ như sau:

Định lý 2.4. *Cho $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geq 2N - n + 1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí N -dưới tổng quát. Khi đó*

$$\begin{aligned} (q - 2N + n - 1)T_f(r) &\leq \sum_{j=1}^q \mathcal{N}_f(r, H_j) - \frac{N}{n} \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - \frac{N}{Mn} N(r, \Phi) \\ &\quad - \frac{(N+1)n}{2} \log r + O(1), \end{aligned}$$

khi $r \rightarrow \infty$ nằm ngoài một tập có độ đo tuyến tính hữu hạn.

Chú ý rằng, do $\mathcal{N}_f(r, H_j) \leq N_f^n(r, H_j)$ với mỗi $j = 1, 2, \dots, q$, nên Định lý 2.4 của chúng tôi là một cải tiến của định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan-Nochka (Định lý 1.3) cho đường cong chỉnh hình không Acsimet. Hơn nữa khi họ $\mathcal{H}$ ở vị trí tổng quát $N = n$ thì $w(j) = 1$ với $j = 1, \dots, q$, $M = 1$, $\Phi = H$ và hàm đếm bội dư với trọng Nochka $\mathcal{U}_f(r, \mathcal{H})$ trùng với hàm đếm bội dư. Trong trường hợp này Định lý 2.4 nhận lại Định lý 1.7.

2.2. Định lý cho đường cong trên hình vành khuyên

Cho $R_0 > 1$ là một số thực dương hoặc bằng $+\infty$, ta gọi

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0 \right\},$$

là một hình vành khuyên trên $\mathbb{C}$. Với mỗi số thực r thỏa mãn $1 < r < R_0$, ta kí hiệu

$$\begin{aligned} \Delta_{1,r} &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| \leq 1 \right\}, \quad \Delta_{2,r} = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r \right\}, \\ \Delta_r &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r \right\}. \end{aligned}$$

Cho D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc d và Q là đa thức thuần nhất trong $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ bậc d định nghĩa D , ta nhắc lại, nếu

$$Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \dots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$ và $i_{k0} + \dots + i_{kn} = d$ với $k = 0, \dots, n_d$, thì ta kí hiệu

$$(f, D) = Q(f) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k f_0^{i_{k0}} \dots f_n^{i_{kn}}.$$

Tiếp theo chúng tôi chứng minh một dạng định lý cơ bản cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên cho hàm đếm bội cắt cụt với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát, cần thiết cho việc chứng minh định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong Chương 3. Đầu tiên chúng tôi giới thiệu về Wronskian, giới thiệu và chứng minh một số kiến thức liên quan.

Cho $f_0, \dots, f_n$ là các hàm chỉnh hình, ta kí hiệu $W(f_0, \dots, f_n)$ là Wronskian của các hàm $f_0, \dots, f_n$, tức là

$$W(f_0, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_n \\ f'_0 & f'_1 & \dots & f'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n)} & f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Mệnh đề 2.10. Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $(f_0 : \dots : f_n)$ là một biểu diễn tối giản của f . Khi đó với mỗi

$1 < r < R_0$, ta có

$$\| m_0 \left(r, \frac{W(f_0, \dots, f_n)}{f_0 \dots f_n} \right) = O_f(r). \quad (2.27)$$

Ta nhắc lại rằng $D_1, \dots, D_q$, $q > n$, trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí tổng quát nếu với mọi cách chọn $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, q\}$, ta luôn có

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \text{supp}(D_{i_k}) = \emptyset.$$

Mệnh đề 2.11. Cho $D_1, \dots, D_q$ là q siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc giống nhau và bằng d ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Đặt $M = \binom{n+d}{n} - 1$. Khi đó tồn tại $(M-n)$ siêu mặt $T_1, \dots, T_{M-n}$ trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn với mỗi tập con $R \subset \{1, \dots, q\}$ với $\#R = \text{rank}\{D_j\}_{j \in R} = n+1$, thì $\text{rank}\{\{D_j\}_{j \in R} \cup \{T_j\}_{j=1}^{M-n}\} = M+1$.

Chú ý rằng, trong chứng minh của Mệnh đề 2.11 cho thấy các siêu mặt T_j , $j = 1, \dots, M-n$ có cùng bậc d .

Năm 2022, H.T. Phuong và L. Vilaisavanh đã chứng minh định lý sau gọi là định lý cơ bản thứ nhất cho đường cong chĩnh hình trên hình vành khuyên.

Mệnh đề 2.12. Cho D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d và $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chĩnh hình mà ảnh của nó không chứa trong D . Khi đó, với mỗi $1 < r < R_0$, ta có

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = dT_f(r) + O(1).$$

Bây giờ chúng tôi chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chĩnh hình trên hình vành khuyên kết hợp với các siêu mặt.

Định lý 2.13. Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chĩnh hình không suy biến đại số và D_j , $1 \leq j \leq q$, là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc d_j tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi d là bội chung nhỏ nhất của các d_j và đặt $M = \binom{n+d}{n} - 1$. Khi đó, với mỗi $1 < r < R_0$ và $q \geq M+1$, ta có

$$\| (q - M - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j) + O_f(r). \quad (2.32)$$

Chương 3

Định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên

3.1. Định lý duy nhất kiểu Chen-Yan

Trong phần này chúng tôi chứng minh một dạng định lý duy nhất kiểu Yan-Chen cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. Để chứng minh định lý duy nhất, chúng ta cần một số kết quả bổ trợ sau:

Mệnh đề 3.1. Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong đại số không suy biến tuyến tính và D_1, D_2 là các siêu mặt cùng bậc d . Khi đó,

$$T_0\left(r, \frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}\right) \leq dT_f(r) + O(1), \quad (3.1)$$

với mỗi r thỏa mãn $1 < r < R_0$.

Với $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, ta đặt

$$T(r) = T_f(r) + T_g(r).$$

Với mỗi siêu mặt $D_j \in \mathcal{D}$, trong đó $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ các siêu mặt và số nguyên dương δ , ta đặt

$$F_j(\delta) = \sum_{t=1}^{\delta-1} (\delta - t) \overline{N}_{f,t}(r, D_j); \quad G_j(\delta) = \sum_{t=1}^{\delta-1} (\delta - t) \overline{N}_{g,t}(r, D_j).$$

Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm q siêu mặt ở vị trí tổng quát. Ta kí hiệu bậc của siêu mặt D_j là d_j với mỗi $j = 1, \dots, q$ và gọi d là bội chung nhỏ nhất của các d_j . Kí hiệu $M = \binom{n+d}{d} - 1$. Định lý sau đây là một dạng định lý duy nhất

kiểu Yan - Chen cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên được chúng tôi công bố năm 2023.

Định lý 3.2. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm q siêu mặt ở vị trí tổng quát và $f, g : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số thỏa mãn $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Giả sử rằng

- a) $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ với mỗi $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$;
- b) $\overline{E}_f(D_j) \subset \overline{E}_g(D_j)$ với mỗi $j = 1, 2, \dots, q$ và $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D})$.

$$\text{c) } \liminf_{r \rightarrow R_0} \sum_{j=1}^q N_f^1(r, D_j) / \sum_{j=1}^q N_g^1(r, D_j) > \frac{M}{M+1}.$$

Nếu $q \geq 2M + 3$ thì tồn tại tập con $S \subset \{1, \dots, q\}$ thỏa mãn $\#S > M + 1$ và

$$\frac{(f, D_k)^{d/d_k}}{(f, D_l)^{d/d_l}} \equiv \frac{(g, D_k)^{d/d_k}}{(g, D_l)^{d/d_l}} \quad \text{với mọi } k \neq l \in S. \quad (3.6)$$

Để chứng minh Định lý 3.2, ta cần các mệnh đề sau

Mệnh đề 3.3. Với các điều kiện của Định lý 3.2 và giả thiết thêm $D_1, \dots, D_q$ có cùng bậc d . Khi đó với mọi số $\delta > 0$ và với mọi $k \neq l \in \{1, \dots, q\}$ thỏa mãn $\Phi = \frac{(f, D_k)}{(f, D_l)} - \frac{(g, D_k)}{(g, D_l)} \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} & \delta N_f^1(r, D_k) + \delta N_f^1(r, D_l) + \sum_j N_f^1(r, D_j) \\ & \leq dT(r) + F_k(\delta) + F_l(\delta) + G_k(\delta) + G_l(\delta) + O(1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

trong đó $1 < r < R_0$ và tổng $\sum_j$ được lấy trên tất cả $j \in \{1, \dots, q\} \setminus \{k, l\}$.

3.2. Định lý duy nhất kiểu Fujimoto

Để chứng minh kết quả chính, trước hết chúng tôi giới thiệu thêm một số kiến thức về hàm đếm và một dạng định lý cơ bản thứ hai sử dụng cho chứng minh các định lý. Cho f là một đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên Δ , D là một siêu mặt và Q là một đa thức thuần nhất định nghĩa D . Với mỗi số thực $r : 1 < r < R_0$, với các số nguyên dương k và α , ta định nghĩa

$$n_{1,f}^\alpha(r, D, \leq k) = \sum_{z \in \Delta_{1,r}, 0 < \text{ord}_{Q(f)}(z) \leq k} \min\{\text{ord}_{Q(f)}(z), \alpha\},$$

$$n_{2,f}^\alpha(r, D \leq k) = \sum_{z \in \Delta_{2,r}, 0 < \text{ord}_{Q(f)}(z) \leq k} \min\{\text{ord}_{Q(f)}(z), \alpha\}$$

và

$$N_{1,f}^\alpha(r, D, \leq k) = \int_{r^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}^\alpha(t, D, \leq k)}{t} dt,$$

$$N_{2,f}^\alpha(r, D, \leq k) = \int_1^r \frac{n_{2,f}^\alpha(t, D, \leq k)}{t} dt.$$

Ta đặt

$$N_{f, \leq k}^\alpha(r, D) = N_f^\alpha(r, D, \leq k) := N_{1,f}^\alpha(r, D, \leq k) + N_{2,f}^\alpha(r, D, \leq k).$$

Tương tự ta kí hiệu

$$n_{1,f}^\alpha(r, D, \geq k) = \sum_{z \in \Delta_{1,r}, \text{ord}_{Q(f)}(z) \geq k} \min\{\text{ord}_{Q(f)}(z), \alpha\},$$

$$n_{2,f}^\alpha(r, D \geq k) = \sum_{z \in \Delta_{2,r}, \text{ord}_{Q(f)}(z) \geq k} \min\{\text{ord}_{Q(f)}(z), \alpha\}.$$

Ta định nghĩa

$$N_{1,f}^\alpha(r, D, \geq k) = \int_{r^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}^\alpha(t, D, \geq k)}{t} dt,$$

$$N_{2,f}^\alpha(r, D, \geq k) = \int_1^r \frac{n_{2,f}^\alpha(t, D, \geq k)}{t} dt.$$

Đặt

$$N_{f, \geq k}^\alpha(r, D) = N_f^\alpha(r, D, \geq k) := N_{1,f}^\alpha(r, D, \geq k) + N_{2,f}^\alpha(r, D, \geq k).$$

Dễ dàng thấy rằng

$$N_f^\alpha(r, D) = N_f^\alpha(r, D, \leq k) + N_f^\alpha(r, D, \geq k+1)$$

đúng với mọi số α và k .

Mệnh đề sau là một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình được H.T. Phuong và L. Vilaisavanh chứng minh năm 2022, cần thiết cho việc chứng minh các dạng định lý duy nhất trong phần này.

Mệnh đề 3.4. Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, và $D_j, 1 \leq j \leq q$, là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc d_j ở vị trí tổng quát. Gọi d là bội chung nhỏ nhất của các số $d_1, d_2, \dots, d_q$. Với $0 < \varepsilon < 1$ và

$$\alpha \geq (d[(n+1)^2 2^n \varepsilon^{-1}] + 1)^n.$$

Khi đó với mỗi $1 < r < R$, ta có

$$\| (q - (n+1) - \varepsilon) T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q d_j^{-1} N_f^\alpha(r, D_j) + O_f(r).$$

Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm q siêu mặt ở vị trí tổng quát. Với mỗi $j = 1, \dots, q$, kí hiệu d_j là bậc của D_j và gọi d là bội chung nhỏ nhất của các d_j . Đặt $\delta_{\mathcal{D}} := \min\{d_1, \dots, d_q\}$ và $M = (d(n+1)^2 2^{n+1} + 1)^n$. Hai định lý sau là các dạng định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên kiểu Fujimoto.

Định lý 3.5. Cho f và g là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n + 1 + 2Mn/\delta_{\mathcal{D}}$ các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.

Định lý 3.6. Cho f và g là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n + 1 + 2M/\delta_{\mathcal{D}}$ siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho

$$(a) \quad f(z) = g(z) \text{ với mọi } z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D}),$$

$$(b) \quad \overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset \text{ và } \overline{E}_g(D_i) \cap \overline{E}_g(D_j) = \emptyset \text{ với mọi } i \neq j \in \{1, \dots, q\}.$$

Khi đó $f \equiv g$.

KẾT LUẬN

Trong luận án này chúng tôi đã nghiên cứu một số dạng Định lý cơ bản với hàm đếm rút gọn hay hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình trên hình trên trường $\mathbb{W}$ và vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Chứng minh hai dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet với hàm đếm rút gọn trong hai trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát (Định lý 1.7) và ở vị trí dưới tổng quát (Định lý 2.4).

2. Xây dựng một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên trường phức $\mathbb{C}$ trong trường hợp đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên không suy biến đại số với hàm đếm bội cắt cụt kết hợp với các siêu mặt ở vị trí tổng quát (Định lý 2.13).

3. Đưa ra ba định lý mới về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát (các định lý 3.2, 3.5, 3.6).

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo:

1. Nghiên cứu một số Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình với rút gọn trong các trường hợp khác nhau của mục tiêu.

2. Sử dụng các kết quả về các dạng Định lý cơ bản thứ hai với rút gọn để nghiên cứu vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH NGHIÊN CỨU ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

- [1] Phuong H. T., Hung B. T., Padaphet I. (2023), A version of Cartan-Nochka's theorem for non-Archimedean holomorphic curves with integrated reduced counting functions, *Submitted*.
- [2] Phuong H. T., Ninh, L. Q., Padaphet I., (2019), On the Nevanlinna-Cartan Second Main Theorem for non-Archimedean Holomorphic Curves, *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, Vol. 11, No. 4, pp. 299 - 306.
- [3] Phuong H. T., Padaphet I. (2023), A uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing hypersurface, *Accepted to Complex Variables and Elliptic Equations*, Doi: 10.1080/17476933.2023.2234830.
- [4] Phuong H. T., Padaphet I., Ninh, L. Q., (2022), Some uniqueness theorems for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces in general position, *East-West J. of Mathematics*, Vol. 23, No 2, pp. 100-111.