ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

– – – – – – – – – – –

**INTHAVICHIT PADAPHET**

# VỀ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI KIỂU CARTAN CHO HÀM ĐẾM RÚT GỌN VÀ VẤN ĐỀ DUY NHẤT

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

THÁI NGUYÊN 2023

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

– – – – – – – – – – –

**INTHAVICHIT PADAPHET**

# VỀ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI KIỂU CARTAN CHO HÀM ĐẾM RÚT GỌN VÀ VẤN ĐỀ DUY NHẤT

**Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH**
**Mã số: 9460102**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học**
**PGS.TS HÀ TRẦN PHƯƠNG**
**TS. NGUYỄN VĂN THÌN**

THÁI NGUYÊN 2023

# Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Hà Trần Phương và TS. Nguyễn Văn Thìn. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2023

Tác giả

**INTHAVICHIT Padaphet**

# Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Hà Trần Phương và TS. Nguyễn Văn Thìn. Tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám đốc Đại học Thái Nguyên, Ban Đào tạo Đại học Thái Nguyên, Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban chủ nghiệm khoa Toán và các phòng Ban chức năng Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô, bạn bè trong các Seminar tại Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Khoa Toán Trường Đại hoc Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã luôn giúp đỡ, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Trường Cao đẳng Sư phạm Luangprabang nước CHDCND Lào cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành luận án này.

Cuối cùng tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn những người thân trong gia đình, những người đã chịu nhiều khó khăn, vất vả dành hết tình cảm yêu thương, động viên, chia sẻ, khích lệ để tác giả hoàn thành được luận án.

*Thái Nguyên, tháng 11 năm 2023*

Tác giả

**INTHAVICHIT Padaphet**

# Mục lục

# Mở đầu

## 1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Trong những năm gần đây, Lý thuyết phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình, hay còn gọi là Lý thuyết Nevanlinna-Cartan đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước. Được xem như bắt đầu bởi các công trình của H. Cartan vào năm 1933 khi Ông xây dựng các dạng định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai cho đường cong chỉnh hình, Lý thuyết Nevanlinna-Cartan được đánh giá là một trong những thành tựu sâu sắc, đẹp đẽ và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của Toán học như vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình, tính suy biến của đường cong đại số, lý thuyết hệ động lực, phương trình vi phân phức và một số lĩnh khác.

Kí hiệu $\mathcal{K}$ trường đóng đại số, có đặc số không, đầy đủ với chuẩn sinh bởi giá trị tuyệt đối không Acsimet, $\mathbb{W}$ là $\mathbb{C}$ hoặc $\mathcal{K}$ và $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là không gian xạ ảnh $n$ chiều trên $\mathbb{W}$. Với đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có một biểu diễn tối giản là $(f_0, \ldots, f_n)$, hàm

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan* của đường cong $f$, trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \ldots, |f_n(z)|\}$.

Cho $H$ là một siêu phẳng, $L$ là một dạng tuyến tính xác định $H$ và $M$ là một số nguyên dương. Ta gọi $n_f(r, H)$ và $n_f^M(r, H)$ lần lượt là số không điểm của $L(f)(z)$ trong đĩa $\{|z| \leqslant r\}$, tương ứng kể cả bội hay bội cắt cụt bởi $M$. Hàm

$$N_f(r,H) = N_f(r,L) = \int_0^r \frac{n_f(t,H) - n_f(0,H)}{t} dt + n_f(0,H)\log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* và hàm

$$N_f^M(r,H) = N_f^M(r,L) = \int_0^r \frac{n_f^M(t,H) - n_f^M(0,H)}{t} dt + n_f^M(0,H)\log r$$

được gọi là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi $M$ của đường cong $f$ kết hợp với siêu phẳng $H$.

Năm 1933, H. Cartan đã chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên mặt phẳng phức như sau:

**Định lý A** ([6]). *Cho đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và $q$ siêu phẳng $H_1, \ldots, H_q$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó bất đẳng thức*

$$(q-n-1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^q N_f^n(r,H_j) + o(T_f(r))$$

*đúng với mọi $r > 0$ đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.*

Định lý A cho ta một quan hệ giữa hàm đặc trưng của đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính với các hàm đếm bội cắt cụt với mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Công trình này của H. Cartan được đánh giá hết sức quan trọng, mở ra một hướng nghiên cứu mới cho việc phát triển lý thuyết Nevanlinna - nghiên cứu các dạng định lý cơ bản thứ hai cho ánh xạ phân hình, chỉnh hình và các ứng dụng của nó. Các kết quả nghiên cứu theo hướng này trong thời gian gần đây tập trung vào hai vấn đề:

1. Xây dựng các dạng của Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{W}^p$ hoặc một miền trong $\mathbb{W}^p$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ hoặc một đa tạp đại số xạ ảnh trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ với mục tiêu là các siêu phẳng, siêu mặt cố định hoặc di động, bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan với các hàm xấp xỉ hoặc các dạng hàm đếm khác nhau.

2. Nghiên cứu các ứng dụng của các dạng của Định lý cơ bản thứ hai trong các lĩnh vực khác nhau của toán học, chẳng hạn, tính chất của số khuyết, vấn đề duy nhất cho hàm hay đường cong chỉnh hình, sự suy biến của các đường cong đại số và một số lĩnh vực khác.

Theo hướng nghiên cứu thứ nhất, tiếp nối công trình của H. Cartan, đã có nhiều tác giả xây dựng các dạng định lý cơ bản thứ hai bằng cách thiết lập các quan hệ bất đẳng thức giữa hàm đặc trưng của một đường cong chỉnh hình với các xấp xỉ và hàm đếm không kể bội hay hàm đếm bội cắt cụt. Cụ thể, năm 1983, E. I. Nochka ([33]) đã chứng minh một mở rộng của Định lý A cho trường hợp họ các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát trong không gian xạ ảnh phức $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Năm 1995, H. H. Khoai và M. V. Tu đã nghiên cứu Định lý A cho trường hợp đường cong chỉnh hình trên trường $\mathcal{K}$ và thu được kết quả:

**Định lý B** ([26]). *Cho $f : \mathcal{K} \to \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong không suy biến tuyến tính và $H_1, \ldots, H_q$ các siêu phẳng phân biệt $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó*

$$(q - n - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f^n(r, H_j) - \frac{n(n+1)}{2} \log r + O(1).$$

Trong [21], P. C. Hu và C. C. Yang đã mở rộng kết quả của H. H. Khoai và M. V. Tu cho trường hợp họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát. Trong những năm gần đây, có rất nhiều tác giả trong và ngoài nước đã nghiên cứu các dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{W}^m$ hay một miền trên $\mathbb{W}^m$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ hay một đa tạp đại số xạ ảnh trong $\mathbb{W}$, trong các trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt cố định hay di động, với các dạng hàm đếm khác nhau. Chẳng hạn M. Ru ([42], [43]), Q. M. Yan và Z. H. Chen ([51]), G. Dethloff, T. V. Tan, D. D. Thai ([12]), D. D. Thai, S. D. Quang ([48]), L. Shi ([45]), T. T. H. An và H. T. Phuong ([2]), H. T. Phuong và N. V. Thin ([39]), H. T. Phuong và

L. Vilaisavanh ([41]), P. C. Hu, N. V. Thin ([23]) và nhiều tác giả khác.

Năm 2014, dựa trên các nghiên cứu về bội không điểm của các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của một họ hữu hạn các hàm chỉnh hình trên mặt phẳng phức tại một điểm, J. M. Anderson và A. Hinkkanen ([4]) đã đưa ra một khái niệm mới về hàm đếm, được gọi là hàm đếm rút gọn và chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn này cho trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng cố định. Cụ thể như sau:

Cho $f : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là một đường cong chỉnh hình và $(f_0, \ldots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$. Kí hiệu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$ là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các hàm $f_0, \ldots, f_n$. Từ Bổ đề 1.4 ta thấy, với mỗi $z_0 \in \mathbb{W}$, các bội không điểm có thể có của các hàm thuộc $\mathcal{L}$ tại $z_0$ tạo nên một dãy thỏa mãn

$$0 = d_0(z_0) < d_1(z_0) < \cdots < d_n(z_0).$$

Với siêu phẳng $H$ xác định bởi dạng tuyến tính $L$, hiển nhiên $L(f) \in \mathcal{L}$ nên tồn tại $j \in \{0, \ldots, n\}$ sao cho bậc không điểm của $L(f)$ tại $z_0$ bằng $d_j(z_0)$, tức là $\mathrm{ord}_{L(f)}(z_0) = d_j(z_0)$. Ta kí hiệu $\nu(H, z_0) = j$ và gọi là *bội rút gọn* tại không điểm của $L(f)$ tại $z_0$, hay còn gọi là bội rút gọn của $f$ kết hợp với siêu phẳng $H$ tại $z_0$. Ta gọi $\varepsilon(H, z_0) = d_j - j$ là *bội dư* của $L(f)$ tại $z_0$ hay còn gọi là bội dư của $f$ kết hợp với siêu phẳng $H$ tại $z_0$.

**Định nghĩa 1** ([4]). Với mỗi $r > 0$, ta kí hiệu $\nu_f(r, H) = \sum\limits_{|z| \leqslant r} \nu(H, z)$. Và hàm

$$\mathcal{N}_f(r, H) = \int_0^r \frac{\nu_f(t, H) - \nu_f(0, H)}{t} dt + \nu_f(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm rút gọn* của hàm $f$ kết hợp với siêu phẳng $H$.

Từ định nghĩa ta thấy $\nu(H, z_0) \leqslant \min\{d_j, n\}$ nên $\nu_f(r, H) \leqslant n_f^n(r, H)$.

$$\mathcal{N}_f(r, H) \leqslant N_f^n(r, H). \tag{1}$$

Cho $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_q\}$ là một họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ và $L_j$ là dạng tuyến tính định nghĩa $H_j$, $j = 1, 2, \ldots, q$. Đặt

$$H = \frac{L_1(f)L_2(f)\ldots L_q(f)}{W},$$

trong đó $W$ là định thức Wronskian của $f_0, \ldots, f_n$. Từ Bổ đề 1.6, với mỗi $z_0$ tùy ý ta luôn có $\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z_0) \leqslant \mathrm{ord}_W(z_0)$. Đặt

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}, z) = \mathrm{ord}_W(z_0) - \sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z) \geqslant 0.$$

Và kí hiệu

$$\mathcal{V}_f(r, \mathcal{H}) = \sum_{|z| \leqslant r} \mathcal{V}(\mathcal{H}, z).$$

**Định nghĩa 2** ([4]). Hàm

$$\mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) = \int_0^r \frac{\mathcal{V}_f(t, \mathcal{H}) - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H})}{t} dt - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H}) \log r$$

được gọi là *hàm đếm bội dư* tại các không điểm của hàm $f$ kết hợp với họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$.

Năm 2014, J. M. Anderson và A. Hinkkanen đã chứng minh

**Định lý C** ([4]) *Cho $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geqslant n+1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó ta có*

$$\begin{aligned}(q-n-1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r, H_j) - \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - N(r, H)\\ + O(\log r) + O(\log T_f(f)),\end{aligned} \tag{2}$$

*khi $r \longrightarrow \infty$ nằm ngoài một tập có độ đo tuyến tính hữu hạn.*

Chú ý rằng, từ (1) ta thấy hàm đếm rút gọn $\mathcal{N}_f(r, H_j)$ trong Định lý C nhỏ hơn so với hàm đếm bội cắt cụt trong công trình của H. Cartan nên nó là một cải tiến kết quả của H. Cartan. Công trình này sẽ gợi ý cho chúng ta một vấn đề nghiên cứu mới trong lý thuyết Nevanlinna-Cartan: xem xét các dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn.

Theo hướng nghiên cứu thứ hai, trong luận án này chúng tôi tập trung vào nghiên cứu ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna-Cartan trong vấn đề duy nhất cho đường cong phân, chỉnh hình. Những kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về H. Fujimoto ([14]) khi ông mở rộng Định lý năm điểm của R. Nevanlinna cho ánh xạ phân hình. Sau đó, vấn đề này ngay lập tức thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả thu được nhiều kết quả quan trọng.

Cho $U$ là một miền trong $\mathbb{W}$, kí hiệu $\mathcal{F}$ là một họ các ánh xạ chỉnh hình khác hằng từ $U$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$. Họ các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là *tập xác định duy nhất không kể bội*, kí hiệu URSIM (hoặc *tập xác định duy nhất kể cả bội,* kí hiệu URSCM) cho họ ánh xạ $\mathcal{F}$ nếu với mỗi cặp ánh xạ $f, g \in \mathcal{F}$, điều kiện $\overline{E}_f(\mathcal{D}) = \overline{E}_g(\mathcal{D})$ (hoặc $E_f(\mathcal{D}) = E_g(\mathcal{D})$ tương ứng) kéo theo $f \equiv g$. Các tập URSIM, URSCM được gọi chung là *tập xác định duy nhất* cho họ ánh xạ $\mathcal{F}$.

Trong các công trình [14], [15], H. Fujimoto đã chứng minh sự tồn tại các tập xác định duy nhất kể cả bội gồm $3n + 2$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát cho họ các ánh xạ phân hình phức không suy biến tuyến tính và $2n + 3$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát cho họ các ánh xạ phân hình phức không suy biến đại số. Năm 1983, L. Smiley ([46]) đã chỉ ra sự tồn tại của các tập xác định duy nhất không kể bội gồm $3n+2$ siêu phẳng cho đường cong chỉnh hình phức và H. Fujimoto ([16]) đã nghiên cứu lại vấn đề này vào năm 1998. Năm 2006, G. Dethloff và T. V. Tan ([10]) xem xét vấn đề tương tự cho trường hợp siêu phẳng di động. Năm 2006, D. D. Thai và S. D. Quang ([47]) đã xem xét vấn đề duy nhất trong trường hợp mục tiêu là $3n + 1$ siêu phẳng. Năm 2008, M. Dulock và M. Ru ([13]) và năm 2009, H. T. Phuong ([35]) đã chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất trong trường hợp siêu mặt đối với đường cong chỉnh hình trên mặt phẳng phức. Năm 2009, Z. Chen, Q. Yan ([8]) và năm 2010, G. Dethloff,

T. V. Tan ([11]) chỉ ra các tập duy nhất cho các đường cong chỉnh hình gồm $2n + 3$ siêu phẳng.

Kí hiệu $R_0 > 1$ là một số thực dương hoặc $+\infty$ và

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$$

là một hình vành khuyên trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Năm 2013, H. T. Phuong và T. H. Minh ([38]) đã chứng minh một định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát và năm 2021, H. T. Phuong và L. Vilaisavanh ([41]) đã nghiên cứu vấn đề này trong trường hợp các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese. Thời gian gần đây, các tác giả đã tiếp tục phát triển các dạng định lý duy nhất cho các lớp đường cong khác nhau với mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt, cố định hay di động. Chú ý rằng, hầu hết các chứng minh của các kết quả về tập xác định duy nhất đều dựa vào các dạng Định lý cơ bản thứ hai.

Như vậy, việc tiếp tục phát triển các dạng Định lý cơ bản thứ hai bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng với các dạng hàm đếm và ứng dụng của các định lý này trong vấn đề duy nhất cho ánh xạ phân, chỉnh hình là thực sự cần thiết. Hiện nay, những vấn đề nghiên cứu này đang được phát triển mạnh mẽ, thu hút được sự quan tâm nhiều tác giả và có nhiều công trình được công bố. Sự lựa chọn đề tài **"Về định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho hàm đếm rút gọn và vấn đề duy nhất"** của tác giả luận án này cũng nhằm tiếp tục phát triển thêm một số dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn, hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình trên trường $\mathbb{W}$ và xây dựng một số điều kiện đủ cho vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

## 2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

- **Đối tượng nghiên cứu**

Trong luận án này chúng tôi tập trung nghiên cứu về tính chất của đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet hoặc trên trường các số phức $\mathbb{C}$ và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong mặt phẳng phức. Đây cũng là các đối tượng nghiên cứu cơ bản của lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna-Cartan.

- **Mục đích nghiên cứu :**

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu theo hai hướng như sau:

*Hướng nghiên cứu thứ nhất:* Xây dựng một số dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên một trường không Acsimet hoặc trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ với các mục tiêu là siêu phẳng ở vị trí tổng quát hay dưới tổng quát bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan với hàm đếm rút gọn.

*Hướng nghiên cứu thứ hai:* Thiết lập một số điều kiện đủ để hai đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên là trùng nhau trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát.

## 3. Tổng quan về luận án

Đối với hướng nghiên cứu thứ nhất, chúng tôi đã xây dựng được một số dạng Định lý cơ bản thứ hai như sau:

**Định lý 1 (Định lý 1.7, Chương 1).** *Cho $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geqslant n+1$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$. Khi đó ta có:*

$$\begin{aligned}(q-n-1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r, H_j) - \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - N(r, H) \\ - \frac{n(n+1)}{2}\log r + O(1),\end{aligned}$$

*khi $r \longrightarrow \infty$ ngoài một tập có độ đo hữu hạn tuyến tính.*

**Định lý 2 (Định lý 2.4, Chương 2).** *Cho $f : \mathcal{K} \to \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geqslant 2N - n + 1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí $N-$dưới tổng quát. Khi đó*

$$\begin{aligned}(q - 2N + n - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r, H_j) - \frac{N}{n}\mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - \frac{N}{Mn}N(r, \Phi) \\ - \frac{(N+1)n}{2}\log r + O(1),\end{aligned}$$

*khi $r \longrightarrow \infty$ nằm ngoài một tập có độ đo tuyến tính hữu hạn.*

Các định lý 1 và 2 là hai dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn cho đường cong chỉnh hình trường không Acsimet $\mathcal{K}$ trong hai trường hợp: họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát và ở vị trí dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$. Như đã nói trong lý do chọn đề tài, hàm đếm rút gọn của trong kết quả của chúng tôi nhỏ hơn so với hàm đếm bội cắt cụt trong các công trình H. H. Khoai, M. V. Tu ([26]) và P. C. Hu và C. C. Yang ([21]), nên các bất đẳng thức trong các kết quả của chúng tôi là tốt hơn so với các công trình trước đây. Định lý 1 được chúng tôi công bố trong Bài báo [2] và Định lý 2 được viết trong Bản thảo [1] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

Để chứng minh kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, chúng tôi đã chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt. Cụ thể, cho $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Ta kí hiệu

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu} \quad R = +\infty \\ O(\log \dfrac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{nếu} \quad R < +\infty. \end{cases}$$

**Định lý 3 (Định lý 2.13, Chương 2).** *Cho $f : \Delta \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và $D_j, 1 \leqslant j \leqslant q$, là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc $d_j$ tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi $d$ là bội chung nhỏ nhất của các $d_j$ và đặt $M = \binom{n+d}{n} - 1$. Khi đó, với mỗi $1 < r < R_0$*

*và* $q \geqslant M+1$*, ta có*

$$\| \quad (q-M-1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j) + O_f(r). \tag{3}$$

Định lý 3 là một dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, được chúng tôi chứng minh trong Bài báo [3] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án. Chú ý rằng, Bất đẳng thức (3) chưa phải thực sự tốt, nhưng bội cắt cụt của hàm đếm trong vế trái của (3) khá nhỏ, điều này mang lại hiệu quả cho việc xây dựng các kết quả về vấn đề duy nhất.

Cho $\mathcal{D} = \{D_j, j = 1, \ldots, q\}$ là một họ gồm $q$ siêu mặt bậc $d_j$ tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi $d$ là bội chung nhỏ nhất của các $d_j$, kí hiệu

$$\delta_{\mathcal{D}} := \min\{d_1, \ldots, d_q\}, \quad n_{\mathcal{D}} = \binom{n+d}{n} - 1$$

và

$$B(\mathcal{D}) = (d(n+1)^2 2^{n+1} + 1)^n.$$

Cho ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta kí hiệu

$$\overline{E}_f(D_j) = \{z \in \Delta \mid (D_j, f)(z) = 0 \text{ không kể bội}\}$$

và đặt

$$\overline{E}_f(\mathcal{D}) = \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} \overline{E}_f(D_j).$$

Các kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên chúng tôi thu được trong luận án này như sau:

**Định lý 4 (Định lý 3.2, Chương 3).** *Cho* $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ *là một họ gồm* $q$ *siêu mặt ở vị trí tổng quát và* $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số thỏa mãn* $O_f(r) = o(T_f(r))$ *và* $O_g(r) = o(T_g(r))$*. Giả sử rằng*

a) $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ *với mỗi* $i \neq j \in \{1, \ldots, q\}$*;*

b) $\overline{E}_f(D_j) \subset \overline{E}_g(D_j)$ *với mỗi* $j = 1, 2, \ldots, q$ *và* $f(z) = g(z)$ *với mọi* $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D})$.

c) $\liminf\limits_{r \longrightarrow R_0} \sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j) / \sum_{j=1}^{q} N_g^1(r, D_j) > \dfrac{M}{M+1}$.

*Nếu* $q \geqslant 2M + 3$ *thì tồn tại một tập con* $S \subset \{1, \ldots, q\}$ *thỏa mãn* $\#S > M + 1$ *và*

$$\frac{(f, D_k)^{d/d_k}}{(f, D_l)^{d/d_l}} \equiv \frac{(g, D_k)^{d/d_k}}{(g, D_l)^{d/d_l}} \quad \text{với mọi } k \neq l \in S. \tag{4}$$

Định lý 4 cho chúng ta một kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình không suy biến đại số trên hình vành khuyên chia sẻ một số siêu mặt. Chú ý rằng khi $D_j, j = 1, \ldots, q$, là các siêu phẳng thì $M = n$ và ta sẽ có $f = g$ từ Khẳng định (4), như vậy kết quả chúng tôi là một mở rộng kết quả của H. T. Phuong và T. H. Minh trong [38].

**Định lý 5 (Định lý 3.5, Chương 3).** *Cho* $f$ *và* $g$ *là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ* $\Delta$ *vào* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *thỏa mãn* $O_f(r) = o(T_f(r))$ *và* $O_g(r) = o(T_g(r))$. *Gọi* $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ *là một họ gồm* $q > n + 1 + 2nB(\mathcal{D})/\delta_{\mathcal{D}}$ *các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *thỏa mãn* $f(z) = g(z)$ *với mọi* $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. *Khi đó* $f \equiv g$.

**Định lý 6 (Định lý 3.6, Chương 3).** *Cho* $f$ *và* $g$ *là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ* $\Delta$ *vào* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *thỏa mãn* $O_f(r) = o(T_f(r))$ *và* $O_g(r) = o(T_g(r))$. *Gọi* $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ *là một họ gồm* $q > n + 1 + 2B(\mathcal{D})/\delta_{\mathcal{D}}$ *siêu mặt ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *sao cho*

(a) $f(z) = g(z)$ *với mọi* $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$,

(b) $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ *và* $\overline{E}_g(D_i) \cap \overline{E}_g(D_j) = \emptyset$ *với mọi* $i \neq j \in \{1, \ldots, q\}$.

*Khi đó* $f \equiv g$.

Các định lý 5, 6 là các điều kiện đại số để xác định duy nhất đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát. Định lý 4 được chúng tôi công bố trong Bài báo [3], hai định lý 5 và 6 được chúng tôi chứng minh trong Bài báo [4] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

## 4. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản: trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu theo hướng nghiên cứu, chúng tôi phát hiện các vấn đề mở cần phải giải quyết và sử dụng các kiến thức, kỹ thuật của giải tích phức, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna-Cartan, đại số tuyến tính, hình học đại số để đề xuất những phương pháp phù hợp hoặc sử dụng một số kỹ thuật đã có nhằm giải quyết các vấn đề đặt ra.

## 5. Cấu trúc luận án

Luận án gồm phần mở đầu, ba chương nội dung, kết luận luận án và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 có tên là *Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn cho đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet*. Trong chương này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản cần thiết cho luận án như: trường không Acsimet, lý thuyết Nevanlinna-Cartan cho đường cong chỉnh hình trên trường $\mathbb{W}$. Nội dung chính của chương này là giới thiệu một số kiến thức, kỹ thuật xây dựng hàm đếm rút gọn và chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn cho đường cong chỉnh hình trên một trường không Acsimet với mục tiêu là một họ hữu hạn siêu phẳng ở vị trí tổng quát.

Chương 2 với tên *Một số dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình*, chúng tôi tập trung vào chứng minh hai dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trong các trường hợp: đường cong chỉnh hình không Acsimet với hàm đếm rút gọn trong trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng cố định ở vị trí $N-$dưới tổng quát và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với hàm đếm bội cắt cụt và mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát.

Chương 3 dành cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu của chúng tôi về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình phức trên hình vành khuyên với tên gọi *Định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên*. Trong chương này, ngoài việc giới thiệu một số khái niệm cơ bản về vấn đề duy nhất, chúng tôi chứng minh ba kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại :

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên hằng năm.
- Hội nghị Quốc tế về Đại số - Lý thuyết số - Hình học - Tô pô 2019, 04 - 08/12/2019 tại Trường CĐSP Bà Rịa-Vũng Tàu.
- Hội nghị Quốc tế về Đại số - Lý thuyết số - Hình học - Tô pô 2021, 21 - 23 /10/ 2021 tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

# Chương 1

# Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn cho đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet

Trong chương này chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ sở trong lý thuyết Nevanlinna-Cartan cho đường cong chỉnh hình và chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet. Các kết quả chính trong chương này viết dựa trên Bài báo [2] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

## 1.1. Một số kiến thức cơ sở

### Trường không Acsimet

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở về trường không Acsimet, các kiến thức được tham khảo trong tài liệu [21]. Với một tập con $S$ của tập số thực $\mathbb{R}$, ta kí hiệu

$$S_+ = \{x \in S : x \geqslant 0\}; \quad S^+ = \{x \in S : x > 0\}.$$

Cho $F$ là một trường và hàm $|.| : F \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện

$i)$ $|a| = 0$ khi và chỉ khi $a = 0$;

$ii)$ $|a.b| = |a|.|b|$ với mọi $a, b \in F$;

$iii)$ $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ với mọi $a, b \in F$.

Nếu hàm $|.|$ thoả mãn thêm

$$iv) \quad |a+b| \leqslant \max\{|a|, |b|\} \text{ với mọi } a, b \in F$$

thì ta gọi hàm $|.|$ được gọi là *giá trị tuyệt đối không Acsimet*, ngược lại ta gọi hàm $|.|$ là *giá trị tuyệt đối Acsimet* trên trường $F$.

Ta biết, một hàm giá trị tuyệt đối trên $F$ là một chuẩn và sẽ cảm sinh một hàm khoảng cách $\rho$ xác định bởi:

$$\rho(a, b) = |a - b|$$

với mỗi cặp phần tử $a, b \in F$, từ đó cảm sinh ra tôpô trên $F$.

Ta dễ dàng chứng minh được hàm môdun trên trường $\mathbb{C}$ thỏa mãn các điều kiện về giá trị tuyệt đối Acsimet. Sau đây chúng tôi giới thiệu về trường các số phức $p-$adic như một ví dụ về trường không Acsimet.

Ta lấy số nguyên tố $p$ cố định. Khi đó mỗi số nguyên $m \neq 0$ luôn được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$m = p^v.m', \quad m' \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \text{ và } p \not| m',$$

trong đó $v$ là một số nguyên không âm và được xác định một cách duy nhất bởi $p, m$. Kí hiệu $v_p(m) = m$, khi đó chúng ta thu được hàm

$$v_p : \mathbb{Z}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap [0; +\infty).$$

Ta tiếp tục mở rộng $v_p$ lên trường các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ như sau: nếu $x \in \mathbb{Q}$, ta đặt

$$v_p(x) = \begin{cases} v_p(m) - v_p(n) & : x = \frac{m}{n} \neq 0 \\ +\infty & : x = 0. \end{cases}$$

Kí hiệu

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được hàm $|.|_p$ thỏa mãn các điều kiện về giá trị tuyệt đối không Acsimet trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

**Định nghĩa 1.1** ([21])**.** Hàm $|.|_p$ được gọi là *giá trị tuyệt đối p-adic* trên trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$.

Kí hiệu $\mathbb{Q}_p$ là bổ sung đủ của trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ theo tôpô cảm sinh bởi giá trị tuyệt đối $|.|_p$. Ta có thể chứng minh được $\mathbb{Q}_p$ là một trường và giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}_p$ được mở rộng từ giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}$ như sau: nếu $x \in \mathbb{Q}_p$ và $\{w_n\} \subset \mathbb{Q}$ là một dãy Cauchy hội tụ về $x$ thì

$$|x|_p = \lim_{n \longrightarrow \infty} |w_n|_p.$$

Ta dễ dàng chỉ ra: tồn tại một phép nhúng $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$; trường $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{Q}_p$ theo tôpô sinh bởi giá trị tuyệt đối $p-$adic và $\mathbb{Q}_p$ là đầy đủ nhưng không đóng đại số. Trường $\mathbb{Q}_p$ tồn tại một cách duy nhất, sai khác một phép đẳng cự, được gọi là *trường các số p-adic*. Kí hiệu $\overline{\mathbb{Q}}_p$ là bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$ và giá trị tuyệt đối trên $\overline{\mathbb{Q}}_p$ cũng kí hiệu là $|.|_p$, được mở rộng từ giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}_p$. Bổ sung đủ của $\overline{\mathbb{Q}}_p$ theo tôpô sinh bởi giá trị tuyệt đối $|.|_p$, kí hiệu là $\mathbb{C}_p$. Ta có thể chứng minh được $\mathbb{C}_p$ là một trường, tồn tại một cách duy nhất, sai khác một phép đẳng cự và gọi là *trường các số phức p-adic*. Ngoài ra, trường $\mathbb{C}_p$ có các tính chất: đóng đại số, có đặc số không, đầy đủ theo tôpô sinh bởi chuẩn $|.|_p$ và $\overline{\mathbb{Q}}_p$ trù mật trong $\mathbb{C}_p$.

### Một số kiến thức liên quan về lý thuyết Nevanlinna - Cartan

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna - Cartan cho đường cong chỉnh hình với mục tiêu với siêu phẳng cố định, liên quan đến các kết quả trong luận án.

Gọi $\mathcal{K}$ là một trường đóng đại số, có đặc số không, đầy đủ với chuẩn sinh bởi giá trị tuyệt đối không Acsimet (trường $\mathbb{C}_p$ là một ví dụ), $\mathbb{W}$ là $\mathbb{C}$ hoặc $\mathcal{K}$ và kí hiệu $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là không gian xạ ảnh $n$ chiều trên $\mathbb{W}$.

Cho hàm chỉnh hình $h : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W}$, điểm $z_0 \in \mathbb{W}$ được gọi là không điểm bội $k$ của $h$ nếu tồn tại một hàm chỉnh hình $g(z)$ không triệt tiêu trong một lân cận $V$ của $z_0$ sao cho trong lân cận $V$ đó hàm $h$ được biểu diễn dưới dạng

$$h(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

Nghĩa là $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(k-1)}(z_0) = 0$ và $h^{(k)}(z_0) \neq 0$. Với $z \in \mathbb{W}$, ta kí hiệu

$$\mathrm{ord}_f(z) = \begin{cases} k & \text{nếu } z \text{ là không điểm bội } k \text{ của } f, \\ 0 & \text{nếu } f(z) \neq 0. \end{cases}$$

Giả sử $f = \dfrac{g}{h}$ là một hàm phân hình, trong đó $g, h$ là hai hàm chỉnh hình, không có không điểm chung. Điểm $a \in \mathbb{W}$ gọi là không điểm bội $k$ của $f$ nếu $a$ là không điểm bội $k$ của $g$ và gọi là cực điểm bội $k$ của $f$ nếu $a$ là không điểm bội $k$ của $h$.

Tiếp theo ta nhắc lại một số khái niệm về đường cong chỉnh hình. Cho $U$ là một miền trong $\mathbb{W}$, một ánh xạ

$$f = (f_0 : \cdots : f_n) : U \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W}),$$

trong đó $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm chỉnh hình trên $U$ và ít nhất một trong chúng khác 0, được gọi là một *đường cong chỉnh hình*.

**Định nghĩa 1.2** ([44]). Cho $f$ là một đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{W}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$, khi đó tồn tại các hàm chỉnh hình $f_0, \ldots, f_n$ trên $\mathbb{W}$, trong đó có ít nhất một hàm không đồng nhất bằng không sao cho

$$f(z) = (f_0(z) : \cdots : f_n(z))$$

với mọi $z \notin \{f_0 = \cdots = f_n = 0\}$. Ta gọi $(f_0, \ldots, f_n)$ là một *biểu diễn* của đường cong $f$. Nếu các hàm $f_0, \ldots, f_n$ không có không điểm chung trên $\mathbb{W}$ thì ta gọi $(f_0, \ldots, f_n)$ là một *biểu diễn tối giản* của $f$.

**Định nghĩa 1.3** ([15]). Một đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ được gọi là *suy biến tuyến tính* nếu tồn tại một không gian con tuyến tính thực sự $H$ của $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ sao cho $f(\mathbb{W}) \subset H$. Đường cong $f$ được gọi là *suy biến đại số* nếu tồn tại một tập con đại số thực sự $G$ của $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ sao cho $f(\mathbb{W}) \subset G$.

Tiếp theo ta định nghĩa các hàm Nevanlinna-Cartan: hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan của một đường cong chỉnh hình trên trường $\mathbb{W}$. Trước hết ta định nghĩa cho trường hợp đường cong trên trường không Acsimet $\mathcal{K}$. Cho $g$ là một hàm chỉnh hình trên $\mathcal{K}$, giả sử $g$ được xác định bởi chuỗi lũy thừa

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n, \quad (m \geqslant 0, a_m \neq 0).$$

Với mỗi số thực $r \geqslant 0$, kí hiệu

$$\begin{aligned} |f|_r = \mu(r, f) = \sup_n |a_n| r^n &= \sup\{|f(z)| : z \in \mathcal{K} \text{ với } |z| \leqslant r\} \\ &= \sup\{|f(z)| : z \in \mathcal{K} \text{ với } |z| = r\}. \end{aligned}$$

Với đường cong chỉnh hình $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$, trong đó $(f_0, \ldots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$.

**Định nghĩa 1.4** ([21])**.** Hàm

$$T_f(r) = \log \|f\|_r,$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan* của đường cong $f$, trong đó $\|f\|_r = \max\{|f_0|_r, \ldots, |f_n|_r\}$. Hàm này sẽ sai khác một lượng là hằng số khi ta chọn một biểu diễn tối giản khác của $f$.

Cho $H$ là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ xác định bởi dạng tuyến tính thuần nhất $L = L(z_0, \ldots, z_n)$.

**Định nghĩa 1.5** ([21])**.** Hàm

$$m_f(r, H) = m_f(r, L) = \log \frac{\|f\|_r}{|L(f)|_r}$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của $f$ kết hợp với siêu phẳng $H$. Trong đó

$$L(f) = L(f_0, \ldots, f_n).$$

Hàm này cũng sai khác một lượng là hằng số khi ta chọn một biểu diễn tối giản khác của $f$.

Bây giờ ta định nghĩa hàm đặc trưng và hàm xấp xỉ trong trường hợp đường cong trên trường số phức. Cho $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $(f_0, \ldots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$.

**Định nghĩa 1.6** ([21]). Hàm

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta,$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan* của đường cong $f$, trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \ldots, |f_n(z)|\}$. Hàm này sẽ sai khác một lượng là hằng số khi ta chọn một biểu diễn tối giản khác của $f$.

Cho $H$ là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ xác định bởi dạng tuyến tính thuần nhất $L(z_0, \ldots, z_n)$.

**Định nghĩa 1.7** ([21]). Hàm

$$m_f(r, H) = m_f(r, L) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{\|f(re^{i\theta})\|}{|L(f)(re^{i\theta})|} d\theta$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của $f$ kết hợp với siêu phẳng $H$. Chú ý rằng hàm này cũng sai khác một lượng là hằng số khi ta chọn một biểu diễn tối giản khác của $f$.

Tiếp theo ta định nghĩa các hàm đếm của đường cong $f$ kết hợp với các siêu phẳng trong cả hai trường hợp phức và không Acsimet. Cho $f : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $(f_0, \ldots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$. Với siêu phẳng cố định $H$ trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$, xác định bởi dạng tuyến tính thuần nhất $L$, ta kí hiệu $n_f(r, H)$ là số không điểm của $L(f)$ trong đĩa $|z| \leqslant r$, kể cả bội, $n_f^M(r, H)$ là số các không điểm $L(f)$ trong đĩa $|z| \leqslant r$, bội cắt cụt bởi một số nguyên dương $M$. Nghĩa là

$$n_f(r, H) = \sum_{z \in \mathbb{W}, |z| \leqslant r} \mathrm{ord}_{L(f)}(z);$$

$$n_f^M(r, H) = \sum_{z \in \mathbb{W}, |z| \leqslant r} \min\{M, \mathrm{ord}_{L(f)}(z)\}.$$

**Định nghĩa 1.8.** Hàm

$$N_f(r,H) = N_f(r,L) := \int_0^r \frac{n_f(t,H) - n_f(0,H)}{t} dt + n_f(0,H)\log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* và hàm

$$N_f^M(r,H) = N_f^M(r,L) := \int_0^r \frac{n_f^M(t,H) - n_f^M(0,H)}{t} dt + n_f^M(0,H)\log r$$

được gọi là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi $M$ của đường cong $f$ kết hợp với siêu phẳng $H$. Số $M$ trong kí hiệu $N_f^M(r,H)$ được gọi là *chỉ số bội cắt cụt*. Trường hợp đặc biệt, nếu $M = 1$, ta viết $\overline{N}_f(r,H)$ thay cho $N_f^1(r,H)$ và gọi là *hàm đếm không kể bội*.

Định lý sau đây thường được gọi là định lý cơ bản thứ nhất, đúng trong cả hai trường hợp phức và không Acsimet.

**Định lý 1.1.** (Định lý cơ bản thứ nhất) *Cho $f : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là đường cong chỉnh hình và $L$ là một dạng tuyến tính trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$. Khi đó nếu $L(f)$ không đồng nhất bằng $0$ thì với mọi số thực dương $r$ ta có:*

$$m_f(r,L) + N_f(r,L) = T_f(r) + O(1),$$

*trong đó O(1) là một hằng số không phụ thuộc vào $r$.*

Cho $X$ là một không gian con tuyến tính xạ ảnh $k$ chiều $(1 \leqslant k \leqslant n)$ của $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ và một số nguyên dương $N$. Cho $\{H_1,\ldots,H_q\}$ là một họ gồm $q \geqslant N+1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$, trong đó $H_j$ được định nghĩa bởi dạng tuyến tính $L_j,\ 1 \leqslant j \leqslant q$. Họ $\{H_1,\ldots,H_q\}$ được gọi là *ở vị trí $N-$dưới tổng quát đối với $X$* nếu với mọi tập con $\{i_0,\ldots,i_N\}$ của $\{1,\ldots,q\}$ gồm $N+1$ phần tử, ta có

$$\{x \in X : L_{i_j}(x) = 0,\ j = 0,\ldots,N\} = \emptyset. \tag{1.1}$$

Khi $k = n$, họ các siêu phẳng $\{H_1,\ldots,H_q\}$ được gọi là *ở vị trí $N-$dưới tổng quát* (đối với $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$). Khi $N = n = k$ thì họ $\{H_1,\ldots,H_q\}$ được gọi là *ở vị trí tổng quát*.

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu một số dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình kết hợp với siêu phẳng cố định, liên quan đến các kết quả trong luận án. Như đã nói trong phần mở đầu, năm 1933, H. Cartan đã chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình phức trong trường hợp siêu phẳng. Năm 1983, Nochka đã mở rộng định lý của Cartan cho trường hợp các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát như sau.

**Định lý 1.2** ([33]). *Cho* $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và* $H_1, \ldots, H_q$ *là một họ gồm* $q > 2N - n + 1$ *siêu phẳng phân biệt* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *ở vị trí* $N-$*dưới tổng quát. Khi đó*

$$(q - 2N + n - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f^n(r, H_j) + S(r, f).$$

Đối với trường hợp đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet, năm 1995, H. H. Khoai và M. V. Tu đã chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình trong trường hợp siêu phẳng. Trong [21], P. C. Hu và C. C. Yang đã xem xét kết quả của H. H. Khoai và M. V. Tu cho trường hợp họ các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát và thu được kết quả.

**Định lý 1.3** ([21]). *Cho* $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \mathcal{K} \to \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ *là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và* $H_1, \ldots, H_q$ *là một họ gồm* $q > 2N - n + 1$ *siêu phẳng phân biệt* $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ *ở vị trí* $N-$*dưới tổng quát. Khi đó*

$$(q - 2N + n - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f^n(r, H_j) - \frac{n(N+1)}{2}\log r + O(1).$$

Về sau các định lý trên được nhiều tác giả trong và ngoài nước mở rộng cho trường hợp: mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt cố định hoặc di động ở các vị trí tổng quát hay dưới tổng quát. Nhiều tác giả cũng xem xét các dạng định lý cơ bản thứ hai cho trường hợp $f$ chỉnh hình trên một miền trong $\mathbb{W}$ hoặc $f$ là đường cong suy biến.

## 1.2. Định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan

### Bậc không điểm của Wronskian các hàm chỉnh hình

Cho $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm nguyên, độc lập tuyến tính không có không điểm chung trên $\mathbb{W}$. Kí hiệu $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$ là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các hàm $f_0, \ldots, f_n$. Với $z_0$ là một điểm tùy ý trên $\mathbb{W}$, năm 2014, Anderson và Hinkkanen đã chứng minh:

**Bổ đề 1.4** ([4]). *Với mỗi $z_0 \in \mathbb{C}$, các bội không điểm có thể có tại $z_0$ của các hàm thuộc $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$ tạo nên một dãy $d_0(z_0), d_1(z_0), \ldots, d_n(z_0)$ thỏa mãn*

$$0 = d_0(z_0) < d_1(z_0) < \cdots < d_n(z_0).$$

Bổ đề 1.4 cho chúng ta một tính chất về các bội có thể có của các hàm thuộc $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$ trong trường hợp các hàm chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ tại một điểm tùy ý. Chú ý rằng, Bổ đề 1.4 cũng đúng cho trường hợp không Acsimet.

**Định nghĩa 1.9** ([4]). Các số $d_0(z_0), d_1(z_0), \ldots, d_n(z_0)$ trong định nghĩa trên được gọi là *dãy các bội đặc trưng* của các hàm $f_0, \ldots, f_n$ tại $z_0$.

Tiếp theo ta nghiên cứu mối quan hệ giữa Wronskian của các hàm chỉnh hình và dãy các bội đặc trưng của chúng. Cho $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm nguyên không có không điểm chung trên $\mathbb{W}$ và ít nhất một trong chúng khác hằng, Wronskian của các hàm $f_0, \ldots, f_n$ định nghĩa bởi

$$W = W(f_0, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_0 & \ldots & f_n \\ f_0' & \ldots & f_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n)} & \ldots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Bổ đề sau đây cho thấy mối quan hệ giữa Wronskian của các hàm chỉnh hình và dãy các bội đặc trưng của chúng:

**Bổ đề 1.5** ([4]). *Cho $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm nguyên độc lập tuyến tính, không có không điểm chung trên $\mathbb{C}$. Với mỗi $z_0 \in \mathbb{C}$, gọi $d_0(z_0), \ldots, d_n(z_n)$ là dãy các bội đặc trưng của $f_0, \ldots, f_n$ tại $z_0$. Khi đó*

*i) Nếu $W(z_0) \neq 0$ thì $d_0(z_0) = 0 < d_1(z_0) < \cdots < d_n(z_0) = n$;*

*ii) Nếu $W(z_0) = 0$ thì $d_0(z_0) = 0 < d_1(z_0) < \cdots < d_n(z_0)$ phụ thuộc vào $z_0$, hơn nữa, trong trường hợp này bậc không điểm của $W$ tại $z_0$ bằng*

$$\sum_{j=1}^{n} d_j(z_0) - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bổ đề 1.5 được chứng minh bởi Anderson và Hinkkanen vào năm 2014 cho trường hợp các hàm phân hình phức. Chú ý rằng nó vẫn đúng trong trường hợp các hàm chỉnh hình không Acsimet.

Tiếp theo chúng ta sẽ xem xét một số kết quả về bội rút gọn và bội dư. Các khái niệm bội rút gọn và bội dư đã được định nghĩa trong phần mở đầu. Bổ đề sau là mối quan hệ giữa bội không điểm của Wronskian của $f_0, \ldots, f_n$ và tổng các bội dư của $f$ kết hợp với họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$ tại một điểm $z_0$.

**Bổ đề 1.6.** *Cho $f : \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{W})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $f = (f_0 : \cdots : f_n)$ là biểu diễn tối giản của $f$. Cho $N \geqslant n$ là một số nguyên. Giả sử $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_q\}$, $q \geqslant N+1$ là một họ các siêu phẳng ở vị trí $N-$ dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{W})$. Khi đó*

$$\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z_0) \leqslant (N-n+1)\mathrm{ord}_W(z_0).$$

*Chứng minh.* Gọi $L_j, 1 \leqslant j \leqslant q$, là các dạng tuyến tính định nghĩa $H_j$, $j = 1, \ldots, q$. Giả sử $z_0 \in \mathbb{W}$ tùy ý, ta xét hai trường hợp có thể xảy ra:

*Trường hợp 1.* Nếu $W(z_0) \neq 0$ thì $\mathrm{ord}_W(z_0) = 0$. Theo Bổ đề 1.5 ta có

$$d_j = j, \quad \forall j = 1, \ldots, q.$$

Do đó, với mỗi $H_j \in \mathcal{H}$ ta luôn có $\varepsilon(H_j, z) = 0$, điều này kéo theo

$$\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z) = 0 = \mathrm{ord}_W(z_0).$$

*Trường hợp 2.* Nếu $\mathrm{ord}_W(z_0) = m \geqslant 1$. Kí hiệu $\mathcal{L}$ là tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các hàm $f_0, \ldots, f_n$. Với mỗi $j = 0, 1, \ldots, n$, ta chọn một hàm $g_j \in \mathcal{L}$ sao cho $\mathrm{ord}_{g_j}(z_0) = d_j(z_0)$. Đặt

$$X_j = X_j(z_0) = \{h \in \mathcal{L} : \mathrm{ord}_h(z_0) \geqslant d_j(z_0)\} \cup \{0\},$$

với mỗi $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Khi đó $X_j$ là một không gian tuyến tính,

$$\dim X_j = n + 1 - j$$

và có một cơ sở là $g_j, \ldots, g_n$. Hơn nữa

$$X_n \subset X_{n-1} \subset \cdots \subset X_0$$

và $\cup_{j=0}^{n} X_j = X_0$. Với mỗi $l = 1, 2, \ldots, q$, kí hiệu $h_l = L_l(f) \in \mathcal{L}$ và $\mathcal{G} = \{h_1, \ldots, h_q\}$. Hiển nhiên

$$\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z_0) = \sum_{j=1}^{q} \varepsilon(h_j, z_0).$$

Nếu không có hàm nào thuộc họ $\mathcal{G}$ triệt tiêu tại $z_0$ thì $\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(h_j, z_0) = 0$, khẳng định của bổ đề hiển nhiên đúng. Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp có ít nhất một hàm thuộc họ $\mathcal{G}$ triệt tiêu tại $z_0$. Do họ $\mathcal{H}$ ở vị trí $N-$dưới tổng quát nên với mọi cách chọn $N+1$ hàm $h_{i_1}, \ldots, h_{i_{N+1}}$ thuộc họ $\mathcal{G}$,

$$\dim \mathrm{span}\{h_{i_1}, \ldots, h_{i_{N+1}}\} = n + 1,$$

trong đó $\mathrm{span}\{h_{i_1}, \ldots, h_{i_{N+1}}\}$ là không gian tuyến tính sinh bởi các hàm $\{h_{i_1}, \ldots, h_{i_{N+1}}\}$. Điều này kéo theo, với mỗi $j$, không có quá $N + 1 - j$

hàm của họ $\mathcal{G}$ thuộc $X_j$. Thật vậy, giả sử tồn tại họ $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}$ gồm $N+2-j$ hàm sao cho $\mathcal{G}_1 \subset X_j$ thì ta lấy thêm $j-1$ hàm tùy ý thuộc $\mathcal{G}$ khác với các hàm thuộc $\mathcal{G}_1$, khi đó kết hợp các hàm thuộc $\mathcal{G}_1$ ta được một họ gồm $N+1$ hàm tạo nên một không gian có số chiều không vượt quá $(n+1-j)+(j-1)=n$, mâu thuẫn với điều kiện ở vị trí $N-$ dưới tổng quát của họ $\mathcal{H}$.

Dễ thấy $\cup_{j=1}^{n} X_j = X_1$ và $X_1$ chứa không quá $N$ hàm của họ $\mathcal{G}$, tức là không có quá $N$ hàm thuộc họ $\mathcal{G}$ triệt tiêu $z_0$, các hàm này có thể có bội dư tại $z_0$. Không mất tính tổng quát, ta có thể sắp xếp lại trật tự các hàm nếu cần, ta kí hiệu các hàm $\{h_1, \ldots, h_{t_j}\} \subset X_j$ với mỗi $j=1,\ldots,n$. Đặt $t_{n+1}=0$, khi đó

$$0 = t_{n+1} \leqslant t_n \leqslant \cdots \leqslant t_1 \leqslant N,$$

$$t_j \leqslant N+1-j \text{ với } j = 1, \ldots, n$$

và trong họ $\mathcal{G}$ có $t_j - t_{j+1}$ hàm thuộc $X_j \backslash X_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, $t_n - t_{n+1} = t_n$ hàm thuộc $X_n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(h_j, z_0) &= \sum_{j=1}^{n} (t_j - t_{j+1})(d_j - j) = \sum_{j=1}^{n} t_j (d_j - d_{j-1} - 1) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} (N+1-j)(d_j - d_{j-1} - 1) \\
&= (N+1) \sum_{j=1}^{n} (d_j - d_{j-1}) - n(N+1) - \sum_{j=1}^{n} j(d_j - d_{j-1}) \\
&\quad + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= (N+1)d_n - \sum_{j=1}^{n} j(d_j - d_{j-1}) - n(N+1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= (N+1)d_n - nd_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_j + d_0 - n(N+1) + \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(h_j, z_0) \leqslant \sum_{j=1}^{n} d_j - \frac{n(n+1)}{2} + (N-n)(d_n - n).$$

Chú ý rằng $d_j \geqslant j$ với mọi $j = 1, \ldots, q$, kết hợp với Bổ đề 1.5, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(h_j, z_0) &\leqslant \mathrm{ord}_W(z_0) + (N-n)\Big(\mathrm{ord}_W(z_0) + \frac{n(n+1)}{2} - \sum_{j=1}^{n-1} j - n\Big) \\ &= (N-n+1)\mathrm{ord}_W(z_0).\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

**Chú ý 1.1.** Khi họ $\mathcal{H}$ ở vị trí tổng quát, tức là $N = n$, Bổ đề 1.6 sẽ cho

($i$) Nếu $\mathrm{ord}_W(z_0) = 0$, ta luôn có:

$$\sum_{j=0}^{n} \varepsilon(H_j, z_0) = 0.$$

Điều này kéo theo $\varepsilon(H_j, z_0) = 0$ với mọi $j = 1, \ldots, q$. Ngoài ra, trong trường hợp này $d_j = j$ với mọi $j = 0, \ldots, n$.

($ii$) Nếu $\mathrm{ord}_W(z_0) \geqslant 1$ thì

$$\sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z_0) \leqslant \mathrm{ord_W(z_0)},$$

trùng với kết quả đã được Anderson và Hinkkanen công bố trong [4] cho trường hợp phức.

## Định lý cơ bản thứ hai cho hàm đếm rút gọn

Trong phần này chúng tôi sẽ chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính trên trường không Acsimet trong trường hợp hàm đếm rút gọn với mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát.

Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình không Acsimet và $H$ là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$. Ta kí hiệu

$$\nu_f(r, H) = \sum_{|z| \leqslant r} \nu(H, z).$$

**Định nghĩa 1.10** ([4]). Hàm

$$\mathcal{N}_f(r,H)=\int_0^r \frac{\nu_f(t,H)-\nu_f(0,H)}{t}dt+\nu_f(0,H)\log r$$

được gọi là *hàm đếm rút gọn* của hàm $f$ kết hợp với siêu phẳng $H$.

Dễ thấy

$$\nu_f(r,H)\leqslant n_f^n(r,H)$$

Nên ta có

$$\mathcal{N}_f(r,H)\leqslant N_f^n(r,H).$$

Cho $\mathcal{H}=\{H_1,\dots,H_q\}$ là một họ các siêu phẳng $H_1,\dots,H_q$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ và $L_j$ là dạng tuyến tính định nghĩa $H_j$, $j=1,2,\dots,q$. Đặt

$$H=\frac{L_1(f)L_2(f)\dots L_q(f)}{W},$$

trong đó $W$ là định thức Wronskian của $f_0,f_1,\dots,f_n$. Từ Bổ đề 1.6, với mỗi $z_0$ tùy ý ta luôn có

$$\sum_{j=1}^q \varepsilon(H_j,z_0)\leqslant \mathrm{ord}_W(z_0).$$

Đặt

$$\mathcal{V}(\mathcal{H},z)=\mathrm{ord}_W(z_0)-\sum_{j=1}^q \varepsilon(H_j,z)\geqslant 0.$$

Và kí hiệu

$$\mathcal{V}_f(r,\mathcal{H})=\sum_{|z|\leqslant r}\mathcal{V}(\mathcal{H},z).$$

**Định nghĩa 1.11** ([4]). Hàm

$$\mathcal{U}_f(r,\mathcal{H})=\int_0^r \frac{\mathcal{V}_f(t,\mathcal{H})-\mathcal{V}_f(0,\mathcal{H})}{t}dt-\mathcal{V}_f(0,\mathcal{H})\log r$$

được gọi là *hàm đếm bội dư* tại các không điểm của hàm $f$ kết hợp với họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$.

Định lý sau đây là một dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho đường cong chỉnh hình không Acsimet với hàm đếm rút gọn.

**Định lý 1.7.** *Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_q\}$ là một họ gồm $q \geqslant n+1$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$. Khi đó ta có:*

$$(q-n-1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r, H_j) - \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - N(r, H) - \frac{n(n+1)}{2}\log r + O(1),$$

*khi $r \longrightarrow \infty$ ngoài một tập có độ đo hữu hạn tuyến tính.*

*Chứng minh.* Kí hiệu $L_j$ là một dạng tuyến tính định nghĩa siêu phẳng $H_j$ với mỗi $j = 1, \ldots, q$. Để chứng minh Định lý 1.7 ta cần bổ đề sau đây:

**Bổ đề 1.8.** *Với giả thiết của Định lý 1.7, với mọi $r > 0$, tồn tại một hoán vị $m_1, \ldots, m_q$ của các số nguyên $1, \ldots, q$ thỏa mãn:*

$$|L_{m_1}(f)|_r \geqslant |L_{m_2}(f)|_r \geqslant \cdots \geqslant |L_{m_q}(f)|_r. \tag{1.2}$$

*Và tồn tại một hằng số $A$ chỉ phụ thuộc vào các hệ số của các dạng tuyến tính $L_j$ thỏa mãn:*

$$|f_j|_r \leqslant A|L_{m_t}(f)|_r \tag{1.3}$$

*với mọi $0 \leqslant j \leqslant n$ và $1 \leqslant t \leqslant q-n$.*

*Chứng minh.* Với $r > 0, |L_j(f)|_r, j = 1, \ldots, q$ là các hằng số dương, do đó ta có thể chọn được một phép hoán vị $P = \{m_1, \ldots, m_q\}$ của tập $\{1, \ldots, q\}$ thỏa mãn (1.2).

Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại của $A$. Do nên $L_j(f)$ là một dạng tuyến tính của $f_j$ nên

$$L_j(f) = \sum_{k=0}^{n} a_{kj} f_k \tag{1.4}$$

với mọi $j = 1, 2, \ldots, q$, trong đó $a_{kj} \in \mathcal{K}, j = 1, 2, \ldots, q, k = 0, \ldots, n$. Gọi $m_1, \ldots, m_q$ thỏa mãn (1.2) và $t : 1 \leqslant t \leqslant q-n$ tùy ý, gọi

$$\{h_0, h_1, \ldots, h_n\} = \{L_{m_t}(f), L_{m_{q-n+1}}(f), L_{m_{q-n+2}}(f), \ldots, L_{m_q}(f)\}$$

khi đó $h_0, h_1, \ldots, h_n$ là độc lập tuyến tính vì họ $\mathcal{H}$ ở vị trí tổng quát. Từ (1.2) ta có :

$$|h_j|_r \leqslant |L_{m_t}(f)|_r, \quad \forall j = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Từ (1.4) ta có :

$$h_j = \sum_{k=0}^{n} b_{kj} f_k, \tag{1.6}$$

trong đó $b_{kj}$ là các hằng số được tạo ra từ $a_{kj}$. Do $h_j$ là độc lập tuyến tính nên từ (1.6) ta có :

$$f_k = \sum_{j=0}^{n} c_{j_k} h_j \tag{1.7}$$

với $k = 0, 1, \ldots, n$, trong đó $c_{j_k}$ là phụ thuộc vào $b_{k_j}$. Do đó $c_{j_k}$ phụ thuộc vào $a_{k_j}$. Đặt

$$A_t = \max_{j=0,1,\ldots,n} |c_{j_k}|_r \text{ và } A_P = \max_{t=1,\ldots,q-n} A_t.$$

Khi đó từ (1.7) ta có

$$\begin{aligned} |f_k|_r = |\sum_{j=0}^{n} c_{j_k} h_j|_r &\leqslant \max_{j=0,1,\ldots,n} |c_{j_k}|_r |h_j|_r \\ &\leqslant A_t \max_{j=0,1,\ldots,n} |h_j|_r \leqslant A_P \max_{j=0,1,\ldots,n} |h_j|_r \end{aligned} \tag{1.8}$$

với mọi $k = 0, \ldots, n$. Từ (1.5) và (1.8) ta có :

$$|f_k|_r \leqslant A_P |L_{m_t}(f)|_r$$

với mọi $k = 0, \ldots, n$ và $1 \leqslant t \leqslant q - n$.

Chú ý rằng, với mỗi phép hoán vị $A$ ta tìm được $A_P$. Ta có thể lựa chọn $A = \max_P A_P$, trong đó maximum là lấy trên tất cả các hoán vị $P$ của tập các số nguyên $\{1, 2, \ldots, q\}$. Như vậy hằng số $A$ thỏa mãn (1.3). Bổ đề được chứng minh. □

Ta tiếp tục chứng minh Định lý 1.7. Kí hiệu $W = W(f_0, \ldots, f_n)$. Dễ nhận thấy tử số và mẫu số của hàm

$$H = \frac{L_1(f) L_2(f) \ldots L_q(f)}{W},$$

là các hàm chỉnh hình trên $\mathcal{K}$. Do đó nếu $z_0 \in \mathcal{K}$ là một không điểm của $H$ thì tồn tại $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ sao cho $L_j(f)(z_0) = 0$. Hơn nữa, dễ dàng thấy rằng

$$\mathrm{ord}_H(z_0) = \sum_{j=1}^{q} \mathrm{ord}_{L_j(f)}(z_0) - \mathrm{ord}_W(z_0).$$

Với mỗi $z_0 \in \mathcal{K}$ tùy ý, ta sẽ chứng minh

$$\mathrm{ord}_H(z_0) = \sum_{j=1}^{q} \nu(H_j, z_0) - \mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0). \tag{1.9}$$

Thật vậy, ta xem xét hai trường hợp có thể xảy ra

*Trường hợp 1.* Nếu $W(z_0) \neq 0$ thì $\mathrm{ord}_W(z_0) = 0$ và từ Bổ đề 1.5 ta có

$$d_j = j, \quad \forall j = 1, \ldots, q,$$

điều này kéo theo

$$\varepsilon(H_j, z_0) = 0$$

với mọi $j = 0, 1, \ldots, q$. Dễ thấy trong trường hợp này hàm $L_j(f)$ không có bội dư tại $z_0$, tức là

$$j = \nu(H_j, z_0) = \mathrm{ord}_{L_j(f)}(z_0) = d_j.$$

Và $\mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0) = \mathrm{ord}_W(z_0) - \sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z) = 0$. Kéo theo

$$\mathrm{ord}_H(z_0) = \sum_{j=1}^{q} \mathrm{ord}_{L_j(f)}(z_0) = \sum_{j=1}^{q} \nu(H_j, z_0).$$

Suy ra (1.9) là đúng trong trường hợp này. Vì

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0) = m - \sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z_0) = 0.$$

*Trường hợp 2.* Nếu $W(z_0) = 0$ thì $\mathrm{ord}_W(z_0) > 0$. Từ định nghĩa ta có :

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_W(z_0) &= \sum_{j=1}^{q} \varepsilon(H_j, z_0) + \mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0)\\ &= \sum_{j=1}^{q} (\mathrm{ord}_{L_j(f)}(z_0) - \nu(H_j, z_0)) + \mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\mathrm{ord}_H(z_0) = \sum_{j=1}^{q} \mathrm{ord}_{L_j(f)}(z_0) - \mathrm{ord}_W(z_0) = \sum_{j=1}^{q} \nu(H_j, z_0) - \mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0).$$

Như vậy (1.9) đúng trong Trường hợp 2. Do đó (1.9) đúng trong các trường hợp có thể xảy ra.

Với mỗi $r > 0$, từ (1.9) ta có

$$n\left(r, \frac{1}{H}\right) = \sum_{j=1}^{q} \nu_f(r, H_j) - \mathcal{V}_f(r, \mathcal{H}),$$

kéo theo

$$N\left(r, \frac{1}{H}\right) = \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r, H_j) - \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}). \tag{1.10}$$

Từ Bổ đề 1.8, tồn tại một hoán vị $m_1, \ldots, m_q$ của các số nguyên $1, \ldots, q$ và một hằng số $A > 0$ sao cho :

$$|L_{m_1}(f)|_r \geqslant |L_{m_2}(f)|_r \geqslant \cdots \geqslant |L_{m_q}(f)|_r$$

và

$$|f_j|_r \leqslant A|L_{m_t}(f)|_r$$

với mọi $j = 0, \ldots, n$ và $1 \leqslant t \leqslant q - n$. Suy ra

$$\|f\|_r = \max_{j=0,\ldots,n} \{|f_j|_r\} \leqslant A|L_{m_t}(f)|_r$$

với mọi $1 \leqslant t \leqslant q - n$. Kéo theo

$$T_f(r) = \log \|f\|_r \leqslant \log |L_{m_t}(f)|_r + O(1)$$

với mọi $1 \leqslant t \leqslant q - n$. Lấy tổng hai vế bất đẳng thức trên với $t$ từ 1 đến $q - n - 1$, ta có

$$\begin{aligned}(q-n-1)T_f(r) &\leqslant \sum_{t=1}^{q-n-1} \log |L_{m_t}(f)|_r + O(1)\\ &= \log |L_{m_1}(f)|_r \ldots |L_{m_{q-n-1}}(f)|_r + O(1)\\ &\leqslant \max_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{q-n-1}\leqslant q} \log |L_{k_1}(f)|_r \ldots |L_{k_{q-n-1}}(f)|_r\\ &\quad + O(1). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Bây giờ ta đặt

$$v(r) = \max_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_{q-n-1} \leqslant q} \log |L_{k_1}(f)|_r \ldots |L_{k_{q-n-1}}(f)|_r.$$

Gọi $\{a_1, a_2, \ldots, a_{q-n-1}\} \subset \{1, 2, \ldots, q\}$ trong đó

$$1 \leqslant a_1 < \cdots < a_{q-n-1} \leqslant q$$

và

$$\{b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}\} = \{1, 2, \ldots, q\} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{q-n-1}\},$$

từ tính chất Wronskian ta có:

$$CW(L_{b_1}(f), L_{b_2}(f), \ldots, L_{b_{n+1}}(f)) = W(f_0, \ldots, f_n),$$

trong đó $C = C(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \neq 0$ là một hằng số. Kéo theo

$$\begin{aligned} H &= \frac{L_1(f)L_2(f)\ldots L_q(f)}{W} \\ &= \frac{L_1(f)L_2(f)\ldots L_q(f)}{CW(L_{b_1}(f), L_{b_2}(f), \ldots, L_{b_{n+1}}(f))} \\ &= \frac{L_{a_1}(f)L_{a_2}(f)\ldots L_{a_{q-n-1}}(f)}{CG}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

trong đó

$$G = \frac{W(L_{b_1})(f), \ldots, L_{b_{n+1}}(f)}{L_{b_1}(f), \ldots, L_{b_{n+1}}(f)} = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \dfrac{(L_{b_1}(f))'}{L_{b_1}(f)} & \ldots & \dfrac{(L_{b_{n+1}}(f))'}{L_{b_{n+1}}(f)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{(L_{b_1}(f))^{(n)}}{L_{b_1}(f)} & \ldots & \dfrac{(L_{b_{n+1}}(f))^{(n)}}{L_{b_{n+1}}(f)} \end{vmatrix}.$$

Đặt

$$w(r) = \max\{\log |CG|_r : 1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_{n+1} \leqslant q\},$$

từ (1.12) ta có

$$v(r) \leqslant \log |H|_r + w(r) + O(1).$$

Do đó từ (1.11)

$$(q-n-1)T_f(r) \leqslant \log |H|_r + w(r) + O(1). \tag{1.13}$$

Áp dụng công thức Jensen, ta có:

$$\log|H|_r = \log\mu(r,H) = N\left(r,\frac{1}{H}\right) - N(r,H) + O(1). \tag{1.14}$$

Kết hợp (1.10), (1.13) và (1.14) ta có :

$$\begin{aligned}(q-n-1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q}\mathcal{N}_f(r,H_j) - \mathcal{U}_f(r,\mathcal{H}) - N(r,H)\\ + w(r) + O(1).\end{aligned} \tag{1.15}$$

Bây giờ ta ước lượng $w(r)$. Với mỗi bộ $1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_{n+1} \leqslant q$, ta có

$$G = \sum_{\sigma}\operatorname{sign}(\sigma)\prod_{j=1}^{n}\frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)},$$

trong đó tổng lấy trên tất cả các hoán vị của tập con $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ của tập các số tự nhiên $\{b_1,b_2,\ldots,b_{n+1}\}$. Do đó

$$\log|G|_r \leqslant \max\log\prod_{j=1}^{n}\left|\frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)}\right|_r = \max\sum_{j=1}^{n}\log\left|\frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)}\right|_r.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)}\right|_r &= \log\mu\left(r,\frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)}\right)\\ &\leqslant \log\frac{1}{r^j} = -j\log r.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\log|G|_r \leqslant -\frac{n(n+1)}{2}\log r.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}w(r) &\leqslant \sum_{j=1}^{n} -j\log r + O(1)\\ &= -\frac{n(n+1)}{2}\log r + O(1).\end{aligned}$$

Kết hợp (1.15) ta có

$$(q-n-1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r, H_j) - \mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - \frac{n(n+1)}{2}\log r + O(1).$$

Định lý được chứng minh. $\square$

**Chú ý 1.2.** Với mỗi đường cong chỉnh hình $f$ và với mỗi siêu phẳng $H$. Từ định nghĩa ta dễ dàng nhận thấy

$$\mathcal{N}_f(r, H) \leqslant N_f^n(r, H).$$

Do đó bất đẳng thức trong Định lý 1.7 của chúng tôi mạnh hơn bất đẳng thức trong Định lý B của H. H. Khoai và M. V. Tu.

# Kết luận Chương 1

Trong chương này tôi đã thực hiện một số nội dung nghiên cứu sau:

1. Giới thiệu một số kiến thức cơ bản sử dụng trong luận án: trường các số $p-$adic, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna-Cartan cho đường cong chỉnh hình trên trường phức hoặc không Acsimet và một số khái niệm liên quan đến hàm đếm rút gọn.

2. Chứng minh một số kết quả bổ trợ về quan hệ giữa bậc không điểm của Wronskian của các hàm chỉnh hình với bậc không điểm có thể có của các hàm thuộc các tập các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của các hàm đó.

3. Chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan cho đường cong chỉnh hình không Acsimet với hàm đếm rút gọn kết hợp với siêu phẳng ở vị trí tổng quát (Định lý 1.7).

# Chương 2

# Một số dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình

Trong chương này chúng tôi chứng minh hai dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình, bao gồm định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan-Nochka cho đường cong trên trường không Acsimet và Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình phức trên hình vành khuyên. Các kết quả chính trong chương này viết dựa trên Bản thảo [1] và Bài báo [3] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

## 2.1. Định lý kiểu Cartan-Nochka cho đường cong trên trường không Acsimet

Trong phần này chúng tôi sẽ chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình không Acsimet với hàm đếm rút gọn trong trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng cố định ở vị trí $N-$dưới tổng quát. Trước hết chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và kết quả nghiên cứu liên quan đến việc chứng minh định lý chính.

### Bội dư với trọng Nochka

Với mỗi một tập hữu hạn $R$, ta kí hiệu $|R|$ là số các phần tử của $R$. Năm 1983, E. I. Nochka đã chứng minh hai kết quả sau liên quan đến họ các siêu mặt ở vị trí $N-$dưới tổng quát.

**Bổ đề 2.1** ([34]). *Cho* $q > 2N - n + 1$ *và* $\{H_j\}_{j=1}^q$ *là một họ các siêu* *phẳng ở vị trí $N-$dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Kí hiệu $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$. Khi đó tồn tại các số hữu tỷ dương $w(j)$ thỏa mãn các điều kiện:*

*i)* $0 < w(j) \leqslant 1$ *với mọi* $j \in Q$;

*ii) Đặt* $w^* = \max_{j \in Q} w(j)$, *ta có*

$$\sum_{j=1}^{q} w(j) = w^*(q - 2N + n - 1) + n + 1;$$

*iii)* $\dfrac{n+1}{2N - n + 1} \leqslant w^* \leqslant \dfrac{n}{N}$;

*iv) Với mỗi* $R \subset Q$ *thỏa mãn* $0 < |R| \leqslant N + 1$, *ta có*

$$\sum_{j \in R} w(j) \leqslant \operatorname{rank}\{H_j\}_{j \in R};$$

Các số hữu tỷ không âm $w(j), j = 1, \ldots, q$, trong Bổ đề 2.1 được gọi là *trọng Nochka* và $w^*$ được gọi là *hằng số Nochka.*

**Bổ đề 2.2** ([34]). *Cho* $q > 2N - n + 1$ *và* $\{H_j\}_{j=1}^q$ *là một họ các siêu phẳng ở vị trí $N-$dưới tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Gọi $w(j), j \in Q$, là các trọng Nochka trong Bổ đề 2.1. Kí hiệu $Q = \{1, 2, \ldots, q\}$ và $E_j \geqslant 1, j \in Q$, là các số thực tùy ý. Khi đó, với mỗi $R \subset Q$ với $0 < |R| \leqslant N + 1$, tồn tại một tập con $R_0 \subset R$ thỏa mãn*

$$|R_0| = \operatorname{rank}\{H_j\}_{j \in R_0} = \operatorname{rank}\{H_j\}_{j \in R},$$

*và*

$$\prod_{j \in R} E_j^{w(j)} \leqslant \prod_{j \in R_0} E_j.$$

Chú ý rằng các bổ đề 2.1 và 2.2 cũng đúng trong trường hợp họ các siêu mặt ở vị trí $N-$dưới tổng quát trong không gian $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$.

Cho $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $(f_0, \ldots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$. Ta nhắc lại $\mathcal{L} = \mathcal{L}(f_0, \ldots, f_n)$ là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính không tầm thường của $f_0, \ldots, f_n$ và

$$W_f = W(f_0, \ldots, f_n)$$

là định thức Wronskian của $f_0, \ldots, f_n$, hay còn gọi là của $f$.

Cho $H$ là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$, ta nhắc lại với mỗi $z_0 \in \mathcal{K}$, $\varepsilon(H, z_0)$ là bội dư của $H_j \circ f$ tại điểm $z_0$, tức là $\varepsilon(H, z_0) = d_j(z_0) - j \geqslant 0$ khi $\mathrm{ord}_{H_j \circ j}(z_0) = d_j(z_0)$. Ta có bổ đề sau về quan hệ giữa bội không điểm của Wronskian một đường cong chỉnh hình $f$ và bội dư với trọng Nochka của $f$ kết hợp với một họ các siêu phẳng.

**Bổ đề 2.3.** *Cho $f : \mathcal{K} \to \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_q\}$ là một họ gồm $q > 2N - n + 1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí $N-$dưới tổng quát. Gọi $w(j), j = 1, \ldots, q$, là các trọng Nochka trong Bổ đề 2.1. Khi đó với mỗi $z_0 \in \mathbb{K}$, ta có*

$$\sum_{j=1}^{q} w(j)\varepsilon(H_j, z_0) \leqslant \mathrm{ord}_{W_f}(z_0). \tag{2.1}$$

*trong đó $\mathrm{ord}_{W_f}(z_0)$ là bội không điểm của $W_f$ tại $z_0$.*

*Chứng minh.* Ta xét hai trường hợp có thể

*Trường hợp 1.* $W_f(z_0) \neq 0$. Khi đó $\mathrm{ord}_{W_f}(z_0) = 0$. Hơn nữa, từ Bổ đề 1.5 ta có $d_j = j$ với mọi $j = 0, \ldots, n$, do đó

$$\varepsilon(H_j, z_0) = 0$$

với mọi $j \in \{1, \ldots, q\}$. Điều này kéo theo (2.1) đúng.

*Trường hợp 2.* $W_f(z_0) = 0$. Khi đó $\mathrm{ord}_{W_f}(z_0) \geqslant 1$. Với mỗi $j = 1, \ldots, q$, ta kí hiệu $L_j$ là dạng tuyến tính thuần nhất định nghĩa $H_j$. Gọi $S_0$ là một tập con của $\{1, \ldots, q\}$ thỏa mãn $L_j(f)(z_0) = 0$ với mọi $j \in S_0$ và $L_j(f)(z_0) \neq 0$ với mọi $j \in \{1, \ldots, q\} \setminus S_0$. Từ giả thiết họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$ ở vị trí $N-$dưới tổng quát, $|S_0| \leqslant N$. Gọi $S \subset \{1, \ldots, q\}$ là một tập thỏa mãn $S_0 \subset S$ và $|S| = N + 1$. Dễ dàng kiểm tra được $\varepsilon(H_j, z_0) = 0$ với mọi $j \in \{1, \ldots, q\} \setminus S$. Điều này kéo theo

$$\sum_{j=1}^{q} w(j)\varepsilon(H_j, z_0) = \sum_{k \in S} w(k)\varepsilon(H_k, z_0). \tag{2.2}$$

Đặt $E_j = e^{\varepsilon(H_j,z_0)}$ với mỗi $j = 1,\dots,q$, khi đó $E_j \geqslant 1$. Từ giả thiết họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$ là ở vị trí $N-$ dưới tổng quát ta có

$$\operatorname{rank}\{H_k\}_{k\in S} = n+1,$$

do đó từ Bổ đề 2.2, tồn tại một tập con $S_0 \subset S$ thỏa mãn

$$|S_0| = \operatorname{rank}\{H_k\}_{k\in S_0} = \operatorname{rank}\{H_k\}_{k\in S} = n+1$$

và

$$\prod_{k\in S} E_k^{w(k)} \leqslant \prod_{k\in S_0} E_k.$$

Lấy logarit hai vế của bất đẳng thức trên ta có

$$\sum_{k\in S} w(k)\varepsilon(H_k,z_0) = \sum_{k\in S_0}\varepsilon(H_k,z_0). \tag{2.3}$$

Chú ý rằng họ các siêu phẳng $\{H_k, k\in S_0\}$ ở vị trí tổng quát nên từ Bổ đề 1.6, ta có

$$\sum_{k\in S_0}\varepsilon(H_k,z_0) \leqslant \operatorname{ord}_{W_f}(z_0). \tag{2.4}$$

Kết hợp (2.2), (2.3) và (2.4) ta có (2.1). Mệnh đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.3 cho chúng ta thấy tổng tất cả bội dư với trọng Nochka của một đường cong chỉnh hình kết hợp một họ các siêu phẳng ở vị trí $N-$dưới tổng quát tại một điểm $z_0$ luôn nhỏ hơn bội không điểm của Wronskian của $f$ tại điểm đó. Chú ý rằng, Bổ đề 2.3 được chứng minh trong trường hợp đường cong chỉnh hình không Acsimet và bổ đề này vẫn còn đúng trong trường hợp đường cong chỉnh hình phức.

### Định lý cơ bản thứ hai

Cho $f : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $(f_0,\dots,f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$. Cho $\mathcal{H} = \{H_1,\dots,H_q\}$ là một họ gồm $q \geqslant 2N-n+1$ siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí $N-$dưới tổng quát. Gọi

$w(j), j = 1, \ldots, q$, là các trọng Nochka của họ $\mathcal{H}$ trong Bổ đề 2.1. Với mỗi $z \in \mathcal{K}$, ta kí hiệu

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}, z) = \mathrm{ord}_{W_f}(z_0) - \sum_{j=1}^{q} w(j)\varepsilon(H_j, z),$$

ở đây $W_f = W(f_0, \ldots, f_n)$. Theo Bổ đề 2.3 ta dễ dàng thấy rằng

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}, z) \geqslant 0.$$

Với $r \geqslant 0$ ta đặt

$$\mathcal{V}_f(r, \mathcal{H}) = \sum_{|z| \leqslant r} \mathcal{V}(\mathcal{H}, z)$$

và gọi

$$\mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) = \int_0^r \frac{\mathcal{V}_f(t, \mathcal{H}) - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H})}{t} dt - \mathcal{V}_f(0, \mathcal{H}) \log r$$

hàm *đếm bội dư với trọng Nochka* của đường cong chỉnh hình $f$ kết hợp với họ siêu phẳng $\mathcal{H}$.

Với mỗi $j = 1, \ldots, q$, giả sử rằng

$$w(j) = a_j / b_j$$

trong đó $a_j, b_j$ là các số nguyên không âm và $b_j \neq 0$. Kí hiệu $M = b_1 \ldots b_q$. Và đặt

$$\Phi = \frac{L_1(f)^{Mw(1)} \ldots L_q(f)^{Mw(q)}}{W_f^M}, \tag{2.5}$$

trong đó $W_f = W(f_0, \ldots, f_n)$. Năm 2023 chúng tôi đã chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm rút gọn cho đường cong chỉnh hình không Acsimet kết hợp với một họ các siêu phẳng ở vị trí $N-$ dưới tổng quát trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ như sau:

**Định lý 2.4.** *Cho $f : \mathcal{K} \to \mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_q\}$ là một họ gồm $q$ siêu phẳng*

*$(q \geqslant 2N - n + 1)$ trong $\mathbb{P}^n(\mathcal{K})$ ở vị trí $N-$dưới tổng quát. Khi đó*

$$(q - 2N + n - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r, H_j) - \frac{N}{n}\mathcal{U}_f(r, \mathcal{H}) - \frac{N}{Mn}N(r, \Phi) - \frac{(N+1)n}{2}\log r + O(1),$$

*khi $r \longrightarrow \infty$ nằm ngoài một tập có độ đo tuyến tính hữu hạn.*

*Chứng minh.* Gọi $L_j, 1 \leqslant j \leqslant q$ là các dạng tuyến tính trong $\mathcal{K}[z_0, \ldots, z_n]$ định nghĩa $H_j$ tương ứng và $(f_0, \ldots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$. Để chứng minh Định lý 2.4 ta cần các mệnh đề sau

**Mệnh đề 2.5.** *Với các giả thiết của Định lý 2.4, tồn tại một hằng số $A > 0$ chỉ phụ thuộc vào các hệ số của $L_j$ thỏa mãn với mọi $r > 0$,*

$$|L_j(f)|_r \leqslant A.||f||_r \tag{2.6}$$

*với mọi $j = 1, \ldots, q$.*

*Chứng minh.* Kí hiệu

$$L_j(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{k=0}^{n} a_{kj} z_k \tag{2.7}$$

với $j = 1, \ldots, q$. Kí hiệu $||L_j|| = \max_{k=0,\ldots,n}\{|a_{kj}|\}$. Với mỗi $r > 0$ ta có

$$\begin{aligned} |L_j(f)|_r = \Big|\sum_{k=0}^{n} a_{kj} f_k\Big|_r &\leqslant \max_{k=0,\ldots,n}\{|a_{kj}|_r |f_k|_r\} \\ &\leqslant \max_{k=0,\ldots,n}\{|a_{kj}|\} \max_{k=0,\ldots,n}\{|f_k|_r\} = ||L_j||.||f||_r, \end{aligned}$$

với mỗi $j = 1, \ldots, q$. Khi đó ta đặt

$$A = \max_{j=1,\ldots,q} ||L_j||,$$

thì $A$ thỏa mãn (2.6). Mệnh đề được chứng minh. □

**Mệnh đề 2.6.** *Với các giả thiết của Định lý 2.4. Khi đó với mỗi $r > 0$, tồn tại một hoán vị $m_1, \ldots, m_q$ của các số tự nhiên $1, 2, \ldots, q$ thỏa mãn*

$$|L_{m_1}(f)|_r \geqslant |L_{m_2}(f)|_r \geqslant \cdots \geqslant |L_{m_q}(f)|_r. \tag{2.8}$$

*Hơn nữa, tồn tại hằng số dương $B$ chỉ phụ thuộc vào các hệ số của $L_j$ thỏa mãn*

$$||f||_r \leqslant B|L_{m_t}(f)|_r \tag{2.9}$$

*với mọi $1 \leqslant t \leqslant q - N$.*

*Chứng minh.* Ta biết rằng, với mỗi $r > 0$ và với mỗi $j \in \{1, \ldots, n\}$, $|L_j(f)|_r$ là một số số thực không âm, nên ta có thể chọn được một hoán vị $P = \{m_1, \ldots, m_q\}$ của tập các số tự nhiên $\{1, \ldots, q\}$ thỏa mãn (2.8).

Ta tiếp tục chứng minh sự tồn tại của hằng số $B$. Đặt

$$L_j(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{k=0}^{n} a_{kj} z_k \tag{2.10}$$

với mỗi $j = 1, \ldots, q$, trong đó $a_{kj} \in \mathcal{K}, j = 1, \ldots, q, k = 0, \ldots, n$ là các hằng số. Gọi $m_1, \ldots, m_q$ là các số tự nhiên trong (2.8) và $t$ là một số tự nhiên thỏa mãn $1 \leqslant t \leqslant q - N$, ta kí hiệu $T_0, \ldots, T_N$ là các dạng tuyến tính $L_{m_t}$, $L_{m_{q-N+1}}$, $L_{m_{q-N+2}}, \ldots, L_{m_q}$. Từ Bổ đề 2.2, tồn tại một tập con $\{T_{j_0}, \ldots, T_{j_n}\} \subset \{T_0, \ldots, T_N\}$ thỏa mãn

$$\operatorname{rank}\{T_{j_0}, \ldots, T_{j_n}\} = n + 1,$$

tức là $T_{j_0}, \ldots, T_{j_n}$ là độc lập tuyến tính.

Từ (2.10), với mỗi $i = 0, \ldots, n$ ta có

$$T_{j_i} = \sum_{k=0}^{n} b_{kj_i} z_k, \tag{2.11}$$

trong đó các hằng số $\{b_{kj_i}\}$ được lấy từ tập các hằng số $\{a_{kj}\}$ trong (2.10). Vì $T_{j_0}, \ldots, T_{j_n}$ độc lập tuyến tính nên từ (2.11) ta có

$$z_k = \sum_{i=0}^{n} c_{j_i k} T_{j_i} \tag{2.12}$$

với $k = 0, \ldots, n$, trong đó các hằng số $\{c_{j_i k}\}$ chỉ phụ thuộc vào các hằng số $\{b_{kj_i}\}$. Như vậy $\{c_{j_i k}\}$ chỉ phụ thuộc vào các hằng số $\{a_{kj}\}$ trong (2.10) và một trong chúng là khác 0. Đặt

$$B_t = \max_{i=0,\dots,n} |c_{j_ik}|_r = \max_{i=0,\dots,n} |c_{j_ik}| > 0 \quad \text{và} \quad B_P = \max_{t=1,\dots,q-N} B_t.$$

Ta biết rằng số các hoán vị $\{m_1, \dots, m_q\}$ của $\{1, \dots, q\}$ là hữu hạn nên ta có thể chọn $B = \max_P B_P > 0$, trong đó maximum được lấy trên tất cả các hoán vị $P$ của tập các số tự nhiên $\{1, \dots, q\}$.

Bây giờ ta chứng minh $B$ thỏa mãn (2.9). Từ định nghĩa của $T_0, \dots, T_N$ và (2.8) ta có

$$|T_j(f)|_r \leqslant |L_{m_t}(f)|_r \tag{2.13}$$

với mỗi $j \in \{0, \dots, N\}$. Từ (2.12), ta có

$$\begin{aligned} |f_k|_r = |\sum_{j=0}^{n} c_{j_ik} T_{j_i}(f)|_r &\leqslant \max_{i=0,\dots,n} |c_{j_ik}|_r |T_{j_i}(f)|_r \leqslant B_t \max_{i=0,\dots,n} |T_{j_i}(f)|_r \\ &\leqslant B_P \max_{i=0,\dots,n} |T_{j_i}(f)|_r \leqslant B \max_{j=0,\dots,N} |T_j(f)|_r \end{aligned} \tag{2.14}$$

với $k = 0, \dots, n$. Kết hợp (2.13) với (2.14), ta có

$$|f_k|_r \leqslant B|L_{m_t}(f)|_r$$

với mỗi $k = 0, \dots, n$ và $1 \leqslant t \leqslant q - N$. Điều này kéo theo

$$||f||_r \leqslant B|L_{m_t}(f)|_r$$

với mỗi $1 \leqslant t \leqslant q - N$. Tức là $B$ thỏa mãn (2.9). Mệnh đề được chứng minh. □

Ta tiếp tục chứng minh định lý. Với mỗi $j = 1, \dots, q$, giả sử

$$L_j(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n} a_{kj} z_k,$$

khi đó ta có $||L_j|| = \max_{k=0,\dots,n} |a_{kj}|$.

Do họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$ ở vị trí $N-$dưới tổng quát nên từ Bổ đề 2.1, tồn tại các trọng Nochka $w(j), j = 1, \dots, q$ và hằng số Nochka $w^*$ đối với họ các siêu phẳng $\mathcal{H}$ thỏa mãn Bổ đề 2.1, Bổ đề 2.2 và Bổ đề 2.3. Ta nhắc lại rằng nếu $w(j) = a_j/b_j$ với $j = 1, \dots, q$, trong đó $a_j, b_j$ là các số nguyên không âm và $b_j \neq 0$ thì $M = b_1 \dots b_q$ và

$$\Phi = \frac{L_1(f)^{Mw(1)} \dots L_q(f)^{Mw(q)}}{W_f^M}, \tag{2.15}$$

trong đó $W_f = W(f_0, \dots, f_n)$. Dễ thấy rằng cả tử và mẫu của $\Phi$ là các hàm nguyên.

Với mỗi $z_0 \in \mathcal{K}$, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{M}\mathrm{ord}_\Phi(z_0) = \sum_{j=1}^{q} w(j)\nu(H_j, z_0) - \mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0). \tag{2.16}$$

Thật vậy, từ định nghĩa của $\Phi$, ta có

$$\mathrm{ord}_\Phi(z_0) = M\sum_{j=1}^{q} w(j)\mathrm{ord}_{L_j(f)}(z_0) - M\mathrm{ord}_{W_f}(z_0). \tag{2.17}$$

Ta xem xét hai trường hợp có thể xảy ra:

Nếu $W_f(z_0) \neq 0$, thì $\mathrm{ord}_{W_f}(z_0) = 0$. Từ Mệnh đề 1.5, ta có với mọi $j \in \{0, \dots, q\}$,

$$\mathrm{ord}_{L_j(f)}(z_0) = d_j = j = \nu(H_j, z_0),$$

suy ra $\varepsilon(H_j, z_0) = d_j - j = 0$. Điều này kéo theo

$$\mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0) = \mathrm{ord}_{W_f}(z_0) - \sum_{j=1}^{q} w(j)\varepsilon(H_j, z_0) = 0.$$

Do đó từ (2.17), ta có

$$\mathrm{ord}_\Phi(z_0) = M\sum_{j=1}^{q} w(j)\nu(H_j, z_0).$$

Điều này kéo theo (2.16).

Nếu $W_f(z_0) = 0$. Từ định nghĩa của $\mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0)$ ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}_{W_f}(z_0) &= \sum_{j=1}^{q} w(j)\varepsilon(H_j, z_0) + \mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0)\\ &= \sum_{j=1}^{q} w(j)(\mathrm{ord}_{L_j(f)}(z_0) - \nu(H_j, z_0)) + \mathcal{V}(\mathcal{H}, z_0).\end{aligned}$$

Điều này kéo theo (2.16). Như vậy (2.16) đúng trong mọi trường hợp.

Với $r > 0$ tùy ý, từ (2.16) ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}n\Big(r,\frac{1}{\Phi}\Big) &\leqslant \sum_{j=1}^{q} w(j)\nu_f(r,H_j) - \mathcal{V}_f(r,\mathcal{H})\\ &\leqslant w^*\sum_{j=1}^{q}\nu_f(r,H_j) - \mathcal{V}_f(r,\mathcal{H}),\end{aligned}$$

điều này kéo theo

$$\frac{1}{M}N\Big(r,\frac{1}{\Phi}\Big) \leqslant w^*\sum_{j=1}^{q}\mathcal{N}_f(r,H_j) - \mathcal{U}_f(r,\mathcal{H}). \tag{2.18}$$

Ta thấy với mỗi $r > 0$, từ Mệnh đề 2.6, tồn tại một phép phân hoạch $m_1,\ldots,m_q$ của tập các số nguyên dương $1,\ldots,q$ và một hằng số dương cố định $B$ thỏa mãn

$$|L_{m_1}(f)|_r \geqslant |L_{m_2}(f)|_r \geqslant \cdots \geqslant |L_{m_q}(f)|_r$$

và

$$||f||_r \leqslant B|L_{m_t}(f)|_r$$

với mỗi $1 \leqslant t \leqslant q-N$. Do đó

$$\frac{|L_{m_t}(f)|_r}{||f||_r} \geqslant \frac{1}{B} \tag{2.19}$$

với mỗi $1 \leqslant t \leqslant q-N$. Điều này kéo theo

$$\prod_{t=1}^{q-N-1}\Big(\frac{|L_{m_t}(f)|_r}{||f||_r}\Big)^{w(m_t)} \geqslant \prod_{t=1}^{q-N-1}\frac{1}{B^{w(m_t)}} = \frac{1}{B^{\sum_{t=1}^{q-N-1}w(m_t)}}.$$

Hơn nữa từ Mệnh đề 2.5 ta có

$$\prod_{t=1}^{q-N-1}\Big(\frac{|L_{m_t}(f)|_r}{||f||_r}\Big)^{w(m_t)} \leqslant \prod_{t=1}^{q-N-1}A^{w(m_t)} = A^{\sum_{t=1}^{q-N-1}w(m_t)}.$$

Đặt $C_0 = \max\limits_S B^{\sum_{t\in S}w(t)}$, $C_1 = \max\limits_S A^{\sum_{t\in S}w(t)}$, trong đó maximum được lấy trên tất cả các tập con $S \subset \{1,\ldots,q\}$ thỏa mãn $|S| = q-N-1$. Khi đó

$$\frac{1}{C_0} \leqslant \prod_{t=1}^{q-N-1} \left( \frac{|L_{m_t}(f)|_r}{||f||_r} \right)^{w(m_t)} \leqslant C_1. \tag{2.20}$$

Đặt $Q = \{1, \ldots, q\}$, $S = \{m_t, t = 1, \ldots, q-N-1\}$ thì $|S| = q - N - 1$. Đặt $R = Q \backslash S$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} \prod_{j \in S} \left( \frac{|L_j(f)|_r}{||f||_r} \right)^{w(j)} &= \prod_{j \in Q} \left( \frac{|L_j(f)|_r}{||f||_r} \right)^{w(j)} . \prod_{j \in R} \left( \frac{||f||_r}{|L_j(f)|_r} \right)^{w(j)} \\ &= \prod_{j \in Q} \left( \frac{|L_j(f)|_r}{||f||_r} \right)^{w(j)} . \prod_{j \in R} \left( \frac{||f||_r ||L_j||}{|L_j(f)|_r} \right)^{w(j)} \\ &\quad . \prod_{j \in R} \frac{1}{||L_j||^{w(j)}}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Chú ý rằng $|R| = N + 1$, nên theo Bổ đề 2.2, ta thu được một tập con $R_0 \subset R$, $|R_0| = n + 1$ thỏa mãn

$$\prod_{j \in R} \left( \frac{||f||_r ||L_j||}{|L_j(f)|_r} \right)^{w(j)} \leqslant \prod_{j \in R_0} \frac{||f||_r ||L_j||}{|L_j(z)|_r}.$$

Đặt

$$C = \prod_{j \in R} \frac{1}{||L_j||^{w(j)}} . \prod_{j \in R_0} ||L_j||,$$

khi đó $C > 0$ là một hằng số và từ (2.21) ta có

$$\begin{aligned} \prod_{j \in S} \left( \frac{|L_j(f)|_r}{||f||_r} \right)^{w(j)} &\leqslant C \prod_{j \in Q} \left( \frac{|L_j(f)|_r}{||f||_r} \right)^{w(j)} . \prod_{j \in R_0} \frac{||f||_r}{|L_j(f)|_r}. \\ &= C \frac{\prod_{j \in Q} |L_j(f)|_r^{w(j)}}{||f||_r^{\sum_{j \in Q} w(j)}} . \frac{||f||_r^{n+1}}{\prod_{j \in R_0} |L_j(f)|_r}. \\ &= C \frac{\prod_{j \in Q} |L_j(f)|_r^{w(j)}}{\prod_{j \in R_0} |L_j(f)|_r} \frac{1}{||f||_r^{\sum_{j \in Q} w(j) - n - 1}}. \\ &= C \frac{\prod_{j \in Q} |L_j(f)|_r^{w(j)}}{\prod_{j \in R_0} |L_j(f)|_r} \frac{1}{||f||_r^{w^*(q-2N+n-1)}}. \end{aligned}$$

Lấy logarit hai vế bất đẳng thức trên ta có

$$\log \prod_{j\in S}\left(\frac{|L_j(f)|_r}{||f||_r}\right)^{w(j)} \leqslant \log \prod_{j\in Q}|L_j(f)|_r^{w(j)} - \log \prod_{j\in R_0}|L_j(f)|_r$$
$$- w^*(q-2N+n-1)T_f(r) + O(1). \qquad (2.22)$$

Từ (2.20) ta suy ra

$$\log \prod_{j\in S}\left(\frac{|L_j(f)|_r}{||f||_r}\right)^{w(j)} = O(1),$$

do đó từ (2.22) ta có

$$\begin{aligned}
w^*(q-2N+n-1)T_f(r) &\leqslant \log \frac{\prod_{j\in Q}|L_j(f)|_r^{w(j)}}{|W_f|_r} + \log \frac{|W_f|_r}{\prod_{j\in R_0}|L_j(f)|_r}\\
&\quad - \log \prod_{j\in S}\left(\frac{|L_j(f)|_r}{||f||_r}\right)^{w(j)} + O(1)\\
&= \frac{1}{M}\log\left|\frac{L_1(f)^{Mw(1)}\dots L_q(f)^{Mw(q)}}{W_f^M}\right|_r\\
&\quad + \log\left|\frac{W_f}{\prod_{j\in R_0}L_j(f)}\right|_r + O(1). \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Bây giờ ta ước lượng $\log\left|\frac{W_f}{\prod_{j\in R_0}L_j(z)}\right|_r$. Đặt $R_0 = \{b_1,\dots,b_{n+1}\}$. Vì

$$\operatorname{rank}\{H_j\}_{j\in R_0} = n+1 = |R_0|,$$

nên theo tính chất của Wronskian ta có,

$$W(f_0,\dots,f_n) = CW(L_{b_1}(f),\dots,L_{b_{n+1}}(f)),$$

Do đó

$$\frac{W_f}{\prod_{j\in R_0}L_j(z)} = \frac{CW(L_{b_1}(f),\dots,L_{b_{n+1}}(f))}{L_{b_1}(f)\dots L_{b_{n+1}}(f)} = CG,$$

trong đó

$$G = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{(L_{b_1}(f))'}{L_{b_1}(f)} & \cdots & \dfrac{(L_{b_{n+1}}(f))'}{L_{b_{n+1}}(f)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{(L_{b_1}(f))^{(n)}}{L_{b_1}(f)} & \cdots & \dfrac{(L_{b_{n+1}}(f))^{(n)}}{L_{b_{n+1}}(f)} \end{vmatrix}.$$

Ta biết rằng

$$G = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)},$$

trong đó tổng được lấy trên tất cả các hoán vị $\sigma$ của tất cả các tập $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ thuộc $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$. Suy ra

$$\begin{aligned} \log |G|_r &\leqslant \max \log \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)} \right|_r \\ &= \max \sum_{j=1}^{n} \log \left| \frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)} \right|_r \\ &= \max \sum_{j=1}^{n} \log \mu \left( r, \frac{(L_{\sigma(\alpha_j)}(f))^{(j)}}{L_{\sigma(\alpha_j)}(f)} \right) \\ &\leqslant \max \sum_{j=1}^{n} \log \frac{1}{r^j} = \sum_{j=1}^{n} -j \log r = -\frac{n(n+1)}{2} \log r. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\log \left| \frac{W_f}{\prod_{j \in R_0} L_j(z)} \right|_r \leqslant -\frac{n(n+1)}{2} \log r + O(1). \tag{2.24}$$

Theo công thức Jensen ta có

$$\log |\Phi|_r = \log \mu(r, \Phi) = N\left(r, \frac{1}{\Phi}\right) - N(r, \Phi) + O(1). \tag{2.25}$$

Kết hợp (2.23), (2.24) và (2.25), ta có

$$\begin{aligned} &w^*(q - 2N + n - 1)T_f(r) \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{M} \log |\Phi|_r - \frac{n(n+1)}{2} \log r + O(1) \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{M} \left( N\left(r, \frac{1}{\Phi}\right) - N(r, \Phi) \right) - \frac{n(n+1)}{2} \log r + O(1). \end{aligned}$$

Do đó, từ (2.18) ta có

$$w^*(q-2N+n-1)T_f(r) \leqslant w^* \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r,H_j) - \mathcal{U}_f(r,\mathcal{H}) - \frac{1}{M}N(r,\Phi)$$
$$- \frac{n(n+1)}{2}\log r + O(1).$$

Suy ra

$$\begin{aligned}(q-2N+n-1)T_f(r) &\leqslant \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r,H_j) - \frac{1}{w^*}\mathcal{U}_f(r,\mathcal{H}) - \frac{1}{Mw*}N(r,\Phi)\\ &\quad - \frac{n(n+1)}{2w^*}\log r + O(1)\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{q} \mathcal{N}_f(r,H_j) - \frac{N}{n}\mathcal{U}_f(r,\mathcal{H}) - \frac{N}{Mn}N(r,\Phi)\\ &\quad - \frac{n(N+1)}{2}\log r + O(1).\end{aligned}$$

Như vậy định lý được chứng minh. □

Chú ý rằng, do $\mathcal{N}_f(r,H_j) \leqslant N_f^n(r,H_j)$ với mỗi $j = 1,2,\ldots,q$, nên Định lý 2.4 của chúng tôi là một cải tiến của định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan-Nochka (Định lý 1.3) cho đường cong chỉnh hình không Acsimet. Hơn nữa khi họ $\mathcal{H}$ ở vị trí tổng quát $N = n$ thì $w(j) = 1$ với $j = 1,\ldots,q$, $M = 1$, $\Phi = H$ và hàm đếm bội dư với trọng Nochka $\mathcal{U}_f(r,\mathcal{H})$ trùng với hàm đếm bội dư. Trong trường hợp này Định lý 2.4 nhận lại Định lý 1.7.

## 2.2. Định lý cho đường cong trên hình vành khuyên

Trước khi chứng minh định lý chính, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm, kí hiệu và kết quả về phân bố giá trị cho hàm và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, cần thiết cho việc chứng minh các kết quả chính. Cho $R_0 > 1$ là một số thực dương hoặc bằng $+\infty$, ta gọi

$$\Delta = \Big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\Big\}, \tag{2.26}$$

là một hình vành khuyên trên $\mathbb{C}$. Với mỗi số thực $r$ thỏa mãn $1 < r < R_0$, ta kí hiệu

$$\Delta_{1,r} = \big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| \leqslant 1\big\},\ \Delta_{2,r} = \big\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\big\},$$
$$\Delta_r = \big\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r\big\}.$$

Cho $f$ là một hàm phân hình trên $\Delta$, $c \in \mathbb{C}$, ta đặt

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta;$$
$$m(r, \frac{1}{f-c}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - c|} d\theta.$$

Kí hiệu

$$m_0(r, f) = m(r, f) + m(r^{-1}, f),$$

và

$$m_0(r, \frac{1}{f-c}) = m(r, \frac{1}{f-c}) + m(r^{-1}, \frac{1}{f-c}).$$

Ta gọi $n_1\Big(r, \dfrac{1}{f-c}\Big)$ là số các không điểm của $f - c$ trong $\Delta_{1,r}$, $n_2\Big(r, \dfrac{1}{f-c}\Big)$ là số các không điểm của $f - c$ trong $\Delta_{2,r}$, $n_1(r, \infty)$ là số các cực điểm của $\Delta_{1,r}$ và $n_2(r, \infty)$ là số các cực điểm của $f$ trong $\Delta_{2,r}$. Đặt

$$N_1\Big(r, \frac{1}{f-c}\Big) = \int_{1/r}^{1} \frac{n_1(t, \frac{1}{f-c})}{t} dt, \quad N_2\Big(r, \frac{1}{f-c}\Big) = \int_1^r \frac{n_2(t, \frac{1}{f-c})}{t} dt,$$

và

$$N_1(r, f) = N_1(r, \infty) = \int_{1/r}^{1} \frac{n_1(t, \infty)}{t} dt,$$
$$N_2(r, f) = N_2(r, \infty) = \int_1^r \frac{n_2(t, \infty)}{t} dt.$$

Kí hiệu

$$N_0\Big(r, \frac{1}{f-c}\Big) = N_1\Big(r, \frac{1}{f-c}\Big) + N_2\Big(r, \frac{1}{f-c}\Big)$$
$$N_0(r, f) = N_1(r, f) + N_2(r, f).$$

Hàm

$$T_0(r, f) = m_0(r, f) + N_0(r, f) - 2m(1, f)$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna* của $f$. Dễ thấy rằng các hàm $m_0(r, f)$, $N_0(r, f)$ là không âm và hàm $T_0(r, f)$ là không âm, liên tục, lồi và không giảm theo $\log r$. Mệnh đề sau đây là một dạng của định lý Jensen cho hàm phân hình trên hình vành khuyên.

**Mệnh đề 2.7** ([24]). *Cho $f$ là một hàm phân hình khác hằng trên hình vành khuyên $\Delta$. Khi đó, với mỗi $r \in (1, R_0)$ ta có*

$$N_0\Big(r, \frac{1}{f}\Big) - N_0(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r^{-1}e^{i\theta})|d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{i\theta})|d\theta.$$

Mệnh đề sau đây là Định lý cơ bản thứ nhất cho hàm phân hình trên hình vành khuyên.

**Mệnh đề 2.8** ([24]). *Cho $f$ là một hàm phân hình khác hằng trên hình vành khuyên $\Delta$. Khi đó với mỗi $r \in (1, R_0)$, ta có*

$$T_0(r, \frac{1}{f-c}) = T_0(r, f) + O(1)$$

*với mọi hằng số $c \in \mathbb{C}$.*

Trong luận án này, kí hiệu "$\|$" trong các bất đẳng thức về quan hệ giữa các hàm Nevanlinna của hàm phân hình hay đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên được hiểu là với $R_0 = +\infty$, bất đẳng thức đúng với $r \in (1, +\infty)$ nằm ngoài một tập $\Delta'_r$ thỏa mãn $\int_{\Delta'_r} r^{\lambda-1}dr < +\infty$, và với $R_0 < +\infty$, bất đẳng thức đúng với $r \in (1, R_0)$ nằm ngoài một tập $\Delta'_r$ thỏa mãn $\int_{\Delta'_r} \frac{1}{(R_0 - r)^{\lambda+1}}dr < +\infty$, trong đó $\lambda \geqslant 0$. Mệnh đề sau đây là một dạng Bổ đề đạo hàm logarit cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

**Mệnh đề 2.9** ([25]). *Cho $f$ là một hàm phân hình trên $\Delta$ và $\lambda \geqslant 0$. Khi đó với mỗi $r \in (1, R_0)$, ta có*

*(i) Nếu $R_0 = +\infty$,*

$$\| \quad m_0(r, \frac{f'}{f}) = O(\log r + \log T_0(r, f)).$$

*(ii) Nếu $R_0 < +\infty$,*

$$\| \quad m_0(r, \frac{f'}{f}) = O(\log \frac{1}{R_0 - r} + \log T_0(r, f)).$$

**Định nghĩa 2.1** ([39]). Cho $f$ là một đường cong chỉnh hình từ $\Delta$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, khi đó tồn tại các hàm chỉnh hình $f_0, \ldots, f_n$ trên $\Delta$, trong đó có ít nhất một hàm không đồng nhất bằng không sao cho

$$f(z) = (f_0(z) : \cdots : f_n(z))$$

với mọi $z \notin \{f_0 = \cdots = f_n = 0\}$. Ta gọi $(f_0, \ldots, f_n)$ là một *biểu diễn* của đường cong $f$. Nếu các hàm $f_0, \ldots, f_n$ không có không điểm chung trên $\Delta$ thì ta gọi $(f_0, \ldots, f_n)$ là một *biểu diễn tối giản* của $f$.

**Định nghĩa 2.2** ([39, 41]). Đường cong chỉnh hình $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là *suy biến tuyến tính* nếu ảnh của $f$ chứa trong một đa tạp tuyến tính thực sự nào đó của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Đường cong chỉnh hình $f$ được gọi là *suy biến đại số* nếu ảnh của $f$ chứa trong một đa tạp đại số thực sự nào đó của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình trên $\Delta$ và $\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$, tức là các hàm $f_0, \ldots, f_n$ chỉnh hình không có không điểm chung trên $\Delta$. Với mỗi $1 < r < R_0$, hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan $T_f(r)$ của $f$ được định nghĩa bởi

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta,$$

trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$. Định nghĩa này không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn tối giản của hàm $f$ (có thể sai khác một hằng số).

Cho $D$ là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc $d$ và $Q$ là đa thức thuần nhất trong $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ bậc $d$ định nghĩa $D$, ta nhắc lại, nếu

$$Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \dots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$ và $i_{k0} + \dots + i_{kn} = d$ với $k = 0, \dots, n_d$, thì ta kí hiệu

$$(f, D) = Q(f) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k f_0^{i_{k0}} \dots f_n^{i_{kn}}.$$

Giả sử $(f, D) \not\equiv 0$, với $1 < r < R_0$, hàm xấp xỉ của hàm $f$ kết hợp với siêu mặt $D$ định nghĩa bởi

$$m_f(r, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|(f, D)(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|(f, D)(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta,$$

định nghĩa này không phụ thuộc vào cách chọn biểu diễn tối giản của hàm $f$ (có thể sai khác một hằng số).

Với $r : 1 < r < R_0$, kí hiệu $n_{1,f}(r, D)$ là số các không điểm của $Q(f)$ trong $\Delta_{1,r}$, $n_{2,f}(r, D)$ là số các không điểm của $Q(f)$ trong $\Delta_{2,r}$, kể cả bội. Hàm đếm của $f$ kết hợp với siêu mặt $D$ được định nghĩa bởi

$$N_{1,f}(r, D) = \int_{r^{-1}}^{1} \frac{n_{1,f}(t, D)}{t} dt, \quad N_{2,f}(r, D) = \int_1^r \frac{n_{2,f}(t, D)}{t} dt,$$

và

$$N_f(r, D) = N_{1,f}(r, D) + N_{2,f}(r, D).$$

Cho $\alpha$ là một số tự nhiên dương, ta kí hiệu $n_{1,f}^{\alpha}(r, D)$ là số các không điểm với bội cắt cụt bởi $\alpha$ của $Q(f)$ trong $\Delta_{1,r}$, $n_{2,f}^{\alpha}(r, D)$ là số các không điểm của $Q(f)$ trong $\Delta_{2,r}$, trong đó mỗi không điểm được tính bằng số bội của nó nếu bội đó nhỏ hơn $\alpha$ và bằng $\alpha$ trong trường hợp ngược lại, tức là

$$n_{1,f}^{\alpha}(r, D) = \sum_{z \in \Delta_{1,r}, Q(f)(z)=0} \min\{\mathrm{ord}_{Q(f)}(z), \alpha\},$$

$$n^{\alpha}_{2,f}(r,D) = \sum_{z\in\Delta_{2,r},Q(f)(z)=0} \min\{\mathrm{ord}_{Q(f)}(z),\alpha\}.$$

Hàm đếm bội cắt cụt của hàm $f$ được định nghĩa bởi

$$N^{\alpha}_{1,f}(r,D) = \int_{r^{-1}}^{1} \frac{n^{\alpha}_{1,f}(t,D)}{t}dt, \quad N^{\alpha}_{2,f}(r,D) = \int_{1}^{r} \frac{n^{\alpha}_{2,f}(t,D)}{t}dt,$$

và

$$N^{\alpha}_{f}(r,D) = N^{\alpha}_{1,f}(r,D) + N^{\alpha}_{2,f}(r,D).$$

Tiếp theo chúng tôi chứng minh một dạng định lý cơ bản cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên cho hàm đếm bội cắt cụt với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát, cần thiết cho việc chứng minh định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong Chương 3. Đầu tiên chúng tôi giới thiệu về Wronskian, giới thiệu và chứng minh một số kiến thức liên quan.

Cho $f_0,\dots,f_n$ là các hàm chỉnh hình, ta kí hiệu $W(f_0,\dots,f_n)$ là Wronskian của các hàm $f_0,\dots,f_n$, tức là

$$W(f_0,\dots,f_n) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_n \\ f_0' & f_1' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n)} & f_1^{(n)} & \dots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

**Mệnh đề 2.10.** *Cho $f:\Delta\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $(f_0:\dots:f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$. Khi đó với mỗi $1<r<R_0$, ta có*

$$\| \quad m_0\left(r,\frac{W(f_0,\dots,f_n)}{f_0\dots f_n}\right) = O_f(r). \tag{2.27}$$

*Chứng minh.* Ta chứng minh cho trường hợp $R_0=+\infty$, trường hợp $R_0<+\infty$ được chứng minh tương tự. Không mất tính tổng quát ta giả sử $f_0$ không là hàm hằng. Bằng lập luận tương tự như chứng minh của Bổ đề 1.4.3 trong [29], ta có

$$W(f_0,\dots,f_n) = f_0^n W\left(\left(\frac{f_1}{f_0}\right)',\dots,\left(\frac{f_n}{f_0}\right)'\right).$$

Đặt $g_j = f_j/f_0$ với $j = 1, \ldots, n$, khi đó ta có

$$\frac{W(f_0, \ldots, f_n)}{f_0 \ldots f_n} = \frac{W(g_1', \ldots, g_n')}{g_1 \ldots g_n}. \tag{2.28}$$

Ta thấy rằng

$$\frac{W(g_1', \ldots, g_n')}{g_1 \cdots g_n} = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \frac{(g_{\sigma(j)})^{(j)}}{g_{\sigma(j)}},$$

trong đó tổng được lấy trên tất cả các hoán vị $\sigma$ của $\{1, \ldots, n\}$. Điều này kéo theo với mỗi $r : 1 < r < R_0$, ta có

$$m_0\Big(r, \frac{W(g_1', \ldots, g_n')}{g_1 \cdots g_n}\Big) \leqslant \sum_{\sigma} \sum_{j=1}^{n} m_0\Big(r, \frac{(g_{\sigma(j)})^{(j)}}{g_{\sigma(j)}}\Big). \tag{2.29}$$

Từ Mệnh đề 2.9, với mỗi hoán vị $\sigma$ và $j \in \{1, \ldots, n\}$, ta có

$$\| \quad m_0\Big(r, \frac{g_{\sigma(j)}^{(j)}}{g_{\sigma(j)}}\Big) \leqslant O\big(S(r) + \log T_0(r, g_{\sigma(j)})\big), \tag{2.30}$$

trong đó $S(r) = \log r$ nếu $R = +\infty$ và $S(r) = \log 1/(R - r)$ nếu $R < +\infty$.

Lấy siêu phẳng $H = \{(z_0 : \cdots : z_n) : z_0 = 0\}$. Khi đó ta có

$$N_f(r, H) = N_0(r, 1/f_0) = N_0(r, f_j/f_0),$$

với mỗi $j = 1, \ldots, n$, điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
T_0(r, g_j) &= T_0(r, f_j/f_0) = m_0(r, f_j/f_0) + N_0(r, f_j/f_0)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|f_j(re^{i\theta})|}{|f_0(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|f_j(r^{-1}e^{i\theta})|}{|f_0(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta + N_f(r, H)\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{||f(re^{i\theta})||}{|f_0(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{||f(r^{-1}e^{i\theta})||}{|f_0(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta + N_f(r, H)\\
&= m_f(r, H) + N_f(r, H) = T_f(r) + O(1). \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.28), (2.29), (2.30) và (2.31) ta có kết luận của mệnh đề. □

Ta nhắc lại rằng $D_1, \ldots, D_q$, $q > n$, trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí tổng quát nếu với mọi cách chọn $i_1, \ldots, i_{n+1} \in \{1, \ldots, q\}$, ta luôn có

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \operatorname{supp}(D_{i_k}) = \emptyset.$$

**Mệnh đề 2.11** ([3]). *Cho* $D_1, \ldots, D_q$ *là* $q$ *siêu mặt trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *có bậc giống nhau và bằng* $d$ *ở vị trí tổng quát trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. *Đặt* $M = \binom{n+d}{n} - 1$. *Khi đó tồn tại* $(M-n)$ *siêu mặt* $T_1, \ldots, T_{M-n}$ *trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *thỏa mãn với mỗi tập con* $R \subset \{1, \ldots, q\}$ *với* $\#R = \operatorname{rank}\{D_j\}_{j\in R} = n+1$, *thì* $\operatorname{rank}\{\{D_j\}_{j\in R} \cup \{T_j\}_{j=1}^{M-n}\} = M+1$.

Chú ý rằng, trong chứng minh của Mệnh đề 2.11 cho thấy các siêu mặt $T_j, j = 1, \ldots, M-n$ có cùng bậc $d$.

Năm 2022, H.T. Phuong và L. Vilaisavanh đã chứng minh định lý sau gọi là định lý cơ bản thứ nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên.

**Mệnh đề 2.12** ([41]). *Cho* $D$ *là một siêu mặt trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *có bậc* $d$ *và* $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một đường cong chỉnh hình mà ảnh của nó không chứa trong* $D$. *Khi đó, với mỗi* $1 < r < R_0$, *ta có*

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = dT_f(r) + O(1).$$

Bây giờ chúng tôi chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên kết hợp với các siêu mặt.

**Định lý 2.13.** *Cho* $f : \Delta \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và* $D_j, 1 \leqslant j \leqslant q$, *là các siêu mặt trong* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *bậc* $d_j$ *tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi* $d$ *là bội chung nhỏ nhất của các* $d_j$ *và đặt* $M = \binom{n+d}{n} - 1$. *Khi đó, với mỗi* $1 < r < R_0$ *và* $q \geqslant M+1$, *ta có*

$$\| \quad (q - M - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j) + O_f(r). \tag{2.32}$$

*Chứng minh.* Gọi $(f_0 : \cdots : f_n)$ là một biểu diễn tối giản của $f$ và gọi $P_j$, $1 \leqslant j \leqslant q$, là các đa thức thuần nhất bậc $d_j$ trong $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ định nghĩa $D_j$. Ta đặt $\mathcal{P} = \{P_j, j = 1, \ldots, q\}$.

Trước hết ta xem xét trường hợp $d_1 = d_2 = \cdots = d_q = d$. Đặt $T_1, \ldots, T_{M-n}$ là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn Mệnh đề 2.11 và gọi $Q_j, 1 \leqslant j \leqslant M-n$ là các đa thức thuần nhất bậc $d$ trong $\mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ định nghĩa các siêu mặt $T_j$. Ta kí hiệu $\mathcal{I}_d = \{I_0, \ldots, I_M\}$ là tập tất cả các bộ $n+1$ số tự nhiên bậc $d$, tức là với mỗi $j = 0, \ldots, M$, $I_j = (i_{j0}, \ldots, i_{jn})$ thỏa mãn $i_{j0} + \cdots + i_{jn} = d$. Với mỗi $j = 0, \ldots, M$, ta đặt

$$F_j = f^{I_j} = f_0^{i_{j0}} \ldots f_n^{i_{jn}},$$

trong đó $I_j = (i_{j0}, \ldots, i_{jn})$. Vì $f$ là đường cong không suy biến đại số nên $F_0, \ldots, F_M$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{C}$. Do đó

$$W_F = W(F_0, \ldots, F_M) \not\equiv 0.$$

**Khẳng định 1.** *Tồn tại một hằng số dương $\beta$ thỏa mãn*

$$|Q_j(f)(z)| \leqslant \beta ||f(z)||^d \tag{2.33}$$

*với mỗi $j = 1, \ldots, M-n$ và với mọi $z \in \Delta$.*

*Chứng minh Khẳng định 1.* Thực vậy, với mỗi $j \in \{1, \ldots, q\}$, giả sử rằng

$$Q_j(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{I_i = (i_0, \ldots, i_n) \in \mathcal{I}_d} a_{jI_i} z_0^{i_0} \ldots z_n^{i_n}.$$

Đặt $\beta_j = (M+1) \max\limits_{I_i \in \mathcal{I}_d} |a_{jI_i}| > 0$ và $\beta = \max\limits_{j=1,\ldots,q} \beta_j > 0$. Khi đó với mỗi $z \in \Delta$, ta có

$$\begin{aligned} |Q_j(f)(z)| &= \Bigg| \sum_{I_i = (i_0, \ldots, i_n) \in \mathcal{I}_d} a_{jI_i} f_0^{i_0}(z) \ldots f_n^{i_n}(z) \Bigg| \\ &\leqslant \beta_j (\max\{|f_0(z)|, \ldots . |f_n(z)|\})^d \\ &\leqslant \beta \|f(z)\|^d. \end{aligned}$$

Điều này kéo theo kết luận của khẳng định. □

**Khẳng định 2.** *Tồn tại một hằng số dương $\alpha$ thõa mãn với mọi cách chọn tùy ý $\{i_1, \ldots, i_{n+1}\} \subset \{1, \ldots, q\}$, ta luôn có*

$$||f(z)||^d \leqslant \alpha \max_{j=1,\ldots,n+1} |P_{i_j}(f)(z)| \tag{2.34}$$

*với mỗi $z \in \Delta$.*

*Chứng minh Khẳng định 2.* Thực vậy, gọi $\mathcal{R} = \{i_1, \ldots, i_{n+1}\} \subset \{1, \ldots, q\}$ là một tập con bất kỳ. Với $z \in \Delta$, vì $D_j, 1 \leqslant j \leqslant q$, ở vị trí tổng quát, theo Hilbert's Nullstellensatz [50], với mỗi số nguyên $k \in \{0, \ldots, n\}$, tồn tại một số nguyên dương $m_k \geqslant d$ thỏa mãn

$$z_k^{m_k} = \sum_{j=1}^{n+1} \delta_{jk}(z_0, \ldots, z_n) P_{i_j}(z_0, \ldots, z_n),$$

trong đó $\delta_{jk}, 1 \leqslant j \leqslant n+1, 0 \leqslant k \leqslant n$, là các đa thức thuần nhất với các hệ số trong $\mathbb{C}$ bậc $m_k - d$. Do đó

$$|f_k(z)|^{m_k} \leqslant \alpha_{\mathcal{R}} \|f(z)\|^{m_k - d} \max\{|P_{i_1}(f)(z)|, \ldots, |P_{i_{n+1}}(f)(z)|\}, \qquad (2.35)$$

trong đó $\|f(z)\| := \max\{|f_0(z)|, \ldots, |f_n(z)|\}$, $\alpha_{\mathcal{R}}$ là một hằng số dương, chỉ phụ thuộc vào các hệ số của $\delta_{jk}, 1 \leqslant j \leqslant n+1, 0 \leqslant k \leqslant n$, tức là chỉ phụ thuộc vào các hệ số của $P_{i_j}, 1 \leqslant j \leqslant n+1$. Chú ý rằng, (2.35) đúng với mọi $k = 0, \ldots, n$, do đó

$$\|f(z)\|^d \leqslant \alpha_{\mathcal{R}} \max\{|P_{i_1}(f)(z)|, \ldots, |P_{i_{n+1}}(f)(z)|\}. \qquad (2.36)$$

Đặt $\alpha = \max\limits_{\mathcal{R} = \{i_1, \ldots, i_{n+1}\} \subset \{1, \ldots, q\}} \alpha_{\mathcal{R}}$, do đó từ (2.36) ta có kết luận của khẳng định. □

Ta tiếp tục chứng minh định lý. Với $r : 1 < r < R_0$, gọi $x \in \Delta, |x| = r$ là một phần tử cố định, khi đó tồn tại một hoán vị $\{i_1, \ldots, i_q\}$ của tập các chỉ số $\{1, \ldots, q\}$ thỏa mãn

$$|P_{i_1}(f)(x)| \leqslant |P_{i_2}(f)(x)| \leqslant \cdots \leqslant |P_{i_q}(f)(x)|.$$

Đặt

$$W_r = W(P_{i_1}(f), \ldots, P_{i_{n+1}}(f), Q_1(f), \ldots, Q_{M-n}(f)),$$

Vì

$$\operatorname{rank}\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_{n+1}}, Q_1, \ldots, Q_{M-n}\} = M + 1,$$

nên tồn tại một hằng số $C_1 \neq 0$ thỏa mãn $W_r = C_1 W_F$. Từ Khẳng định 1 và Khẳng định 2 ta có

$$|P_j(f)(x)| \leqslant \beta ||f(x)||^d$$

với mọi $j = 1, \ldots, q$ và

$$||f(x)||^d \leqslant \alpha \max_{j=1,\ldots,n+1} |P_{i_j}(f)(x)| \leqslant \alpha |P_{i_k}(f)(x)|$$

với mọi $k = n+2, \ldots, q$. Do đó ta có

$$\begin{aligned}
&|W_F(x)|.\frac{\|f(z)\|^{qd}}{|P_1(f)(x)\ldots P_q(f)(x)|} \\
&\qquad = |W_F(x)| \prod_{j=1}^{n+1} \frac{\|f(x)\|^d}{|P_{i_j}(f)(x)|} \prod_{k=n+2}^{q} \frac{\|f(x)\|^d}{|P_{i_k}(f)(x)|} \\
&\qquad \leqslant \alpha^{q-n-1} |W_F(x)| \prod_{j=1}^{n+1} \frac{\|f(x)\|^d}{|P_{i_j}(f)(z)|}. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Từ định $W_F$ và $W_r$, từ (2.37) ta có

$$\begin{aligned}
&|W_F(x)|.\frac{\|f(z)\|^{qd}}{|P_1(f)(x)\ldots P_q(f)(x)|} \\
&\qquad \leqslant \frac{\alpha^{q-n-1}}{|C_1|} \frac{|W_r(x)|\beta^{M-n}\|f(x)\|^{d(M+1)}}{\prod_{j=1}^{n+1} |P_{i_j}(f)(x)| \prod_{j=1}^{M-n} |Q_j(f)(x)|},
\end{aligned}$$

điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
&\log \frac{\|f(x)\|^{qd} |W_F(x)|}{|P_1(f)(x)\ldots P_q(f)(x)|} \\
&\quad \leqslant d(M+1)\log\|f(x)\| + \log^+ \frac{|W_r(x)|}{\prod\limits_{j=1}^{n+1} |P_{i_j}(f)(x)| \prod\limits_{j=1}^{M-n} |Q_j(f)(x)|} + \log C \\
&\quad \leqslant d(M+1)\log\|f(x)\| \\
&\qquad + \sum_{\mathcal{R}\subset\{1,\ldots,q\}} \log^+ \frac{|W_{\mathcal{R}}(x)|}{\prod\limits_{j\in\mathcal{R}} |P_j(f)(x)| \prod\limits_{j=1}^{M-n} |Q_j(f)(x)|} + \log C, \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

trong đó $C = \alpha^{q-n-1}\beta^{M-n}/|C_1|$, tổng được lấy trên tất cả các tập con $\mathcal{R} \subset \{1, \ldots, q\}$ với $\#\mathcal{R} = n+1$ và

$$W_{\mathcal{R}} = W(P_j(j \in \mathcal{R}), Q_j(j = 1, \ldots, M-n)).$$

Đặt

$$S(x)=\sum_{\mathcal{R}\subset\{1,\dots,q\}}\log^{+}\frac{|W_{\mathcal{R}}(x)|}{\prod\limits_{j\in\mathcal{R}}|P_j(f)(x)|\prod_{j=1}^{M-n}|Q_j(f)(x)|},$$

do đó, từ (2.38) ta có

$$\log\frac{\|f(x)\|^{qd}|W_F(x)|}{|P_1(f)(x)\dots P_q(f)(x)|}\leqslant d(M+1)\log\|f(x)\| + S(x)+\log C. \tag{2.39}$$

Lập luận tương tự ở trên cho $y\in\Delta:|y|=1/r$, ta có

$$\log\frac{\|f(y)\|^{qd}|W_F(y)|}{|P_1(f)(y)\dots P_q(f)(y)|}\leqslant d(M+1)\log\|f(y)\| + S(y)+\log C. \tag{2.40}$$

Lấy tích phân hai vế (2.39), (2.40), cộng vế với vế, từ Mệnh đề 2.7, ta có

$$d(q-M-1)T_f(r)\leqslant\int_0^{2\pi}\big(S(re^{i\theta})+S(r^{-1}e^{i\theta})\big)\frac{d\theta}{2\pi} +\sum_{j=1}^{q}N_f(r,D_j)-N_0(r,\frac{1}{W_F})+O(1). \tag{2.41}$$

Từ Mệnh đề 2.10, ta có

$$\begin{aligned}\|\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}&\big(S(re^{i\theta})+S(r^{-1}e^{i\theta})\big)d\theta\\ &=\sum_{\mathcal{R}\subset\{1,\dots,q\}}m_0\Big(r,\frac{W_{\mathcal{R}}}{\prod\limits_{j\in\mathcal{R}}|P_j(f)|\prod_{j=1}^{M-n}|Q_j(f)|}\Big)\\ &=O_f(r).\end{aligned} \tag{2.42}$$

Bây giờ ta ước lượng $\sum_{j=1}^{q}N_f(r,D_j)-N_0(r,\frac{1}{W_F})$. Với mỗi $z_0\in\Delta_1$, tồn tại các số tự nhiên $\beta_j\geqslant 0$, $1\leqslant j\leqslant q$ và các hàm $g_j$ chỉnh hình, không triệt tiêu trong một lân cận $U$ của $z_0$ thỏa mãn

$$P_j(f)(z)=(z-z_0)^{\beta_j}g_j,$$

với $j=1,\dots,q$, trong đó $\beta_j=0$ nếu $P_j(f)$ không triệt tiêu tại $z_0$. Vì các siêu mặt $D_1,\dots,D_q$ ở vị trí tổng quát, tồn tại nhiều nhất $n$ chỉ số

$j \in \{1, \ldots, q\}$ thỏa mãn $\beta_j > 0$. Không mất tính tổng quát ta giả sử $\beta_j > 0$ với $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$ và $\beta_j = 0$ với $j > k$.

Đặt $\mathcal{R} = \{1, \ldots, n+1\}$ và

$$W_{\mathcal{R}} = W(P_1, \ldots, P_{n+1}, Q_1, \ldots, Q_{M-n}).$$

Khi đó tồn tại một hằng số khác không $C_2$ thỏa mãn $W_F = C_2.W_R$. Do đó ta có $W_F$ triệt tiêu tại $z_0$ với bậc ít nhất là

$$\sum_{j=1}^{k} \max\{0, \beta_j - M\} = \sum_{j=1}^{q} \max\{0, \beta_j - M\}.$$

Do đó

$$\sum_{j=1}^{q} N_{1,f}(r, D_j) - N_1(r, \frac{1}{W_F}) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_{1,f}^{M}(r, D_j).$$

Lập luận tương tự ta có

$$\sum_{j=1}^{q} N_{2,f}(r, D_j) - N_2(r, \frac{1}{W_F}) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_{2,f}^{M}(r, D_j).$$

Kéo theo

$$\sum_{j=1}^{q} N_f(r, D_j) - N_0(r, \frac{1}{W_F}) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f^{M}(r, D_j). \tag{2.43}$$

Kết hợp (2.41), (2.42) và (2.43) ta có

$$|| \quad d(q - M - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f^{M}(r, D_j) + O_f(r), \tag{2.44}$$

điều này kéo theo (2.32).

Tiếp theo ta xem xét trường hợp $d_1, \ldots, d_q$ là khác nhau. Gọi $d$ là bội số chung nhỏ nhất của các $d_1, \ldots, d_q$, ta đặt $P_j^* = P_j^{d/d_j}$ với mỗi $j \in \{1, \ldots, q\}$. Khi đó $P_1^*, \ldots, P_q^*$ có cùng bậc $d$. Đặt $D_j^*$ là siêu mặt định nghĩa bởi $P_j^*$ với $j = 1, \ldots, q$. Từ (2.44) ta có

$$|| \quad d(q - M - 1)T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} N_f^{M}(r, D_j^*) + O_f(r). \tag{2.45}$$

Chú ý rằng nếu $z \in \mathbb{C}$ là một không điểm của $P_j(f)$ với bội $\beta$ thì $z$ là một không điểm $P_j^{d/d_j}(f)$ với bội $\beta d/d_j$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} N_f^M(r, D_j^*) &= N_{1,f}^M(r, D_j^*) + N_{2,f}^M(r, D_j^*) \\ &\leqslant \frac{d}{d_j} N_{1,f}^M(r, D_j) + \frac{d}{d_j} N_{2,f}^M(r, D_j) = \frac{d}{d_j} N_f^M(r, D_j). \end{aligned}$$

Điều này kéo theo (2.32) từ (2.45). Như vậy định lý được chứng minh. □

**Nhận xét 2.1.** Với $R_1 < R_2$ là các số thực dương hoặc $R_1 = 0$, $R_2 = \infty$ và $z_0 \in \mathbb{C}$, kí hiệu

$$\Delta_0 = \{R_1 < |z - z_0| < R_2\} \tag{2.46}$$

là một hình vành khuyên trên $\mathbb{C}$. Bây giờ ta nghiên cứu phép biến hình biến vành khuyên xác định trong (2.46) thành hình vành khuyên định nghĩa bởi (2.26). Xét hai trường hợp cụ thể

*Trường hợp 1.* $R_1, R_2$ là các số thực dương, khi đó phép biến hình

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{R_2.R_1}}(z - z_0),$$

sẽ biến hình vành khuyên $\Delta_0$ thành $\Delta = \big\{\frac{1}{R_0} < |w| < R_0\big\}$, trong đó $R_0 = \sqrt{R_2/R_1}$.

*Trường hợp 2.* $R_1 = 0, R_2 = \infty$, khi đó phép biến hình

$$w(z) = z - z_0,$$

biến hình vành khuyên $\Delta_0$ thành $\Delta$, trong đó $R_0 = \infty$.

Như vậy, trong mọi trường hợp ta đều có thể biến đổi được hình vành khuyên xác định bởi (2.46) thành hình vành khuyên định nghĩa bởi (2.26). Do đó, định lý của chúng tôi vẫn có thể sử dụng được cho trường hợp đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên bất kỳ trong Nhận xét 2.1 với một số điều chỉnh về định nghĩa và phát biểu định lý.

# Kết luận Chương 2

Trong chương này chúng tôi đã xây dựng hai dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet và trường số phức. Cụ thể

1. Chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan-Nochka cho đường cong chỉnh hình không Acsimet với hàm đếm rút gọn kết hợp với siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát (Định lý 2.4).

2. Đưa ra một dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan với hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình trên một hình vành khuyên trong mặt phẳng phức kết hợp với các siêu mặt ở vị trí tổng quát (Định lý 2.13).

# Chương 3

# Định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên

Trong chương này chúng tôi chứng minh một số định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình, bao gồm một định lý duy nhất kiểu Chen-Yan và hai định lý kiểu Fujimoto. Các kết quả chính trong chương này viết dựa trên hai bài báo [3] và [4] trong Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án.

## 3.1. Định lý duy nhất kiểu Chen-Yan

Để chứng minh kết quả chính, chúng ta cần một số kết quả bổ trợ sau:

**Mệnh đề 3.1.** *Cho $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong đại số không suy biến tuyến tính và $D_1, D_2$ là các siêu mặt cùng bậc $d$. Khi đó,*

$$T_0\Big(r, \frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}\Big) \leqslant dT_f(r) + O(1), \tag{3.1}$$

*với mỗi $r$ thỏa mãn $1 < r < R_0$.*

*Chứng minh.* Ta có

$$\begin{aligned} T_0\Big(r, \frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}\Big) &= m_0\Big(r, \frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}\Big) + N_0\Big(r, \frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}\Big) + O(1) \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \log^+ \Big|\frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}(re^{i\theta})\Big|\frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \log^+ \Big|\frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}(r^{-1}e^{i\theta})\Big|\frac{d\theta}{2\pi} \\ &\quad + N_0\Big(r, \frac{1}{(f, D_2)}\Big) + O(1). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Từ Mệnh đề 2.7, ta có

$$N_0\left(r, \frac{1}{(f, D_2)}\right) \leqslant \int_0^{2\pi} \log|(f, D_2)(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \log|(f, D_2)(r^{-1}e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} + O(1). \tag{3.3}$$

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}(re^{i\theta})\right|\frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \log|(f, D_2)(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{|(f, D_1)(re^{i\theta})| + |(f, D_2)(re^{i\theta})|}{|(f, D_2)(re^{i\theta})|}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \log|(f, D_2)(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \log \frac{|(f, D_1)(re^{i\theta})| + |(f, D_2)(re^{i\theta})|}{|(f, D_2)(re^{i\theta})|}\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \log|(f, D_2)(re^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \log(|(f, D_1)(re^{i\theta})| + |(f, D_2)(re^{i\theta})|)\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\leqslant d\int_0^{2\pi} \log\max\{|f_0(re^{i\theta})|, \dots, |f_n(re^{i\theta})|\}\frac{d\theta}{2\pi} + O(1).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \log^+ \left|\frac{(f, D_1)}{(f, D_2)}(r^{-1}e^{i\theta})\right|\frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \log|(f, D_2)(r^{-1}e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} \\
&\leqslant d\int_0^{2\pi} \log\max\{|f_0(r^{-1}e^{i\theta})|, \dots, |f_n(r^{-1}e^{i\theta})|\}\frac{d\theta}{2\pi} + O(1).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Kết hợp (3.2), (3.3), (3.4) và (3.5) ta có (3.1). □

Với $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, ta đặt

$$T(r) = T_f(r) + T_g(r).$$

Với mỗi siêu mặt $D_j \in \mathcal{D}$, trong đó $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ các siêu mặt và số nguyên dương $\delta$, ta đặt

$$F_j(\delta) = \sum_{t=1}^{\delta-1}(\delta - t)\overline{N}_{f,=t}(r, D_j); \quad G_j(\delta) = \sum_{t=1}^{\delta-1}(\delta - t)\overline{N}_{g,=t}(r, D_j).$$

Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ là một họ gồm $q$ siêu mặt ở vị trí tổng quát. Ta kí hiệu bậc của siêu mặt $D_j$ là $d_j$ với mỗi $j = 1, \ldots, q$ và gọi $d$ là bội chung nhỏ nhất của các $d_j$. Kí hiệu $M = \binom{n+d}{d} - 1$. Định lý sau đây là một dạng định lý duy nhất kiểu Yan - Chen cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên được chúng tôi công bố năm 2023.

**Định lý 3.2.** *Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ là một họ gồm $q$ siêu mặt ở vị trí tổng quát và $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số thỏa mãn $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Giả sử rằng*

*a) $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ với mỗi $i \neq j \in \{1, \ldots, q\}$;*

*b) $\overline{E}_f(D_j) \subset \overline{E}_g(D_j)$ với mỗi $j = 1, 2, \ldots, q$ và $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D})$.*

*c) $\liminf\limits_{r \longrightarrow R_0} \sum_{j=1}^q N_f^1(r, D_j) / \sum_{j=1}^q N_g^1(r, D_j) > \dfrac{M}{M+1}$.*

*Nếu $q \geqslant 2M + 3$ thì tồn tại tập con $S \subset \{1, \ldots, q\}$ thỏa mãn $\#S > M + 1$ và*

$$\frac{(f, D_k)^{d/d_k}}{(f, D_l)^{d/d_l}} \equiv \frac{(g, D_k)^{d/d_k}}{(g, D_l)^{d/d_l}} \quad \text{với mọi } k \neq l \in S. \tag{3.6}$$

*Chứng minh.* Để chứng minh Định lý 3.2, ta cần các mệnh đề sau

**Mệnh đề 3.3.** *Với các điều kiện của Định lý 3.2 và giả thiết thêm $D_1, \ldots, D_q$ có cùng bậc $d$. Khi đó với mọi số $\delta > 0$ và với mọi $k \neq l \in \{1, \ldots, q\}$ thỏa mãn $\Phi = \dfrac{(f, D_k)}{(f, D_l)} - \dfrac{(g, D_k)}{(g, D_l)} \not\equiv 0$, ta có*

$$\begin{aligned} \delta N_f^1(r, D_k) + \delta N_f^1(r, D_l) &+ \sum_j N_f^1(r, D_j) \\ &\leqslant dT(r) + F_k(\delta) + F_l(\delta) + G_k(\delta) + G_l(\delta) + O(1), \end{aligned} \tag{3.7}$$

*trong đó $1 < r < R_0$ và tổng $\sum_j$ được lấy trên tất cả $j \in \{1, \ldots, q\} \backslash \{k, l\}$.*

*Chứng minh.* Trước hết ta chứng minh

$$\sum_{j\in\{1,\dots,q\}\setminus\{k,l\}} N_f^1(r,D_j)+N_f^\delta(r,D_k)-G_k(\delta)\leqslant N_0(r,\frac{1}{\Phi}). \tag{3.8}$$

Thật vậy, nếu $z_0 \in \bigcup_{j\in\{1,\dots,q\}\setminus\{k,l\}} \{z\in\Delta : (f,D_j)(z_0)=0\}$, thì từ $f(z)=g(z)$ với mỗi $z\in f^{-1}(D_j)$ và $f^{-1}(D_i)\cap f^{-1}(D_j)=\emptyset$ với mọi $i\neq j\in\{1,\dots,q\}$, ta có

$$(f,D_k)(z_0)=\lambda(g,D_k)(z_0)\neq 0,\quad (f,D_l)(z_0)=\lambda(g,D_l)(z_0)\neq 0.$$

Điều này kéo theo $\Phi(z_0)=0$.

Nếu $z_0\in\{z\in\Delta : (f,D_k)(z)=0\}\subset\{z\in\Delta : (g,D_k)(z)=0\}$, thì $\Phi(z_0)=0$ và $\nu_\Phi(z_0)\geqslant\min\{\nu_{(f,D_k)}(z_0),\nu_{(g,D_k)}(z_0)\}\geqslant 1$. Đặt

$$\alpha=\nu_{(f,D_k)}(z_0)\geqslant 1,\quad \beta=\nu_{(g,D_k)}(z_0)\geqslant 1.$$

Ta xem xét hai trường hợp có thể xảy ra:

*Trường hợp 1.* $1\leqslant\alpha\leqslant\delta-1$.

Nếu $\beta\geqslant\alpha$ thì $\nu_\Phi(z_0)\geqslant\min\{\alpha,\beta\}=\alpha=\min\{\alpha,\delta\}$.

Nếu $1\leqslant\beta<\alpha$ thì

$$\begin{aligned}\nu_\Phi(z_0)&\geqslant\min\{\alpha,\beta\}=\beta=\alpha-(\alpha-\beta)>\alpha-(\delta-\beta)\\&=\min\{\alpha,\delta\}-(\delta-\beta)\min\{\beta,1\}.\end{aligned}$$

*Trường hợp 2.* $\alpha\geqslant\delta$.

Nếu $\beta\geqslant\alpha$ thì $\nu_\Phi(z_0)\geqslant\min\{\alpha,\beta\}=\alpha\geqslant\min\{\alpha,\delta\}$.

Nếu $1\leqslant\beta<\alpha$ và $\beta\geqslant\delta$ thì

$$\nu_\Phi(z_0)\geqslant\min\{\alpha,\beta\}=\beta\geqslant\delta=\min\{\alpha,\delta\}.$$

Nếu $1\leqslant\beta<\alpha$ và $\beta<\delta$ thì

$$\begin{aligned}\nu_\Phi(z_0)&\geqslant\min\{\alpha,\beta\}=\beta=\delta-(\delta-\beta)\\&=\min\{\alpha,\delta\}-(\delta-\beta)\min\{\beta,1\}.\end{aligned}$$

Do đó ta có (3.8).

Tiếp theo ta chứng minh

$$N_0(r, \frac{1}{\Phi}) \leqslant T(r) - N_f^{\delta}(r, D_l) + G_l(\delta) + O(1). \tag{3.9}$$

Ta có

$$\begin{aligned} N_0(r, \frac{1}{\Phi}) &\leqslant T_0(r, \frac{1}{\Phi}) \\ &\leqslant T_0(r, \Phi) + O(1) = N_0(r, \Phi) + m_0(r, \Phi) + O(1). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} m_0(r, \Phi) &\leqslant m_0\left(r, \frac{(f, D_k)}{(f, D_l)}\right) + m_0\left(r, \frac{(g, D_k)}{(g, D_l)}\right) + O(1) \\ &\leqslant T_0\left(r, \frac{(f, D_k)}{(f, D_l)}\right) + T_0\left(r, \frac{(g, D_k)}{(g, D_l)}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{(f, D_l)}\right) \\ &\quad - N_0\left(r, \frac{1}{(g, D_l)}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Do đó từ Mệnh đề 3.1, ta có

$$m_0(r, \Phi) \leqslant dT(r) - N_0\left(r, \frac{1}{(f, D_l)}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{(g, D_l)}\right) + O(1).$$

Khi đó (3.10) trở thành

$$\begin{aligned} N_0(r, \frac{1}{\Phi}) &\leqslant dT(r) - N_0\left(r, \frac{1}{(f, D_l)}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{(g, D_l)}\right) \\ &\quad + N_0(r, \Phi) + O(1). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ta thấy rằng nếu $z_0 \in \Delta$ là một không điểm của $(f, D_l)$ hoặc $(g, D_l)$ thì $z_0$ là một cực điểm của $\Phi$ và

$$\nu_{\Phi}^{\infty}(z_0) \leqslant \max\{\nu_{(f,D_l)}(z_0), \nu_{(g,D_l)}(z_0)\},$$

trong đó $\nu_{\Phi}^{\infty}(z_0)$ là bậc của cực điểm của $\Phi$ tại $z_0$. Suy ra

$$\begin{aligned} \nu_{(f,D_l)}(z_0) + \nu_{(g,D_l)}(z_0) - \nu_{\Phi}^{\infty}(z_0) &\geqslant \nu_{(f,D_l)}(z_0) + \nu_{(g,D_l)}(z_0) \\ &\quad - \max\{\nu_{(f,D_l)}(z_0), \nu_{(g,D_l)}(z_0)\} \\ &= \min\{\nu_{(f,D_l)}(z_0), \nu_{(g,D_l)}(z_0)\}. \end{aligned}$$

Lập luận như chứng minh bất đẳng thức (3.8), ta có

$$N_0\left(r, \frac{1}{(f, D_l)}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{(g, D_l)}\right) - N_0(r, \Phi) \geqslant N_f^{\delta}(r, D_l) - G_l(\delta). \tag{3.12}$$

Kết hợp (3.11) và (3.12) ta có (3.9). Do đó từ (3.8) và (3.9), ta có

$$\begin{aligned}\sum_j N_f^1(r, D_j) + N_f^{\delta}(r, D_k) - G_k(\delta) \\ \leqslant d^*T(r) - N_f^{\delta}(r, D_l) + G_l(\delta) + O(1).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Chú ý rằng

$$N_f^{\delta}(r, D_k) = \delta N_f^1(r, D_k) - F_k(\delta); \quad N_f^{\delta}(r, D_l) = \delta N_f^1(r, D_l) - F_l(\delta),$$

do đó từ (3.13) ta có (3.7). Điều này kéo theo kết luận của mệnh đề. □

Ta tiếp tục chứng minh định lý chính. Gọi $Q_j$ là đa thức thuần nhất bậc $d_j$ định nghĩa $D_j$ với mỗi $j = 1, 2, \ldots, q$. Gọi $d$ là bội chung nhỏ nhất của các $d_1, d_2, \ldots, d_q$. Với $j = 1, 2, \ldots, q$, ta đặt $P_j = Q_j^{d/d_j}$ và đặt $D_j^*$ là siêu mặt bậc $d$ định nghĩa bởi $P_j$. Đặt

$$\mathcal{D}^* = \{D_1^*, D_2^*, \ldots, D_q^*\},$$

khi đó $\mathcal{D}^*$ là ở vị trí tổng quát.

Ta dễ thấy rằng nếu $f \equiv g$ thì $(f, D_j) \equiv (g, D_j)$ với mọi $j = 1, \ldots, q$, do đó ta có kết luận của định lý. Bây giờ ta xem xét trường hợp $f \not\equiv g$, khi đó tồn tại các chỉ số $\alpha, \beta \in \{0, \ldots, n\}$ sao cho $f_\alpha g_\beta \not\equiv f_\beta g_\alpha$. Từ định nghĩa $\mathcal{D}^*$ ta có $\overline{E}_f(\mathcal{D}^*) = \overline{E}_f(\mathcal{D})$ và $\overline{E}_g(\mathcal{D}^*) = \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Do đó từ giả thiết của Định lý 3.2 ta có $\overline{E}_f(D_i^*) \cap \overline{E}_f(D_j^*) = \emptyset$ với mỗi cặp $i \neq j \in \{1, \ldots, q\}$, $\overline{E}_f(D_j^*) \subset \overline{E}_g(D_j^*)$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, q$ và $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}^*)$.

Ta biết rằng nếu $z_0 \in \mathbb{C}$ là một không điểm của $(f, D_j^*)$, thì $z_0 \in \overline{E}_f(\mathcal{D}^*)$. Điều này kéo theo $g(z_0) = f(z_0)$, do đó

$$f_\alpha(z_0) g_\beta(z_0) = f_\beta(z_0) g_\alpha(z_0),$$

tức là $z_0$ là một không điểm của hàm $h = f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha$. Từ

$$\overline{E}_f(D_i^*) \cap \overline{E}_f(D_j^*) = \emptyset$$

với mỗi cặp $i \neq j \in \{1, \ldots, q\}$, ta suy ra $z_0$ không là không điểm của $(f, D_i^*)$ với mọi $i \in \{1, \ldots, q\},\ i \neq j$. Điều này kéo theo

$$\sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j^*) \leqslant N_0\big(r, \frac{1}{h}\big) + O(1),$$

với mỗi $r : 1 < r < R_0$.

Từ Mệnh đề 2.7 ta có

$$\begin{aligned}
N_0\big(r, \frac{1}{h}\big) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|(f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha)(re^{i\theta})|d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|(f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha)(r^{-1}e^{i\theta})|d\theta + O(1) \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big(2.\max_{j=0,\ldots,n}|f_j(re^{i\theta})|\max_{j=0,\ldots,n}|g_j(re^{i\theta})|\big)d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big(2.\max_{j=0,\ldots,n}|f_j(r^{-1}e^{i\theta})|\max_{j=0,\ldots,n}|g_j(r^{-1}e^{i\theta})|\big)d\theta \\
&\quad + O(1) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(\log\max_{j=0,\ldots,n}|f_j(re^{i\theta})|d\theta + \log\max_{j=0,\ldots,n}|g_j(re^{i\theta})|\big)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(\log\max_{j=0,\ldots,n}|f_j(r^{-1}e^{i\theta})|d\theta + \log\max_{j=0,\ldots,n}|g_j(r^{-1}e^{i\theta})|\big)d\theta \\
&\quad + O(1) \\
&= T_f(r) + T_g(r) + O(1).
\end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j) &= \sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j^*) \\
&\leqslant T_f(r) + T_g(r) = T(r) + O(1),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

trong đó $T(r) = T_f(r) + T_g(r)$.

Từ Mệnh đề 2.13, ta có

$$
\begin{aligned}
(q-M-1)T_f(r) &\leqslant \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{q} N_f^M(r,D_j^*) + O_f(r)\\
&= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{q}\Big(MN_f^1(r,D_j^*) - \sum_{k=1}^{M-1}(M-k)\overline{N}_{f,=k}(r,D_j^*)\Big)\\
&\quad + O_f(r). \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Tương tự cho đường cong $g$, ta có

$$
\begin{aligned}
(q-M-1)T_g(r) &= \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{q}\Big(MN_g^1(r,D_j^*) - \sum_{k=1}^{M-1}(M-k)\overline{N}_{g,=k}(r,D_j^*)\Big)\\
&\quad + O_g(r). \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

Với mỗi $j \in \{1,2,\ldots,q\}$, ta đặt

$$F_j(M) = \sum_{k=1}^{M-1}(M-k)\overline{N}_{f,=k}(r,D_j^*);\quad G_j(M) = \sum_{k=1}^{M-1}(M-k)\overline{N}_{g,=k}(r,D_j^*).$$

Khi đó từ (3.15) và (3.16) ta có

$$
\begin{aligned}
d(q-M-1)T(r) \leqslant & M\sum_{j=1}^{q} N_f^1(r,D_j^*) + M\sum_{j=1}^{q} N_g^1(r,D_j^*) \qquad (3.17)\\
& - \sum_{j=1}^{q}\big(F_j(M)+G_j(M)\big) + o(T(r)).
\end{aligned}
$$

Giả sử phản chứng rằng Khẳng định (3.6) không đúng. Bằng việc sắp xếp lại dãy các chỉ số ta có thể giả thiết rằng

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}_1^* \cup \mathcal{D}_2^* \cup \cdots \cup \mathcal{D}_k^*,$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}_1^* = \{D_1^*,\ldots,D_{s_1}^*\},\ \mathcal{D}_2^* = \{D_{s_1+1}^*,\ldots,D_{s_2}^*\}\\
&\ldots,\ \mathcal{D}_k^* = \{D_{s_{k-1}+1}^*,\ldots,D_{s_k}^*\}, s_k = q,
\end{aligned}
$$

thỏa mãn

$$\frac{(f,D_k^*)}{(g,D_k^*)} \equiv \frac{(f,D_l^*)}{(g,D_l^*)}$$

nếu $D_k^*, D_l^* \in \mathcal{D}_j^*, 1 \leqslant j \leqslant k$ và

$$\frac{(f, D_k^*)}{(g, D_k^*)} \not\equiv \frac{(f, D_l^*)}{(g, D_l^*)}$$

nếu $D_k^*, D_l^*$ thuộc các nhóm khác nhau. Khẳng định (3.6) không đúng nên số siêu mặt ở trong mỗi nhóm $\mathcal{D}_j^*$ nhiều nhất là $M+1$. Ta định nghĩa ánh xạ $p : \{1, \ldots, q\} \longrightarrow \{1, \ldots, q\}$ bởi

$$p(i) = \begin{cases} i + M + 1, & \text{nếu } i + M + 1 \leqslant q, \\ i + M + 1 - q, & \text{nếu } i + M + 1 > q. \end{cases}$$

Khi đó $p$ là song ánh. Với mỗi $i \in \{1, \ldots, q\}$, ta có $|p(i) - i| \geqslant M + 1$ vì $q > 2M + 2$. Điều này kéo theo $D_i^*$ và $D_{p(i)}^*$ thuộc hai nhóm khác nhau, do đó

$$\Phi_i = \frac{(f, D_i^*)}{(f, D_{p(i)}^*)} - \frac{(g, D_i^*)}{(g, D_{p(i)}^*)} \not\equiv 0.$$

Từ Mệnh đề 3.3, ta có

$$\begin{aligned} MN_f^1(r, D_i^*) + MN_f^1(r, D_{p(i)}^*) + \sum_{j \in \{1,\ldots,q\} \setminus \{i, p(i)\}} N_f^1(r, D_j^*) \\ \leqslant dT(r) + F_i(M) + F_{p(i)}(M) + G_i(M) + G_{p(i)}(M) + O(1). \quad (3.18) \end{aligned}$$

Lấy tổng của (3.18) trên tất cả các chỉ số $i \in \{1, \ldots, q\}$, ta có

$$\begin{aligned} M \sum_{i=1}^q \big(N_f^1(r, D_i^*) + N_f^1(r, D_{p(i)}^*)\big) + (q-2) \sum_{j=1}^q N_f^1(r, D_j^*) \\ \leqslant \sum_{i=1}^q \big(F_i(M) + F_{p(i)}(M) + G_i(M) + G_{p(i)}(M)\big) \\ + qdT(r) + O(1). \quad (3.19) \end{aligned}$$

Vì $p$ là song ánh nên (3.19) được viết lại như sau

$$(q + 2M - 2) \sum_{j=1}^q N_f^1(r, D_j^*) \leqslant qdT(r) + 2 \sum_{j=1}^q \big(F_j(M) + G_j(M)\big) + O(1).$$

Điều này kéo theo

$$\frac{q+2M-2}{2}\sum_{j=1}^{q}N_f^1(r,D_j^*)-\frac{qd}{2}T(r)+O(1)$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{q}\big(F_j(M)+G_j(M)\big). \qquad (3.20)$$

Từ (3.17) và (3.20) ta có

$$d(q-M-1)T(r)\leqslant M\sum_{j=1}^{q}N_f^1(r,D_j^*)+M\sum_{j=1}^{q}N_g^1(r,D_j^*)$$
$$-\frac{q+2M-2}{2}\sum_{j=1}^{q}N_f^1(r,D_j^*)+\frac{qd}{2}T(r)+o(T(r)).$$

Điều này kéo theo

$$\frac{d(q-2M-2)}{2}T(r)\leqslant\frac{2-q}{2}\sum_{j=1}^{q}N_f^1(r,D_j^*)$$
$$+M\sum_{j=1}^{q}N_g^1(r,D_j^*)\big)+o(T(r)). \qquad (3.21)$$

Chú ý rằng

$$N_f^1(r,D_j^*)=N_f^1(r,D_j);\quad N_g^1(r,D_j^*)=N_g^1(r,D_j),$$

nên (3.21) trở thành

$$\frac{d(q-2M-2)}{2}T(r)\leqslant\frac{2-q}{2}\sum_{j=1}^{q}N_f^1(r,D_j)$$
$$+M\sum_{j=1}^{q}N_g^1(r,D_j)\big)+o(T(r)). \qquad (3.22)$$

Kết hợp (3.14) và (3.22) ta có

$$\frac{d(q-2M-2)}{2}\sum_{j=1}^{q}N_f^1(r,D_j)$$
$$\leqslant\frac{2-q}{2}\sum_{j=1}^{q}N_f^1(r,D_j)+M\sum_{j=1}^{q}N_g^1(r,D_j)\big)+o(T(r)).$$

từ $q > 2M + 2$, nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j) \leqslant \frac{2M}{(d+1)q - 2Md - 2d - 2} \sum_{j=1}^{q} N_g^1(r, D_j) + o(T(r)).$$

Điều này kéo theo

$$\liminf_{r\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j) / \sum_{j=1}^{q} N_g^1(r, D_j) \leqslant \frac{2M}{(d+1)q - 2Md - 2d - 2}.$$

Nếu ta lấy $q \geqslant 2M + 3$ thì

$$\liminf_{r\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j) / \sum_{j=1}^{q} N_g^1(r, D_j) \leqslant \frac{2M}{2M+2} = \frac{M}{M+1}.$$

Mẫu thuẫn với giả thiết của định lý. Như vậy Khẳng định (3.6) đúng và định lý được chứng minh. $\square$

## 3.2. Định lý duy nhất kiểu Fujimoto

Để chứng minh kết quả chính, trước hết chúng tôi giới thiệu thêm một số kiến thức về hàm đếm và một dạng định lý cơ bản thứ hai sử dụng cho chứng minh các định lý. Cho $f$ là một đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên $\Delta$, $D$ là một siêu mặt và $Q$ là một đa thức thuần nhất định nghĩa $D$. Với mỗi số thực $r : 1 < r < R_0$, với các số nguyên dương $k$ và $\alpha$, ta định nghĩa

$$n_{1,f}^{\alpha}(r, D, \leqslant k) = \sum_{z\in\Delta_{1,r}, 0<\mathrm{ord}_{Q(f)}(z)\leqslant k} \min\{\mathrm{ord}_{Q(f)}(z), \alpha\},$$
$$n_{2,f}^{\alpha}(r, D \leqslant k) = \sum_{z\in\Delta_{2,r}, 0<\mathrm{ord}_{Q(f)}(z)\leqslant k} \min\{\mathrm{ord}_{Q(f)}(z), \alpha\}$$

và

$$N_{1,f}^{\alpha}(r, D, \leqslant k) = \int_{r^{-1}}^{1} \frac{n_{1,f}^{\alpha}(t, D, \leqslant k)}{t} dt,$$
$$N_{2,f}^{\alpha}(r, D, \leqslant k) = \int_{1}^{r} \frac{n_{2,f}^{\alpha}(t, D, \leqslant k)}{t} dt.$$

Ta đặt

$$N^{\alpha}_{f,\leqslant k}(r,D)=N^{\alpha}_{f}(r,D,\leqslant k):=N^{\alpha}_{1,f}(r,D,\leqslant k)+N^{\alpha}_{2,f}(r,D,\leqslant k).$$

Tương tự ta kí hiệu

$$n^{\alpha}_{1,f}(r,D,\geqslant k)=\sum_{z\in\Delta_{1,r},\mathrm{ord}_{Q(f)}(z)\geqslant k}\min\{\mathrm{ord}_{Q(f)}(z),\alpha\},$$
$$n^{\alpha}_{2,f}(r,D\geqslant k)=\sum_{z\in\Delta_{2,r},\mathrm{ord}_{Q(f)}(z)\geqslant k}\min\{\mathrm{ord}_{Q(f)}(z),\alpha\}.$$

Ta định nghĩa

$$N^{\alpha}_{1,f}(r,D,\geqslant k)=\int_{r^{-1}}^{1}\frac{n^{\alpha}_{1,f}(t,D,\geqslant k)}{t}dt,$$
$$N^{\alpha}_{2,f}(r,D,\geqslant k)=\int_{1}^{r}\frac{n^{\alpha}_{2,f}(t,D,\geqslant k)}{t}dt.$$

Đặt

$$N^{\alpha}_{f,\geqslant k}(r,D)=N^{\alpha}_{f}(r,D,\geqslant k):=N^{\alpha}_{1,f}(r,D,\geqslant k)+N^{\alpha}_{2,f}(r,D,\geqslant k).$$

Dễ dàng thấy rằng

$$N^{\alpha}_{f}(r,D)=N^{\alpha}_{f}(r,D,\leqslant k)+N^{\alpha}_{f}(r,D,\geqslant k+1)$$

đúng với mọi số $\alpha$ và $k$.

Mệnh đề sau là một dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình được H.T. Phuong và L. Vilaisavanh chứng minh năm 2022, cần thiết cho việc chứng minh các dạng định lý duy nhất trong phần này.

**Mệnh đề 3.4** ([41]). *Cho $f:\Delta\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số, và $D_j, 1\leqslant j\leqslant q$, là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ bậc $d_j$ ở vị trí tổng quát. Gọi $d$ là bội chung nhỏ nhất của các số $d_1,d_2,\ldots,d_q$. Với $0<\varepsilon<1$ và*

$$\alpha\geqslant\big(d[(n+1)^2 2^n)\varepsilon^{-1}]+1\big)^n.$$

*Khi đó với mỗi $1<r<R$, ta có*

$$\|\quad (q-(n+1)-\varepsilon)T_f(r)\leqslant\sum_{j=1}^{q}d_j^{-1}N^{\alpha}_{f}(r,D_j)+O_f(r).$$

Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q$ siêu mặt ở vị trí tổng quát. Với mỗi $j = 1, \dots, q$, kí hiệu $d_j$ là bậc của $D_j$ và gọi $d$ là bội chung nhỏ nhất của các $d_j$. Đặt $\delta_{\mathcal{D}} := \min\{d_1, \dots, d_q\}$ và $M = (d(n+1)^2 2^{n+1} + 1)^n$. Hai định lý sau là các dạng định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên kiểu Fujimoto.

**Định lý 3.5.** *Cho $f$ và $g$ là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ $\Delta$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Gọi $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n+1+2Mn/\delta_{\mathcal{D}}$ các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.*

*Chứng minh.* Giả sử phản chứng rằng $f \not\equiv g$, khi đó tồn tại các chỉ số $l, t \in \{0, \dots, n\}$, $l \neq t$ thỏa mãn $f_l g_t \not\equiv f_t g_l$. Gọi $d_j$ là bậc của siêu mặt $D_j$, $j = 1, \dots, q$ và gọi $d$ là bội số chung nhỏ nhất của các $d_j$. Gọi $k$ là một số nguyên dương đủ lớn, ta sẽ chọn sau. Với các giả thiết của Định lý 3.5, ta có

$$\begin{aligned}
N_f^M(r, D_j) &= N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + N_f^M(r, D_j, > k) \\
&= \frac{k}{k+1} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + \frac{1}{k+1} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) \\
&\quad + N_f^M(r, D_j, > k) \\
&\leqslant \frac{k}{k+1} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + \frac{M}{k+1} N_f^1(r, D_j, \leqslant k) \\
&\quad + M N_f^1(r, D_j, > k) \\
&\leqslant \frac{k}{k+1} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + \frac{M}{k+1} N_f^1(r, D_j, \leqslant k) \\
&\quad + \frac{M}{k+1} N_f(r, D_j, > k) \\
&\leqslant \frac{k}{k+1} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + \frac{M}{k+1} N_f(r, D_j, \leqslant k) \\
&\quad + \frac{M}{k+1} N_f(r, D_j, > k) \\
&= \frac{k}{k+1} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + \frac{M}{k+1} N_f(r, D_j).
\end{aligned}$$

Do $N_f(r, D_j) \leqslant d_j T_f(r)$ nên ta có

$$N_f^M(r, D_j) \leqslant \frac{k}{k+1} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + \frac{M d_j}{k+1} T_f(r) + O(1),$$

từ đó ta có

$$\frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j) \leqslant \frac{k}{d_j(k+1)} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + \frac{M}{k+1} T_f(r) + O(1).$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j) \leqslant \frac{k}{k+1} & \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) \\ & + \frac{qM}{k+1} T_f(r) + O(1). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Mặt khác, từ Mệnh đề 3.4 với $\varepsilon = 1/2$, ta có

$$(q - n - \frac{3}{2}) T_f(r) \leqslant \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j) + O_f(r). \tag{3.24}$$

Kết hợp (3.23) và (3.24) ta có

$$\Big(q - \frac{qM}{k+1} - n - \frac{3}{2}\Big) T_f(r) \leqslant \frac{k}{k+1} \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + O_f(r).$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \big(q(k+1-M) & - (n + \frac{3}{2})(k+1)\big) T_f(r) \\ & \leqslant k \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d_j} N_f^M(r, D_j, \leqslant k) + O_f(r) \\ & \leqslant Mk \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{d_j} N_f^1(r, D_j, \leqslant k) + O_f(r) \\ & \leqslant \frac{Mk}{\delta} \sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j, \leqslant k) + O_f(r). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Giả sử $z_0 \in \Delta$ là một không điểm của $D_j \circ f$ với bội lớn hơn hay bằng $k$, khi đó $z_0 \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Điều này kéo theo $g(z_0) = f(z_0)$, do đó

$$f_l(z_0) g_t(z_0) = f_t(z_0) g_l(z_0),$$

tức là $z_0$ là một không điểm của hàm $h = f_l g_t - f_t g_l$. Chú ý rằng, từ giả thiết họ các siêu mặt $\mathcal{D}$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nên tồn tại nhiều nhất là $n$ siêu mặt $D_j$ trong $\mathcal{D}$ thỏa mãn $D_j \circ f(z_0) = 0$. Điều này kéo theo

$$\sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j, \leqslant k) \leqslant nN_0\Big(r, \frac{1}{h}\Big).$$

Vì $h$ là một hàm chỉnh hình nên từ Mệnh đề 2.7 ta có

$$\begin{aligned}
N_0\Big(r, \frac{1}{h}\Big) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|(f_l g_t - f_t g_l)(r^{-1}e^{i\theta})|d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|(f_l g_t - f_t g_l)(re^{i\theta})|d\theta + O(1) \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big(2.\max_{j=0,\dots,n}|f_j(r^{-1}e^{i\theta})| \max_{j=0,\dots,n}|g_j(r^{-1}e^{i\theta})|\big)d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\big(2.\max_{j=0,\dots,n}|f_j(re^{i\theta})| \max_{j=0,\dots,n}|g_j(re^{i\theta})|\big)d\theta + O(1) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(\log\max_{j=0,\dots,n}|f_j(r^{-1}e^{i\theta})|d\theta + \log\max_{j=0,\dots,n}|g_j(r^{-1}e^{i\theta})|\big)d\theta \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(\log\max_{j=0,\dots,n}|f_j(re^{i\theta})|d\theta + \log\max_{j=0,\dots,n}|g_j(re^{i\theta})|\big)d\theta + O(1) \\
&= T_f(r) + T_g(r) + O(1).
\end{aligned}$$

Bởi vậy (3.25) trở thành

$$\begin{aligned}
\big(q(k+1-M) - (n+\frac{3}{2})(k+1)\big)T_f(r) \\
\leqslant \frac{nMk}{\delta}(T_f(r) + T_g(r)) + O_f(r).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Tương tự cho ánh xạ $g$ ta có

$$\begin{aligned}
\big(q(k+1-M) - (n+\frac{3}{2})(k+1)\big)T_g(r) \\
\leqslant \frac{nMk}{\delta}(T_f(r) + T_g(r)) + O_f(r).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Kết hợp hai bất đẳng thức (3.26) và (3.27) ta có

$$\begin{aligned}
\big(q(k+1-M) - (n+\frac{3}{2})(k+1)\big)(T_f(r) + T_g(r)) \\
\leqslant \frac{2nMk}{\delta}(T_f(r) + T_g(r)) + O_f(r) + O_g(r).
\end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$q(k+1-M)-(n+\frac{3}{2})(k+1)-\frac{2Mnk}{\delta}\leqslant\frac{O_f(r)+O_g(r)}{T_f(r)+T_g(r)}$$

đúng với mọi số thực $r$ đủ lớn. Cho $r\longrightarrow\infty$ ta có

$$q(k+1-M)-(n+\frac{3}{2})(k+1)-\frac{2Mnk}{\delta}\leqslant 0.$$

Điều này tương đương với

$$k(q\delta-(n+\frac{3}{2})\delta-2Mn)+(q-qM-(n+\frac{3}{2}))\delta\leqslant 0. \tag{3.28}$$

Nếu ta lấy

$$k>\frac{(qM-q+n+\frac{3}{2})\delta}{q\delta-(n+\frac{3}{2})\delta-2nM},$$

thì từ giả thiết $q\geqslant n+2+\dfrac{2nM}{\delta}$ ta sẽ có mẫu thuẫn. Như vậy $f_ig_j\equiv f_jg_i$ với mọi $i\neq j\in\{0,\ldots,n\}$, tức là $f\equiv g$. Điều này kéo theo kết luận của định lý. □

**Định lý 3.6.** *Cho $f$ và $g$ là các đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ $\Delta$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ thỏa mãn $O_f(r)=o(T_f(r))$ và $O_g(r)=o(T_g(r))$. Gọi $\mathcal{D}=\{D_1,\ldots,D_q\}$ là một họ gồm $q>n+1+2M/\delta_{\mathcal{D}}$ siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho*

(a) *$f(z)=g(z)$ với mọi $z\in\overline{E}_f(\mathcal{D})\cup\overline{E}_g(\mathcal{D})$,*

(b) *$\overline{E}_f(D_i)\cap\overline{E}_f(D_j)=\emptyset$ và $\overline{E}_g(D_i)\cap\overline{E}_g(D_j)=\emptyset$ với mọi $i\neq j\in\{1,\ldots,q\}$.*

*Khi đó $f\equiv g$.*

*Chứng minh.* Ta cũng giả thiết phản chứng là $f\not\equiv g$. Giống như trong chứng minh định lý trên, tồn tại hai chỉ số $l,t\in\{0,\ldots,n\}$, $l\neq t$ thỏa mãn $f_lg_t-f_tg_l\not\equiv 0$. Cho $k$ là một số nguyên dương đủ lớn, ta sẽ chọn sau.

Với các giả thiết của Định lý 3.6 và chứng minh của Định lý 3.5 ta có:

$$\big(q(k+1-M)-(n+\frac{3}{2})(k+1)\big)T_f(r) \leqslant \frac{Mk}{\delta}\sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j, \leqslant k) + O_f(r). \tag{3.29}$$

Ta biết rằng, nếu $z_0 \in \Delta$ là một không điểm của $D_j \circ f$ với bội nhỏ hơn hay bằng $k$ thì $z_0$ là không điểm của hàm $f_l g_t - f_t g_l$. Theo giả thiết ta có

$$\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$$

với mỗi cặp $i \neq j \in \{1, \ldots, q\}$. Do đó nếu $z_0$ là một không điểm của $D_j \circ f$ thì $z_0$ không là không điểm của $D_i \circ f$ với mọi $i \neq j \in \{1, \ldots, q\}$. Do đó

$$\sum_{j=1}^{q} N_f^1(r, D_j, \leqslant k) \leqslant N_0\Big(r, \frac{1}{f_l g_t - f_t g_l}\Big) \leqslant T_f(r) + T_g(r) + O_f(r).$$

Bởi vậy (3.29) trở thành

$$\big(q(k+1-M)-(n+\frac{3}{2})(k+1)\big)T_f(r) \leqslant \frac{Mk}{\delta}(T_f(r) + T_g(r)) + O_f(r). \tag{3.30}$$

Tương tự cho ánh xạ $g$, ta có

$$\big(q(k+1-M)-(n+\frac{3}{2})(k+1)\big)T_g(r) \leqslant \frac{Mk}{\delta}(T_f(r) + T_g(r)) + O_g(r). \tag{3.31}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (3.30) và (3.31) ta có

$$\big(q(k+1-M)-(n+\frac{3}{2})(k+1)\big)(T_f(r) + T_g(r)) \leqslant \frac{2Mk}{\delta}(T_f(r) + T_g(r)) + O_f(r) + O_g(r).$$

Điều này kéo theo

$$q(k+1-M) - (n+\frac{3}{2})(k+1) - \frac{2Mk}{\delta} \leqslant \frac{O_f(r) + O_g(r)}{T_f(r) + T_g(r)}$$

đúng với mọi số thực $r$ đủ lớn. Cho $r \longrightarrow \infty$ ta có

$$q(k+1-M)-(n+\frac{3}{2})(k+1)-\frac{2Mk}{\delta}\leqslant 0.$$

Điều này kéo theo

$$k(q\delta-(n+\frac{3}{2})\delta-2M)+(q-qM-(n+\frac{3}{2}))\delta\leqslant 0. \tag{3.32}$$

Nếu ta lấy

$$k>\frac{(qM-q+n+\frac{3}{2})\delta}{q\delta-(n+\frac{3}{2})\delta-2M},$$

thì từ giả thiết $q\geqslant n+2+\dfrac{2M}{\delta}$ ta có mâu thuẫn. Như vậy $f_ig_j\equiv f_jg_i$ với mọi $i\neq j\in\{0,\ldots,n\}$, tức là $f\equiv g$. Định lý được chứng minh. $\square$

# Kết luận Chương 3

Với mục đích nghiên cứu một số dạng định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, trong chương này tôi đã thu được một số kết quả chính sau:

1. Chứng minh một dạng định lý duy nhất kiểu Chen-Yan cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt (Định lý 3.2).

2. Chứng minh hai định lý duy nhất kiểu Fujimoto đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt (các định lý 3.5 và 3.6).

# Kết luận

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu một số dạng Định lý cơ bản với hàm đếm rút gọn hay hàm đếm bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình trên hình trên trường $\mathbb{W}$ và vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

**Các kết quả chính của luận án bao gồm:**

1. Chứng minh hai dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên trường không Acsimet với hàm đếm rút gọn trong hai trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát (Định lý 1.7) và ở vị trí dưới tổng quát (Định lý 2.4).

2. Xây dựng một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên trường phức $\mathbb{C}$ trong trường hợp đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên không suy biến đại số với hàm đếm bội cắt cụt kết hợp với các siêu mặt ở vị trí tổng quát (Định lý 2.13).

3. Đưa ra ba định lý mới về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát (các định lý 3.2, 3.5, 3.6).

**Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo:**

1. Nghiên cứu một số Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình với rút gọn trong các trường hợp khác nhau của mục tiêu.

2. Sử dụng các kết quả về các dạng Định lý cơ bản thứ hai với rút gọn để nghiên cứu vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình.

## Danh mục Công trình của tác giả liên quan đến luận án

1. Phuong H. T., Hung B. T., Padaphet I. (2023), A version of Cartan-Nochka's theorem for non-Archimedean holomorphic curves with integrated reduced counting functions, *Submitted*.

2. Phuong H. T., Ninh, L. Q., Padaphet I., (2019), On the Nevanlinna-Cartan Second Main Theorem for non-Archimedean Holomorphic Curves, *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, Vol. 11, No. 4, pp. 299 - 306.

3. Phuong H. T., Padaphet I. (2023), A uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing hypersurface, *Accepted to Complex Variables and Elliptic Equations,* Doi: 10.1080/17476933.2023.2234830.

4. Phuong H. T., Padaphet I., Ninh, L. Q., (2022), Some uniqueness theorems for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces in general position, *East-West J. of Mathematics*, Vol. 23, No 2, pp. 100-111.

# Tài liệu tham khảo


[1] Aihara. Y (2000), Unicity theorems for meromorphic mappings with deficiencies, *Complex Variables*, 42, 259-268.

[2] An T. T., Phuong H. T. (2009), An explicit estimate on multiplicity truncation in the second main theorem for holomorphic curves encountering hypersurfaces in general position in projective space, *Houston Journal of Mathematics*, Vol. 35, No.3, pp. 774-786.

[3] An D. P., Quang S. D. and Thai D. D. (2013), The second main theorem for meromorphic mappings into a complex projective space, *Acta. Math. Vietnam.*, Vol.38, 187-205.

[4] Anderson J. M., Hinkkanen, A. (2014), A new counting function for the zeros of holomorphic curves, *Analysis and Mathematical Physics*, Vol. 4, Issu. 1-2, pp. 35-62.

[5] Cao T. B. and Yi H. X. (2011), Uniqueness theorems for meromorphic mappings sharing hyperplanes ingeneral position, *Sci. China Math.*, Vol. 41, Iss. 2, 135-144.

[6] Cartan H. (1933), Sur les zeros des combinaisions linearires de p fonctions holomorpes donnees, *Mathematica (Cluj)*, 7, pp. 80-103.

[7] Chuang C. T. (1987), On differential polynomials, *Analysis of One Complex Variable, World Sci. Publishing, Singapore*, pp. 12-32.

[8] Chen Z. H., Yan Q. M. (2010), A note on uniqueness problem for meromorphic mapping with 2N+3 hyperplanes, *Sci. Chaina Math*, Vol. 53, No. 10, pp. 2657-2663.

[9] Corvaja P., Zannier U. M. (2004), On a general Thue's equation, *Amer. J. Math* 126, pp. 1033-1055.

[10] Dethloff G., Tan T. V. (2006), An extension of uniqueness theorems for meromorphic mappings, *Vietnam Journal of Mathematics, 34,* no. 1, 71-94.

[11] Dethloff G., Tan T. V. (2009), Uniqueness theorems for meromorphic mappings with few hyperplanes, *Bull. des Sci. Math.*, 133, pp. 501-514.

[12] Dethloff G., Tan T. V., Thai, D. D. (2011), An Extension of the Cartan-Nochka Second Main Theorem for Hypersurfaces, *Inte. Jour. of Mathematics*, Vol. 22, No. 06, pp. 863-885.

[13] Dulock M., Ru M. (2008) A uniqueness theorem for holomorphic curves sharing hypersurfaces *Complex Variables and Elliptic Equations. 53*, No. 8, 797-802.

[14] Fujimoto H. (1975), The uniqueness problem of meromorphic maps in to complex projective space,*I, Nagoya Math. J*, 58, pp. 1-23.

[15] Fujimoto H. (1976), The uniqueness problem of algebraically non-degenerate meromorphic maps in to $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$,*I, Nagoya Math. J*, 64, pp. 117-147.

[16] Fujimoto H. (1998), Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory, *Nagoya Math. J. 152*, pp. 131-152.

[17] Giang H. H. (2021), Uniqueness Theorem for Holomorphic Mappings on Annuli Sharing Few Hyperplanes, *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, Vol. 73, no. 2, Feb. 2021, pp. 249 -60.

[18] Gundersen G. G., Yang L. Z. (1998), Entire functions that share one value with one or two of their derivatives, *J. Math. Anal. Appl*, 223, pp. 88-95.

[19] Hayman W. K. (1964), Meromorphic Functions, *Clarendon Press, Oxford.*

[20] Hinchliffe J. D. (2002), On a result of Chuang related to Hayman's Alternative, *Comput. Method. Funct. Theory*, 2, pp. 293-297.

[21] Hu P. C., Yang C. C. (2000), Meromorphic Functions over Non-Archimedean Fields, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.*

[22] Hu P. C., Li P., Yang C. C. (2003), Unicity of meromorphic mappings, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.*

[23] Hu P. C., Thin N. V. (2021), Difference analogue of second main theorems for meromorphic mapping into algebraic variety, *Analysis Mathematica*, Vol. 47, pp 811-842.

[24] Khrystiyanyn A. Y., Kondratyuk A. A. (2005), On the Nevanlinna theory for meromorphic function on Annuli I, *Matematychni Studii*, Vol. 23, No. 1, pp. 19-30.

[25] Khrystiyanyn A. Y., Kondratyuk A. A. (2005), On the Nevanlinna theory for meromorphic function on Annulus II , *Matematychni Studii*, Vol. 24, pp. 57-68.

[26] Khoai. H. H. and Tu. M. V. (2005), $p$-adic Nevanlinna Cartan theorem, *Inter. J. Math.*, **6** (5) pp 719-731 (1995).

[27] Korhonen R. (2004), Nevanlinna Theory in an Annulus, *in Book: Value Distribution Theory and Related Topics*, pp 167-179.

[28] Lang S. (1987), Introduction to Complex Hyperbolic spaces, *Springer - Verlag, New York, Berlin - Heidelberg.*

[29] Laine I. (1993), Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, *Walter de Gruyter, Berlin, New York.*

[30] Li X. M., Cao C. C. (2008), Entire functions sharing one polynomial with their derivatives, *Proc Indian Acad Sci Math Sci* 118, pp: 13–26.

[31] Lund M. E., Ye Z. (2009), Logarithmic derivatives in annuli, *J. Math. Anal. Appl.*356, pp. 441-452.

[32] Lund M. E., Ye Z. (2010), "Nevanlinna theory of meromorphic functions on annuli," *Sci. China Math.*53, pp. 547-554.

[33] Nochka I. E. (1983), On the theory of meromorphic functions, *Soviet Math Dokl,* 27: 377-381.

[34] Noguchi J. (2005), A note on entire pseudo-holomorphic curves and the proof of Cartan-Nochka's theorem", Kodai Math. J. 28, 336-346.

[35] Phuong H. T. (2009), On unique range sets for holomorphic maps sharing hypersurfaces without counting multiplicity, *Acta Math. Vietnamica*, Vol. 34, No. 3, 351–360.

[36] Phuong H. T. (2011), On Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing hypersurfaces without counting multiplicity, *Ukranian Math. Journal*, Volume 63, Number 4, pp. 556 - 565.

[37] Phuong H. T. (2013), uniqueness theorems for holomorphic curves sharing moving hypersurfaces, *Complex variable and Elliptic Equations*, Vol. 58, No. 11, 1481–1491.

[38] Phuong H. T., Minh T. H. (2013), A Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing $2n + 3$ hypersurfaces, *Viet Nam journal of Math,* Vol. 41, No. 11, 167–179.

[39] Phuong H. T., Thin N. V. (2015), On fundamental theorems for holomorphic curves on Annuli, *Ukrainian Math. Jour.,* Vol. 67, No. 07, 1027–1040.

[40] Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2021), Some uniqueness theorems for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces, *Complex variable and Elliptic Equations*, Vol. 66 (1), pp.22-34.

[41] Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2022), On fundamental theorems for holomorphic curves on an annulus intersecting hypersurfaces, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 48, pp. 151-163.

[42] Ru M. (2004), A defect relation for holomorphic curves intersecting hypersurfaces, *American. Journal of Mathematics*, Vol. 126, no. 1, pp. 2015-226.

[43] Ru M. (2009), Holomorphic curves into algebraic varieties, *Annals of Mathematics*, Vol. 169, 255–267.

[44] Ru M., Wang J. T-Y. (2004), Truncated second main theorem with moving targets, *American Mathematical Society*, Vol.356, no. 2, pp. 557-571.

[45] Shi L. (2020), Degenerated second main theorem for holomorphic curves into algebraic varieties, *International Journal of Mathematics*, Vol. 31, No. 06, 2050042.

[46] Smiley L. (1983), Geometric conditions for unicity of holomorphic curves, *Value distribution theory and its applications New York* , pp. 149–154,

[47] Thai D. D., Quang S. D. (2006), Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variable, Intern. J. Math. 17 (2006), No. 10, 1223-1257.

[48] Thai D. D., Quang S. D. (2008), Second main theorem with truncated counting function in several complex variables for moving targets, *Forum Math* 20, 163 - 179.

[49] Tan Y., Zang Q. (2015), On the fundationental theorems of algebroid functions on annuli, *Turkish Journal of Mathematics,* Vol. 39, pp. 293-312.

[50] B. L. Van Der Waerden, *Algebra*, vol 2, 7th, ed., Spinger-Verlag, New York, 1991.

[51] Yan Q. M., Chen Z. H. (2008), Weak Cartan-Type Second Main Theorem for Holomorphic Curves, *Sci. Acta Mathematica Sinica*, 24, no.3, 455-462.