

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LEUANGLITH VILAISAVANH

VỀ LÝ THUYẾT NEVANLINNA CHO HÌNH
VÀNH KHUYÊN VÀ VẤN ĐỀ DUY NHẤT

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2022

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LEUANGLITH VILAISAVANH

VỀ LÝ THUYẾT NEVANLINNA CHO HÌNH
VÀNH KHUYÊN VÀ VẤN ĐỀ DUY NHẤT

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 9460102

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS HÀ TRẦN PHƯƠNG

THÁI NGUYÊN - 2022

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TS Hà Trần Phương. Các kết quả viết chung với các tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả của luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học của ai khác.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2022

Tác giả

LEUANGLITH Vilaisavanh

Lời cảm ơn

Luận án được thực hiện và hoàn thành dưới dự hướng dẫn tận tình của PGS. TS Hà Trần Phương. Tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám đốc Đại học Thái Nguyên, Ban Đào tạo Đại học Thái Nguyên, Ban Giám hiệu, Phòng Đào tạo, Ban chủ nhiệm khoa Toán và các phòng Ban chức năng Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy, cô, bạn bè trong các Seminar tại Bộ môn Giải tích và Toán ứng dụng, Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã luôn giúp đỡ, động viên tác giả trong nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Savannakhet nước CHD-CND Lào cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành luận án này.

Cuối cùng tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn những người thân trong gia đình, những người đã chịu nhiều khó khăn, vất vả dành hết tình cảm yêu thương, động viên, chia sẻ, khích lệ để tác giả hoàn thành được luận án.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2022

Tác giả

LEUANGLITH Vilaisavanh

Mục lục

Mở đầu	1
Chương 1. Hai định lý cơ bản cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên	14
1.1. Một số kiến thức cơ bản trong Lý thuyết phân bố giá trị cho các hàm phân hình	14
1.1.1. Trường hợp hàm phân hình trên $\mathbb{C}$	14
1.1.2. Trường hợp hàm phân hình trên hình vành khuyên	17
1.2. Các hàm Nevanlinna-Cartan và Định lý cơ bản thứ nhất	23
1.2.1. Các hàm Nevanlinna-Cartan	23
1.2.2. Định lý cơ bản thứ nhất	25
1.3. Định lý cơ bản thứ hai	26
1.3.1. Kiến thức bổ trợ	26
1.3.2. Định lý cơ bản thứ hai	29
Chương 2. Vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên	41
2.1. Một số kiến thức chuẩn bị	41
2.1.1. Hàm đếm có trọng	41
2.1.2. Hai định lý cơ bản với mục tiêu là siêu phẳng	44
2.2. Hai định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình	45
2.2.1. Trường hợp không xét nghịch ảnh của từng siêu mặt	45
2.2.2. Trường hợp có xem xét điều kiện nghịch ảnh của từng siêu mặt	53

Chương 3. Vấn đề duy nhất cho hàm nguyên liên quan đến giả thuyết Brück.....	57
3.1. Kiến thức bổ trợ	57
3.1.1. Phân bố giá trị cho đa thức vi phân.....	57
3.1.2. Họ chuẩn tắc các hàm phân hình	59
3.2. Vấn đề duy nhất	64
3.2.1. Tiêu chuẩn chuẩn tắc của họ các hàm phân hình	64
3.2.2. Định lý duy nhất	77
Kết luận	82
Danh mục Công trình của tác giả đã công bố liên quan đến luận án	83
Tài liệu tham khảo	84

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Được bắt nguồn bởi các công trình của R. Nevanlinna từ đầu thế kỷ XX, Lý thuyết phân bố giá trị cho hàm phân hình (còn gọi là Lý thuyết Nevanlinna) được đánh giá là một trong những thành tựu sâu sắc và đẹp đẽ của Toán học. Với nội dung chính bao gồm hai định lý cơ bản: Định lý cơ bản thứ nhất và Định lý cơ bản thứ hai, Lý thuyết phân bố giá trị ngày càng thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước, thu được nhiều kết quả quan trọng và có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học như vấn đề duy nhất cho hàm phân hình, hệ động lực phức, phương trình vi phân phức,....

Kí hiệu $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là không gian xạ ảnh n chiều trên trường $\mathbb{C}$. Năm 1933, H. Cartan đã mở rộng các kết quả của Nevanlinna cho trường hợp đường cong chỉnh hình vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và đưa ra một số ứng dụng. Theo hướng nghiên cứu này nhiều nhà toán học trong và ngoài nước đã công bố nhiều kết quả đặc sắc về các dạng định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai trong các trường hợp khác nhau và nghiên cứu ứng dụng của các định lý này trong những lĩnh vực khác nhau của Toán học, đặc biệt là vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình.

Với đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có một biểu diễn tối giản là $(f_0, \dots, f_n)$, hàm

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan* của đường cong f , trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$.

Cho H là một siêu phẳng, xác định bởi dạng tuyến tính L . Hàm

$$m_f(r, H) = m_f(r, L) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|}{|L(f)(re^{i\theta})|} d\theta$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của f kết hợp với siêu phẳng H . Kí hiệu $n_f(r, H)$ là số không điểm của $L(f)(z)$ trong đĩa $\{|z| < r\}$, kể cả bội, $n_f^M(r, H)$ là số các không điểm $L(f)(z)$ trong đĩa $\{|z| < r\}$, bội cắt cụt bởi một số nguyên dương M . Hàm

$$N_f(r, H) = N_f(r, L) = \int_0^r \frac{n_f(t, H) - n_f(0, H)}{t} dt + n_f(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* và hàm

$$N_f^M(r, H) = N_f^M(r, L) = \int_0^r \frac{n_f^M(t, H) - n_f^M(0, H)}{t} dt + n_f^M(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi M của đường cong f kết hợp với siêu phẳng H , trong đó $n_f(0, H) = \lim_{r \rightarrow 0} n_f(r, H)$, $n_f^M(0, H) = \lim_{r \rightarrow 0} n_f^M(r, H)$. Số M trong kí hiệu $N_f^M(r, H)$ được gọi là *chỉ số bội cắt cụt*.

Năm 1933, H. Cartan ([4]) đã chứng minh hai kết quả sau:

Định lý 1. Cho đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và một siêu phẳng H sao cho $f(\mathbb{C}) \not\subset H$, khi đó ta có

$$T_f(r) = N_f(r, H) + m_f(r, H) + O(1).$$

Định lý 2. Cho đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và q siêu phẳng $H_1, \dots, H_q$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó bất đẳng thức

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^n(r, H_j) + o(T_f(r))$$

đúng với mọi $r > 0$ đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Định lý 1 được gọi là Định lý cơ bản thứ nhất, Định lý 2 được gọi là Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ không suy biến tuyến tính kết hợp với các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Công trình này của H. Cartan được đánh giá hết sức quan trọng, nó mở ra một hướng nghiên cứu mới trong việc phát triển lý thuyết phân bố giá trị - nghiên cứu sự phân bố giá trị của ánh xạ phân hình, chỉnh hình - mà ngày nay ta biết đến với tên gọi gắn với tên hai nhà toán học xuất sắc “**Lý thuyết Nevanlinna-Cartan**”. Các kết quả nghiên cứu theo hướng này trong thời gian gần đây tập trung vào hai vấn đề:

1. Xây dựng các dạng định lý cơ bản (định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai) cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ hoặc một miền trong $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hoặc một đa tạp đại số xạ ảnh trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với mục tiêu là các siêu phẳng, siêu mặt cố định hoặc di động, bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan với các hàm xấp xỉ, hàm đếm hay hàm đếm bội cắt cụt. Từ đó suy ra các kết quả về quan hệ số khuyết.

2. Nghiên cứu các ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna-Cartan trong các lĩnh vực khác nhau của toán học, chẳng hạn, nghiên cứu sự suy biến của các đường cong đại số, vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình, hệ phương trình vi phân, đạo hàm riêng phức,

Hướng nghiên cứu thứ nhất đã thu hút được sự quan tâm của rất nhiều nhà toán học và thu được nhiều kết quả sâu sắc, chẳng hạn, G. Dethloff, E. I. Nochka, M. Ru, P. Vojta, H. H. Khoai, D. D. Thai, T. V. Tan, T. T. H. An, S. D. Quang Năm 1983, Nochka ([33]) đã mở rộng kết quả của H. Cartan cho trường hợp họ các siêu phẳng $H_1, \dots, H_q$ ở vị trí N -tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Năm 2004, M. Ru ([41]) đã đưa ra một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình không suy biến đại số kết hợp với các siêu mặt cố định. Trong ([42]), Ông đã mở rộng kết quả đó cho đường cong chỉnh hình vào một đa tạp đại số xạ ảnh V . Năm 2007, T. T. H. An và H. T. Phuong ([1]) và năm 2008, Q. M. Yan và Z. H. Chen ([51]) đã chứng minh một quan hệ giữa hàm đặc trưng $T_f(r)$ của đường cong chỉnh hình

$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với các hàm đếm bội cắt cụt $N_f^M(r, D_j)$ trong trường hợp họ các siêu mặt cố định $\{D_1, \dots, D_q\}$ ở vị trí tổng quát. Ngoài ra, trong những năm gần đây G. Dethloff, T. V. Tan ([13]), D. D. Thai, S. D. Quang ([48]), L. Shi ([45]), P. C. Hu, N. V. Thín ([23])... đã công bố một số công trình theo hướng này cho đường cong chỉnh hình một hoặc nhiều biến phức vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hay một đa tạp đại số xạ ảnh trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt, cố định hay di động, ở vị trí tổng quát hay N -dưới tổng quát.

Một trong những ứng dụng quan trọng của lý thuyết Nevanlinna-Cartan, cũng như lý thuyết Nevanlinna là nghiên cứu sự xác định của ánh xạ chỉnh hình cũng như hàm phân hình thông qua ảnh ngược của một hay nhiều tập hữu hạn phần tử. Vấn đề này cũng thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học: A. Boutabaa, W. Cherry, G. Dethloff, H. Fujimoto, M. Ru, L. Smiley, C. C. Yang, H. H. Khoai, D. D. Thai, T. V. Tan, S. D. Quang, H. T. Phuong và nhiều tác giả khác.

Cho ánh xạ chỉnh hình $f : U \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và một biểu diễn tối giản $(f_0, \dots, f_n)$ của f , trong đó U là toàn bộ mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ hoặc một miền trong $\mathbb{C}$. Với một họ các siêu mặt cố định $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$, với mỗi $D_j \in \mathcal{D}$, ta kí hiệu

$$\begin{aligned}\overline{E}_f(D_j) &= \{z \in U \mid Q_j \circ f(z) = 0 \text{ không kể bội}\}; \\ E_f(D_j) &= \{(z, m) \in U \times \mathbb{N} \mid Q_j \circ f(z) = 0 \text{ và } \text{ord}_{Q_j \circ f}(z) = m\}.\end{aligned}$$

Và đặt

$$\overline{E}_f(\mathcal{D}) = \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} \overline{E}_f(D_j) \quad \text{và} \quad E_f(\mathcal{D}) = \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} E_f(D_j).$$

Kí hiệu $\mathcal{F}$ là một họ các ánh xạ chỉnh hình khác hằng từ U vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Họ các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là *tập xác định duy nhất không kể bội*, kí hiệu URSIM (hoặc *tập xác định duy nhất kể cả bội*, kí hiệu URSCM) cho họ ánh xạ $\mathcal{F}$ nếu với mỗi cặp ánh xạ $f, g \in \mathcal{F}$, điều kiện $\overline{E}_f(\mathcal{D}) = \overline{E}_g(\mathcal{D})$ (hoặc

$E_f(\mathcal{D}) = E_g(\mathcal{D})$ tương ứng) kéo theo $f \equiv g$. Các tập URSIM, URSCM được gọi chung là *tập xác định duy nhất* cho họ ánh xạ $\mathcal{F}$.

Năm 1975, H. Fujimoto ([15]) đã chứng minh một kết quả về vấn đề duy nhất cho ánh xạ phân hình vào không gian xạ ảnh phức, cho thấy tồn tại các tập xác định duy nhất kể cả bội gồm $3n+2$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát cho họ các ánh xạ phân hình phức không suy biến tuyến tính. Kết quả này được xem như mở đầu cho các nghiên cứu về vấn đề duy nhất cho ánh xạ chỉnh hình. Tiếp theo công trình này, năm 1983, L. Smiley ([46]) giới thiệu một kết quả mới về vấn đề duy nhất cho ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính bởi ảnh ngược của một họ hữu hạn các siêu phẳng, vấn đề này được H. Fujimoto ([16]) nghiên cứu lại năm 1998. Năm 2006, G. Dethloff và T. V. Tan ([13]) xem xét vấn đề tương tự cho trường hợp siêu phẳng di động. Năm 2008, bằng việc sử dụng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình của An-Phuong ([1]), Dulock và Ru ([14]) đã chứng minh một số định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trong trường hợp siêu mặt. Năm 2011 và năm 2013, H. T. Phuong đã chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình với mục tiêu là các siêu phẳng cố định hay di động (xem [35], [36]). Và nhiều kết quả khác về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trong trường hợp nhiều biến được công bố bởi M. Ru, D. D. Thai, T. V. Tan, D. Quang Chú ý rằng, hầu hết những chứng minh của các kết quả về tập xác định duy nhất đều dựa vào các dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt.

Đối với vấn đề duy nhất cho hàm phân hình, năm 1926, R. Nevanlinna chứng minh: *Hai hàm phân hình phức khác hằng f, g thỏa mãn $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(a_i)$, $i = 1, \dots, 5$, thì $f \equiv g$.* Kết quả này của Nevanlinna cho thấy hai hàm phân hình được xác định duy nhất bởi ảnh ngược của năm điểm phân biệt. Tiếp theo công trình Nevanlinna, có rất nhiều công trình của các tác giả trong và ngoài nước được công bố, tập trung vào các hướng: các hàm

phân hình chung nhau một phần tử hay một tập hợp, có tính bội và không tính bội. Kí hiệu

$$\sigma_2(f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

Cho f, g là hai hàm phân hình trên mặt phẳng phức và $a \in \mathbb{C}$. Ta nói hàm f và g chung nhau giá trị a không kể bội nếu $f - a$ và $g - a$ có cùng các không điểm, f và g chung nhau giá trị a kể cả bội nếu $f - a$ và $g - a$ có cùng các không điểm kể cả bội. Năm 1996, trong bài báo ([2]), Brück đã đặt ra giả thuyết mà về sau chúng ta quen gọi là giả thuyết Brück: *cho f là một hàm nguyên thỏa mãn $\sigma_2(f)$ không là một số nguyên hay ∞ . Nếu f và f' chung nhau một giá trị hữu hạn $a \in \mathbb{C}$ kể cả bội thì $\frac{f' - a}{f - a} = c$, trong đó c là một hằng số nào đó.* Chú ý rằng, giả thuyết trên đã được Brück chứng minh trong trường hợp $a = 0$ trong bài báo [2]. Năm 1998, Gundersen và Yang ([18]) đã chứng minh giả thuyết Brück đúng khi f là hàm nguyên có bậc hữu hạn (không phải là số nguyên). Trong trường hợp f là một hàm có bậc vô hạn với $\sigma_2(f) < \frac{1}{2}$, giả thuyết Brück được chứng minh bởi Chen và Shon (xem [10]). Trường hợp $\sigma_2(f) \geq \frac{1}{2}$ vẫn còn là một vấn đề mở. Một hướng nghiên cứu thú vị khác về vấn đề duy nhất liên quan đến giả thuyết Brück là thay f với f^n , thay thế f bởi một đa thức vi phân hoặc thay thế a bởi một đa thức hay một hàm. Năm 2008, L. Z. Yang và J. L. Zhang ([52]) đã chứng minh một kết quả liên quan đến giả thuyết Brück như sau: *cho f là một hàm nguyên khác hằng, $n \geq 7$ là một số nguyên và $F = f^n$. Nếu F và F' chung nhau giá trị 1 CM, thì $F \equiv F'$ và f có dạng*

$$f = ce^{z/n},$$

trong đó c là một hằng số khác 0. Năm 2008, Li và Cao ([30]) nghiên cứu một mở rộng của giả thuyết Brück khi thay thế hằng số a bởi một đa thức phù hợp và thay thế đạo hàm cấp một f' bởi đạo hàm cấp cao. Với một

hàm phân hình f , kí hiệu

$$M[f] := f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)}$$

và $F = f^{n+n_1+\dots+n_k}$, trong đó $n, n_1, \dots, n_k, t_1, \dots, t_k$ là các số nguyên dương. Một vấn đề thú vị thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả đó là nghiên cứu giả thuyết Brück khi thay f bởi F , f' bởi $M[f]$. Các công trình này tạo nên hướng nghiên cứu mới, thường gọi là *vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück*.

Như vậy, việc tiếp tục phát triển lý thuyết Nevanlinna-Cartan, đặc biệt nghiên cứu các dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt là thực sự cần thiết. Nó sẽ cho chúng ta những cơ sở quan trọng để nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và ánh xạ chỉnh hình. Hiện nay, vấn đề phát triển lý thuyết Nevanlinna-Cartan và nghiên cứu ứng dụng của lý thuyết này cũng như lý thuyết Nevanlinna trong những ngành khoa học khác nhau đã và đang được quan tâm mạnh mẽ, gắn liền với các công trình của rất nhiều nhà toán học trong và ngoài nước: A. Boutabaa, H. Cartan, W. Cherry, G. Dethloff, Ph. Griffiths, M. Ru, P. Vojta, P. M. Wong, H. H. Khoai, D. D. Thai, T. T. H. An, S. D. Quang, H. T. Phuong, V. H. An và nhiều tác giả khác.

Sự lựa chọn đề tài "**Về lý thuyết Nevanlinna cho hình vành khuyên và vấn đề duy nhất**" của tác giả luận án này cũng nhằm tiếp tục phát triển thêm những điều lý thú của Lý thuyết Nevanlinna - Cartan cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên và vấn đề duy nhất.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

• Đối tượng nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi tập trung nghiên cứu các tính chất của hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và đường cong chỉnh hình trên

hình vành khuyên. Đây cũng là các đối tượng nghiên cứu cơ bản của lý thuyết Nevanlinna và Nevanlinna-Cartan.

• **Mục đích nghiên cứu :**

Hướng nghiên cứu thứ nhất: xây dựng một số dạng định lý cơ bản (thứ nhất và thứ hai) cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với các mục tiêu là siêu mặt bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan với các hàm xấp xỉ, hàm đếm hay hàm đếm bội cắt cụt.

Hướng nghiên cứu thứ hai: thiết lập một số điều kiện đủ để hai đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên là trùng nhau trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

Hướng nghiên cứu thứ ba: xây dựng một số kết quả mới về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück trong trường hợp thay thế f bởi F và f' bởi $M[f]$.

3. Tổng quan về luận án

Trong suốt luận án này ta luôn kí hiệu $R > 1$ là một số thực dương hoặc $+\infty$ và

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < R\}$$

là một hình vành khuyên trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Một trong những hướng nghiên cứu trong lý thuyết Nevanlinna và Nevanlinna-Cartan là xem xét các định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai cho trường hợp ánh xạ từ $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Theo hướng nghiên cứu này, R. Korhonen ([26], năm 2004), A. Khrystianyn và A. Kondratyuk (xem [24, 25], năm 2005) đã có các công bố đầu tiên về phân bố giá trị cho hàm phân hình trên hình vành khuyên. Vấn đề này lập tức thu hút được sự quan tâm của các tác giả trên thế giới như H. Cao, S. Liu, N. Lu, M. E. Lund, D. Meng và thu được một số kết quả quan trọng.

Đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, gần đây, năm 2015, H. T. Phuong và N. V. Thèn ([38]) đã công bố hai định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu phẳng di động. Các quả mà chúng tôi đạt được trong luận án này về phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên là các định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt. Kết quả cụ thể như sau:

Định lý 1.2.3. *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình và D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d sao cho ảnh của f không chứa trong D . Khi đó với mỗi $1 < r < R$, ta có*

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = dT_f(r) + O(1).$$

Định lý 1.3.6. *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và $D_j, 1 \leq j \leq q$, là một họ các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d_j tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi d là bội số chung nhỏ nhất của các $d_1, d_2, \dots, d_q$. Với $0 < \varepsilon < 1$*

$$\alpha \geq (d[(n+1)^2 2^n] \varepsilon^{-1}] + 1).$$

Khi đó với mọi $1 < r < R$ ta có

$$\| (q - (n+1) - \varepsilon)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q d_j^{-1} N_f^\alpha(r, D_j) + O_f(r),$$

trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R = +\infty \\ O(\log \frac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R < +\infty. \end{cases}$$

Định lý 1.2.3 là một dạng định lý cơ bản thứ nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. Định lý 1.3.6 là một dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cắt cho đường cong chỉnh hình từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ kết hợp với các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, cho thấy một quan hệ giữa hàm

đặc trưng $T_f(r)$ của đường cong chỉnh hình $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với các hàm đếm bội cắt cắt $N_f^M(r, D_j)$. Các kết quả chính theo hướng nghiên cứu này chúng tôi viết và công bố trong bài báo [40].

Đối với vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, năm 2013, H. T. Phuong và T. H. Minh ([37]) đã chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu phẳng cố định, năm 2021, H. H. Giang ([17]) công bố một số kết quả theo hướng nghiên cứu này cùng với mục tiêu là các siêu phẳng.... Các quả mà chúng tôi đạt được theo hướng nghiên cứu này như sau:

Định lý 2.2.1. *Cho f và g là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Kí hiệu $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q \geq n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}^2/\delta_{\mathcal{D}}$ siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.*

Định lý 2.2.2. *Cho f và g là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Kí hiệu $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}/m_{\mathcal{D}}$ siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử*

- (a) $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$,
- (b) $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ và $\overline{E}_g(D_i) \cap \overline{E}_g(D_j) = \emptyset$ với mọi $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$.

Khi đó $f \equiv g$.

Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.2 là hai điều kiện đại số để xác định duy nhất đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát với phép nhúng Veronese. Như đã nói ở phần trên, các công trình đã công bố trước của các tác giả khác tập trung chủ yếu vào mục tiêu là các siêu phẳng, kết quả của chúng tôi nghiên cứu

trong trường hợp siêu mặt. Hai định lý 2.2.1 và 2.2.2 được chúng tôi chứng minh trong bài báo [39].

Cho f và g là hai hàm phân hình và a và b là hai số phức phân biệt. Nếu $g - b = 0$ mỗi khi $f - a = 0$ thì ta viết $f = a \Rightarrow g = b$. Nếu $f = a \Rightarrow g = b$ và $g = b \Rightarrow f = a$ thì ta viết $f = a \Leftrightarrow g = b$. Nếu $f - a$ và $g - b$ có chung không điểm và cực điểm kể cả bội thì ta kí hiệu $f - a \rightleftharpoons g - b$. Theo hướng nghiên cứu thứ ba về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück, chúng tôi đã đạt được định lý sau vào năm 2018:

Định lý 3.2.4. *Cho $n \in \mathbb{N}$ và $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \dots, k$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

- 1) $k = 1, n = 0, n_1 \geq t_1 + 1$;
- 2) $n \geq 1$ hoặc $k \geq 2, n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$.

Cho a và b là hai giá trị hữu hạn khác 0 và f là một hàm nguyên khác hằng. Nếu $f^{n+n_1+\dots+n_k} = a \rightleftharpoons f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ thì

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\dots+n_k} - a} = c,$$

trong đó c là một hằng số. Đặc biệt, nếu $a = b$ thì $f = c_1 e^{tz}$, trong đó c_1 và t là các hằng số khác 0 và t thỏa mãn $(tn_1)^{t_1} \dots (tn_k)^{t_k} = 1$.

Định lý 3.2.4 của chúng tôi là một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück trong trường hợp thay thế f bởi F , f' bởi $M[f]$. Để chứng minh kết quả về vấn đề duy nhất trước hết chúng tôi phải thiết lập một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho họ các hàm phân hình như sau:

Định lý 3.2.3. *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên miền phẳng phức D . Cho a và b là hai số phức thỏa mãn $b \neq 0$, gọi $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ và n_j, t_j ,*

$j = 1, 2, \dots, k$ thỏa mãn

$$n_j \geq t_j, \quad n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 3, \quad (1)$$

và $f^{n+n_1+\dots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ đối với mỗi $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ngoài ra, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình thì khẳng định đúng khi (1) được thay thế bởi một trong các điều kiện sau:

$$k = 1, \quad n = 0, \quad n_1 \geq t_1 + 1;$$

$$n \geq 1 \text{ hoặc } k \geq 2, n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2.$$

Kỹ thuật chứng minh sử dụng Định lý 3.2.4 được kết hợp công cụ của lý thuyết họ chuẩn tắc và lý thuyết Nevanlinna. Các kết quả này chúng tôi đã công bố trên bài báo [47].

4. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản: trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu theo hướng nghiên cứu, chúng tôi phát hiện các vấn đề mở cần phải giải quyết và sử dụng các kiến thức, kỹ thuật của giải tích phức, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna và Nevanlinna-Cartan, hình học đại số, lý thuyết họ chuẩn tắc để đề xuất những phương pháp phù hợp hoặc sử dụng một số kỹ thuật đã có nhằm giải quyết các vấn đề đặt ra.

5. Cấu trúc luận án

Luận án gồm phần mở đầu, ba chương nội dung, kết luận luận án và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 có tên là *Hai định lý cơ bản cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên*. Trong chương này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna và Nevanlinna-Cartran cho hàm phân

hình và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, bao gồm: hàm xấp xỉ, hàm đếm, hàm đặc trưng cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình; định lý Jensen, định lý cơ bản thứ nhất và định lý cơ bản thứ hai cho hàm phân hình trên hình vành khuyên. Nội dung chính của chương này là phát biểu và chứng minh hai định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt.

Chương 2 với tên *Vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên*, chúng tôi tập trung vào giới thiệu một số khái niệm cơ bản về vấn đề duy nhất và phát biểu, chứng minh hai định lý về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

Chương 3 dành cho việc trình bày các kết quả nghiên cứu của chúng tôi về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình với tên gọi *Vấn đề duy nhất cho hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück*. Trong chương này, ngoài việc giới thiệu một số khái niệm cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna cho hàm phân hình, kiến thức về họ chuẩn tắc, chúng tôi chứng minh một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho hàm phân hình và trên cơ sở đó chứng minh một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück.

Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại :

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên hằng năm.
- Hội nghị Quốc tế về Đại số - Lý thuyết số - Hình học - Tô pô 2021, 21 - 23 /10/ 2021 tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1

Hai định lý cơ bản cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên

1.1. Một số kiến thức cơ bản trong Lý thuyết phân bố giá trị cho các hàm phân hình

1.1.1. Trường hợp hàm phân hình trên $\mathbb{C}$

Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị cho các hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Cho f là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.1.1. ([19]) Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm f , trong đó $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$ với mỗi số thực $x > 0$.

Kí hiệu $n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội, $\bar{n}(r, f)$ là số cực điểm không kể bội của f trong $\bar{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Với k là một số nguyên dương, kí hiệu $n_k(r, f)$ là số cực điểm bội cắt bởi k của f (tức là mỗi cực điểm bội $l > k$ chỉ được tính k lần trong tổng $n_k(r, f)$ trong $\bar{D}_r$).

Định nghĩa 1.1.2. ([19]) Hàm

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* của f (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm).

Hàm

$$\overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, f) - \overline{n}(0, f)}{t} dt + \overline{n}(0, f) \log r$$

được gọi là *hàm đếm không kể bội*. Hàm

$$N_k(r, f) = \int_0^r \frac{n_k(t, f) - n_k(0, f)}{t} dt + n_k(0, f) \log r$$

được gọi là *hàm đếm bội cắt bởi k* , trong đó

$$n(0, f) = \lim_{t \rightarrow 0} n(t, f); \quad \overline{n}(0, f) = \lim_{t \rightarrow 0} \overline{n}(t, f); \quad n_k(0, f) = \lim_{t \rightarrow 0} n_k(t, f).$$

Số k trong $N_k(r, f)$ được gọi là *chỉ số bội cắt*.

Định nghĩa 1.1.3. ([19]) Hàm

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$$

là *hàm đặc trưng* của hàm f .

Hàm đặc trưng $T(r, f)$ hàm xấp xỉ $m(r, f)$ và các hàm đếm $N(r, f)$, $\overline{N}(r, f)$, $N_k(r, f)$ là các hàm cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị, nó còn gọi là các hàm Nevanlinna. Mệnh đề sau đây cho chúng ta một số tính chất cơ bản của các hàm này.

Mệnh đề 1.1.4 ([19]). *Cho các hàm phân hình $f_1, f_2, \dots, f_p$, khi đó:*

$$(1) \quad m(r, \sum_{\nu=1}^p f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^p m(r, f_\nu) + \log p;$$

$$(2) \quad m(r, \prod_{\nu=1}^p f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^p m(r, f_\nu);$$

$$(3) \quad N(r, \sum_{\nu=1}^p f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^p N(r, f_\nu);$$

$$(4) \quad N(r, \prod_{\nu=1}^p f_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^p N(r, f_\nu);$$

$$(5) \quad T(r, \sum_{\nu=1}^p f_{\nu}) \leq \sum_{\nu=1}^p T(r, f_{\nu}) + \log p;$$

$$(6) \quad T(r, \prod_{\nu=1}^p f_{\nu}) \leq \sum_{\nu=1}^p T(r, f_{\nu}).$$

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại Bổ đề đạo hàm logarit, Định lý cơ bản thứ nhất và Định lý cơ bản thứ hai trong lý thuyết Nevanlinna cho các hàm phân hình phức.

Bổ đề 1.1.5 (Bổ đề đạo hàm logarit [19]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và k là số nguyên dương. Khi đó đẳng thức*

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = o(T(r, f))$$

đúng với mọi $r \in [1, \infty)$ ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Định lý 1.1.6 (Định lý cơ bản thứ nhất [19]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và a là số phức. Khi đó*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1).$$

Nhận xét. Từ Định lý cơ bản thứ nhất, với một hàm phân hình f và một số phức a , ta luôn có

$$N(r, \frac{1}{f-a}) \leq T(r, f) + O(1),$$

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) \leq T(r, f) + O(1).$$

Định lý 1.1.7 (Định lý cơ bản thứ hai [19]). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Cho $a_1, \dots, a_q$ là q số phức phân biệt trong $\mathbb{C}$. Khi đó*

$$(q-1)T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \sum_{i=1}^q \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_i}) + S(r, f)$$

đúng với mọi $r \in [1, \infty)$ ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn, trong đó $S(r, f) = o(T(r, f))$ khi $r \rightarrow \infty$.

1.1.2. Trường hợp hàm phân hình trên hình vành khuyên

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở trong lý thuyết phân bố giá trị cho hàm phân hình trên hình vành khuyên, cần thiết cho việc chứng minh các định lý trong luận án. Trước hết ta nhắc lại một số kí hiệu.

Cho $R > 1$ là số thực dương hoặc $+\infty$, ta kí hiệu

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < R \right\},$$

là hình vành khuyên trong $\mathbb{C}$. Với mỗi số thực r thỏa mãn $1 < r < R$, ta kí hiệu

$$\Delta_{1,r} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| \leq 1 \right\},$$

$$\Delta_{2,r} = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r \right\}$$

và

$$\Delta_r = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r \right\} = \Delta_{1,r} \cup \Delta_{2,r}.$$

Cho $f(z)$ là một hàm phân hình trên Δ và z_0 là một điểm thuộc Δ . Nếu $f(z)$ có không điểm bội α tại z_0 , tức là tồn tại một hàm chỉnh hình $g(z)$ không triệt tiêu trong một lân cận $U \subset \Delta$ của z_0 và

$$f(z) = (z - z_0)^\alpha g(z)$$

với mọi $z \in U$, thì ta kí hiệu $\nu_f(z_0) = \alpha$. Nếu $f(z)$ có cực điểm bội α tại z_0 , tức là tồn tại một hàm chỉnh hình $g(z)$ không triệt tiêu trong một lân cận $U \subset \Delta$ của z_0 và

$$f(z) = (z - z_0)^{-\alpha} g(z)$$

với mọi $z \in U$, thì ta kí hiệu $\nu_{f,\infty}(z_0) = \alpha$. Trường hợp $f(z_0) \neq 0, \infty$ ta kí hiệu $\nu_f(z_0) = 0$ và $\nu_{f,\infty}(z_0) = 0$. Với một số nguyên dương k , ta kí hiệu

$$\nu_f^k(z_0) = \min\{k, \nu_f(z_0)\}, \quad \nu_{f,\infty}^k(z_0) = \min\{k, \nu_{f,\infty}(z_0)\}.$$

Cho f là một hàm phân hình trên Δ , tức là f chỉnh hình trên Δ trừ ra một số các điểm bất thường cực điểm, ta nhắc lại

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta,$$

$$m(r, f) = m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

trong đó $a \in \mathbb{C}$ và $r \in (R^{-1}, R)$ và $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$ với số thực $x > 0$.

Với một số thực $r \in \{1 < r < R\}$, ta kí hiệu

$$\begin{aligned} m_0\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + m\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{f-a}\right), \\ m_0(r, f) &= m(r, f) + m(r^{-1}, f). \end{aligned}$$

Các hàm $m_0\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$, $m_0(r, f)$ được gọi là *hàm xấp xỉ* hay *hàm bù* của f tại $a \in \mathbb{C}$ và tại ∞ .

Kí hiệu $n_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ là số các không điểm kể cả bội của $f-a$ trong $\Delta_{1,r}$ và $n_2\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ là số các không điểm kể cả bội của $f-a$ trong $\Delta_{2,r}$, tức là

$$\begin{aligned} n_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= \sum_{z \in \Delta_{1,r}} \nu_{f-a}(z), \\ n_2\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= \sum_{z \in \Delta_{2,r}} \nu_{f-a}(z). \end{aligned}$$

Ta đặt

$$\begin{aligned} N_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= \int_{1/r}^1 \frac{n_1(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt, \\ N_2\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= \int_1^r \frac{n_2(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt. \end{aligned}$$

Hàm đếm tại các không điểm kể cả bội của hàm $f-a$ được định nghĩa bởi:

$$N_0\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = N_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N_2\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

Kí hiệu $n_1(r, f)$ là số các cực điểm kể cả bội của f trong $\Delta_{1,r}$, $n_2(r, f)$ là số các cực điểm kể cả bội của f trong $\Delta_{2,r}$, tức là

$$n_1(r, f) = \sum_{z \in \Delta_{1,r}} \nu_{f,\infty}(z),$$

$$n_2(r, f) = \sum_{z \in \Delta_{2,r}} \nu_{f,\infty}(z).$$

Ta đặt

$$N_1(r, f) = N_1(r, \infty) = \int_{1/r}^1 \frac{n_1(t, f)}{t} dt,$$

$$N_2(r, f) = N_2(r, \infty) = \int_1^r \frac{n_2(t, f)}{t} dt.$$

Hàm đếm tại các cực điểm kể cả bội của hàm f được định nghĩa bởi:

$$N_0(r, f) = N_1(r, f) + N_2(r, f).$$

Với một số nguyên dương k , kí hiệu $n_1^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ là số các không điểm bội cắt cụt của $f-a$ trong $\Delta_{1,r}$ và $n_2^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ là số các không điểm bội cắt cụt của $f-a$ trong $\Delta_{2,r}$, tức là

$$n_1^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \sum_{z \in \Delta_{1,r}} \nu_{f-a}^k(z),$$

$$n_2^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \sum_{z \in \Delta_{2,r}} \nu_{f-a}^k(z).$$

Ta đặt

$$N_1^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_{1/r}^1 \frac{n_1^k(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt,$$

$$N_2^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_1^r \frac{n_2^k(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt.$$

Hàm đếm tại các không điểm với bội cắt cụt bởi một số nguyên dương k của hàm $f - a$ được định nghĩa bởi:

$$N_0^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = N_1^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + N_2^k\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

Kí hiệu $n_1^k(r, f)$ là số các cực điểm bội cắt cụt của f trong $\Delta_{1,r}$, $n_2^k(r, f)$ là số các cực điểm bội cắt cụt của f trong $\Delta_{2,r}$, tức là

$$n_1^k(r, f) = \sum_{z \in \Delta_{1,r}} \nu_{f,\infty}^k(z),$$

$$n_2^k(r, f) = \sum_{z \in \Delta_{2,r}} \nu_{f,\infty}^k(z).$$

Ta đặt

$$N_1^k(r, f) = N_1(r, \infty) = \int_{1/r}^1 \frac{n_1^k(t, f)}{t} dt,$$

$$N_2^k(r, f) = N_2(r, \infty) = \int_1^r \frac{n_2^k(t, f)}{t} dt.$$

Hàm đếm tại các cực điểm với bội cắt cụt bởi một số nguyên dương k của hàm f được định nghĩa bởi:

$$N_0^k(r, f) = N_1^k(r, f) + N_2^k(r, f).$$

Hàm đặc trưng $T_0(r, f)$ của f được định nghĩa bởi

$$T_0(r, f) = m_0(r, f) - 2m(1, f) + N_0(r, f).$$

Các hàm xấp xỉ, hàm đếm và hàm đặc trưng được gọi là các hàm Nevanlinna của một hàm phân hình trên hình vành khuyên.

Mệnh đề sau đây là một dạng của định lý Jensen cho hàm phân hình trên hình vành khuyên.

Mệnh đề 1.1.8 ([24]). *Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên Δ . Khi đó với mỗi $r \in (1, R)$, ta có*

$$N_0\left(r, \frac{1}{f}\right) - N_0(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r^{-1}e^{i\theta})| d\theta$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta.$$

Các mệnh đề sau đây cho chúng ta một số tính chất của các hàm Nevanlinna cho hàm phân hình trên hình vành khuyên.

Mệnh đề 1.1.9 ([24]). *Cho f là một hàm phân hình trên Δ . Khi đó với mỗi $r \in (1, R)$, ta có*

$$T_0(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_0\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta.$$

Mệnh đề 1.1.10 ([24]). *Cho f là một hàm phân hình trên Δ . Khi đó với mỗi $r \in (1, R)$, ta có*

$$\begin{aligned} T_0(r, f) &= T_0(r, 1/f), \\ T_0(r, f) &= T_0(r, f(1/z)). \end{aligned}$$

Mệnh đề 1.1.11 ([24]). *Cho f là một hàm phân hình trên Δ . Khi đó với mỗi $r \in (1, R)$*

$$\begin{aligned} T_0(r, f_1 + f_2) &\leq T_0(r, f_1) + T_0(r, f_2) + O(1), \\ T_0(r, f_1 \cdot f_2) &\leq T_0(r, f_1) + T_0(r, f_2) + O(1), \\ T_0(r, \frac{f_1}{f_2}) &\leq T_0(r, f_1) + T_0(r, f_2) + O(1). \end{aligned}$$

Mệnh đề sau đây thường được gọi là Định lý cơ bản thứ nhất cho hàm phân hình trên hình vành khuyên:

Mệnh đề 1.1.12 ([24]). *Cho f là một hàm phân hình trên Δ . Khi đó với mỗi $r \in (1, R)$, ta có*

$$T_0(r, \frac{1}{f - c}) = T_0(r, f) + O(1)$$

đúng với mọi hằng số $c \in \mathbb{C}$.

Mệnh đề sau đây thường được gọi là Bổ đề đạo hàm logarit.

Mệnh đề 1.1.13 ([25]). *Cho f là một hàm phân hình trên Δ và $\lambda \geq 0$. Khi đó:*

- i) nếu $R = \infty$ thì $m_0(r, f'/f) = O(\log(rT_0(r, f)))$ với mỗi $r \in (1, R)$ ngoại trừ một tập Δ_r thỏa mãn: $\int_{\Delta_r} r^{\lambda-1} dr < +\infty$;
- ii) nếu $R < \infty$ thì $m_0(r, f'/f) = O\left(\log\left(\frac{T_0(r, f)}{R-r}\right)\right)$ với mỗi $r \in (1, R)$ ngoại trừ một tập Δ'_r thỏa mãn $\int_{\Delta'_r} \frac{d_r}{(R-r)^{\lambda-1}} < +\infty$.

Mệnh đề sau đây thường được gọi là Định lý cơ bản thứ hai cho hàm phân hình trên hình vành khuyên:

Mệnh đề 1.1.14 ([25]). Cho f là một hàm phân hình trên Δ , $a_1, a_2, \dots, a_p$ là các số phức phân biệt và $\lambda \geq 0$. Khi đó:

$$m_0(r, f) + \sum_{\nu=1}^p m_0\left(r, \frac{1}{f - a_\nu}\right) \leq 2T_0(r, f) - N_0^{(1)}(r, f) + S(r, f)$$

trong đó

$$N_0^{(1)}(r, f) = N_0(r, 1/f') + 2N_0(r, f) - N_0(r, f')$$

và

- i) nếu $R = \infty$ thì $S(r, f) = O(\log(rT_0(r, f)))$ với mỗi $r \in (1, R)$, ngoại trừ một tập Δ_r thỏa mãn: $\int_{\Delta_r} r^{\lambda-1} dr < +\infty$;
- ii) nếu $R < +\infty$ thì $S(r, f) = O\left(\log\left(\frac{T_0(r, f)}{R-r}\right)\right)$ với mỗi $r \in (1, R)$, ngoại trừ một tập Δ'_r thỏa mãn $\int_{\Delta'_r} \frac{d_r}{(R-r)^{\lambda-1}} < +\infty$.

Cho f là một hàm phân hình khác hằng trên $\Delta_\infty = \{z : 0 < |z| < \infty\}$, ta kí hiệu các số khuyết

$$\delta_0(a) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_0(r, 1/f - a)}{T_0(r, f)}$$

và

$$\delta_0(\infty) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{m_0(r, f)}{T_0(r, f)}.$$

Mệnh đề 1.1.15 ([25], Quan hệ số khuyết). *Cho f là một hàm phân hình trên $\Delta_\infty, a_\nu, \nu = 1, \dots, q$ là các số phức phân biệt, có thể bao gồm cả ∞ . Khi đó*

$$\sum_{\nu=1}^q \delta_0(a_\nu) \leq 2.$$

1.2. Các hàm Nevanlinna-Cartan và Định lý cơ bản thứ nhất

1.2.1. Các hàm Nevanlinna-Cartan

Trong phần này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna-Cartan cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. Ngoài ra chúng tôi phát biểu và chứng minh một dạng định lý cơ bản thứ nhất trong lý thuyết Nevanlinna-Cartan cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt. Trước hết tôi trình bày khái niệm về đường cong.

Định nghĩa 1.2.1. Một ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, hay còn gọi là đường cong chỉnh hình, trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được định nghĩa là ánh xạ

$$\begin{aligned} f &= (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ z &\longmapsto (f_0(z) : \dots : f_n(z)), \end{aligned}$$

trong đó $f_j, 0 \leq j \leq n$, là các hàm nguyên trên Δ . Nếu $f_j, j = 0, 1, \dots, n$, là các đa thức thì f được gọi là đường cong đại số. Trong trường hợp $f_0, \dots, f_n$ không có không điểm chung trên Δ thì ta gọi $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ là một biểu diễn rút gọn của f .

Định nghĩa 1.2.2. Đường cong chỉnh hình $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là suy biến tuyến tính nếu ảnh của f chứa trong một đa tạp tuyến tính thực sự nào đó của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Đường cong chỉnh hình f được gọi

là *suy biến đại số* nếu ảnh của f chứa trong một đa tạp đại số thực sự nào đó của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Từ định nghĩa dễ dàng nhận thấy rằng, ánh xạ $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ suy biến tuyến tính nếu các hàm $f_0, \dots, f_n$ là phụ thuộc tuyến tính.

Cho $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $f_0, \dots, f_n$ là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung trong Δ . Với $1 < r < R$, hàm đặc trưng $T_f(r)$ của f được xác định bởi

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta,$$

trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$. Khái niệm này độc lập với mọi cách chọn biểu diễn tối giản của hàm f , sai khác một hằng số.

Cho D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, xác định bởi đa thức thuần nhất Q . Hàm *xấp xỉ* của f kết hợp với siêu mặt D được xác định bởi

$$m_f(r, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|Q \circ f(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|Q \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta.$$

Cho M là một số nguyên dương, kí hiệu $n_{1,f}(r, D)$ và $n_{2,f}(r, D)$ là số các không điểm của $Q(f)$ lần lượt trong $\Delta_{1,r}$ và $\Delta_{2,r}$ kể cả bội, $n_{1,f}^M(r, D)$ và $n_{2,f}^M(r, D)$ là số các không điểm bội cắt cụt bởi M của $Q(f)$ lần lượt trong $\Delta_{1,r}$ và $\Delta_{2,r}$, tức là:

$$\begin{aligned} n_{1,f}(r, D) &= n_1(r, 1/Q(f)), & n_{2,f}(r, D) &= n_2(r, 1/Q(f)); \\ n_{1,f}^M(r, D) &= n_1^M(r, 1/Q(f)), & n_{2,f}^M(r, D) &= n_2^M(r, 1/Q(f)). \end{aligned}$$

Kí hiệu

$$\begin{aligned} N_{1,f}(r, D) &= \int_{r^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}(t, D)}{t} dt, & N_{2,f}(r, D) &= \int_1^r \frac{n_{2,f}(t, D)}{t} dt, \\ N_{1,f}^M(r, D) &= \int_{r^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}^M(t, D)}{t} dt, & N_{2,f}^M(r, D) &= \int_1^r \frac{n_{2,f}^M(t, D)}{t} dt. \end{aligned}$$

Hàm đếm và hàm đếm bội cắt cụt được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} N_f(r, D) &= N_f(r, Q) := N_{1,f}(r, D) + N_{2,f}(r, D), \\ N_f^M(r, D) &= N_f^M(r, Q) := N_{1,f}^M(r, D) + N_{2,f}^M(r, D). \end{aligned}$$

Cho $D_1, \dots, D_q$ là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta gọi Q_j , $1 \leq j \leq q$, là các đa thức thuần nhất bậc d_j trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ xác định D_j . Các siêu mặt $D_1, \dots, D_q$ được gọi là ở vị trí tổng quát nếu $q > n$ và với mỗi bộ gồm $n+1$ chỉ số phân biệt $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, q\}$, ta có

$$\{z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Q_{i_1}(z) = Q_{i_2}(z) = \dots = Q_{i_{n+1}}(z) = 0\} = \emptyset.$$

1.2.2. Định lý cơ bản thứ nhất

Năm 2022, chúng tôi chứng minh định lý sau đây là một dạng của định lý cơ bản thứ nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt:

Định lý 1.2.3 ([40]). *Cho D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình mà ảnh của nó không chứa trong D . Khi đó với mỗi $1 < r < R$, ta có*

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = dT_f(r) + O(1).$$

Chứng minh. Gọi P là đa thức thuần nhất bậc d xác định siêu mặt D . Theo định nghĩa của các hàm $T_f(r)$, $N_f(r, D)$, $m_f(r, D)$ và từ Mệnh đề 1.1.8, ta có

$$\begin{aligned} m_f(r, D) + N_f(r, D) &= m_f(r, D) + N_0\left(r, \frac{1}{P(f)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|P \circ f(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|P \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P \circ f(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P \circ f(r^{-1}e^{i\theta})| d\theta \\ &\quad + O(1) \\ &= d\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta\right) \\ &\quad + O(1) \\ &= dT_f(r) + O(1). \end{aligned}$$

Điều này kéo theo kết luận của định lý. □

Định lý 1.2.3 cho chúng ta một quan hệ đẳng thức giữa hàm đặc trưng của một đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với các hàm xấp xỉ, hàm đếm kết hợp với một siêu mặt. Kết quả này cũng tương tự như trường hợp đường cong chỉnh hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

1.3. Định lý cơ bản thứ hai

Trong phần này chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên kết hợp với các siêu mặt ở vị trí tổng quát. Để chứng minh kết quả chính ta cần thêm một số khái niệm và kết quả bổ trợ.

1.3.1. Kiến thức bổ trợ

Đầu tiên ta nhắc lại khái niệm về Wronskian. Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $(f_0, \dots, f_n)$ là một biểu diễn tối giản của f , tức là các hàm $f_0, \dots, f_n$ chỉnh hình và không có không điểm chung trên Δ . Định thức Wronskian của f được định nghĩa bởi

$$W = W(f) = W(f_0, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_0(z) & f_1(z) & \dots & f_n(z) \\ f'_0(z) & f'_1(z) & \dots & f'_n(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_0^{(n)}(z) & f_1^{(n)}(z) & \dots & f_n^{(n)}(z) \end{vmatrix}.$$

Ta kí hiệu $N_W(r, 0)$ là hàm đếm tại các không điểm của $W(f_0, \dots, f_n)$ trong Δ_r , tức là

$$N_W(r, 0) = N_0(r, \frac{1}{W}).$$

Gọi $L_0, \dots, L_n$ là các dạng độc lập tuyến tính của $z_0, \dots, z_n$. Với mỗi $j = 0, \dots, n$, đặt

$$F_j(z) = L_j(f(z)).$$

Theo tính chất của Wronskian, tồn tại các hằng số $C \neq 0$ sao cho

$$|W(F_0, \dots, F_n)| = C|W(f_0, \dots, f_n)|.$$

Tiếp theo ta nhắc lại thứ tự từ điển của các n -bộ các số tự nhiên: cho $(\mathbf{j}) = (j_1, \dots, j_n)$ và $(\mathbf{i}) = (i_1, \dots, i_n)$ là hai n -bộ các số tự nhiên, ta nói $(\mathbf{j}) > (\mathbf{i})$ nếu và chỉ nếu tồn tại $b \in \{1, \dots, n\}$ ta có $j_l = i_l$ với mọi $l < b$ và $j_b > i_b$. Với một n -bộ $(\mathbf{i}) = (i_1, \dots, i_n)$ các số tự nhiên, ta kí hiệu $\sigma(\mathbf{i}) := \sum_{j=1}^n i_j$.

Bây giờ ta nhắc lại về lọc Corvaja-Zannier. Cho $Q_1, \dots, Q_n$ là đa thức thuần nhất bậc d trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$, xác định một đa tạp con trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có số chiều 0. Với một số nguyên lớn N chia hết cho d , ta kí hiệu V_N là không gian các đa thức thuần nhất bậc N trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$. Gọi $\mathcal{S}$ là họ tất cả các n -bộ các số tự nhiên $(\mathbf{i}) = (i_1, \dots, i_n)$ thỏa mãn $\sigma(\mathbf{i}) \leq N/d$ đã được sắp xếp theo thứ tự từ điển. Với mỗi $(\mathbf{i}) = (i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}$, ta kí hiệu không gian $W_{(\mathbf{i})} = W_{N-d\sigma(\mathbf{i})}$ bởi

$$W_{(\mathbf{i})} = \sum_{(\mathbf{e})=(e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{S}, (\mathbf{e}) \geq (\mathbf{i})} Q_1^{e_1} \dots Q_n^{e_n} V_{N-d\sigma(\mathbf{e})}.$$

Khi đó $W_{(0, \dots, 0)} = V_N$ và $W_{(\mathbf{i})} \supset W_{(\mathbf{i}')}$ nếu $(\mathbf{i}) < (\mathbf{i}')$ và họ $\{W_{(\mathbf{i})}\}_{(\mathbf{i}) \in \mathcal{S}}$ được gọi là lọc của V_N .

Mệnh đề 1.3.1 ([1]). *Giả sử $(\mathbf{i}') > (\mathbf{i})$ là hai phần tử liên tiếp theo thứ tự từ điển trong $\mathcal{S}$. Khi đó tồn tại đẳng cấu*

$$\frac{W_{(\mathbf{i})}}{W_{(\mathbf{i}')}} \cong \frac{V_{N-d\sigma(\mathbf{i})}}{(Q_1, \dots, Q_n) \cap V_{N-d\sigma(\mathbf{i})}}.$$

Ngoài ra, ta có thể chọn được một cơ sở của $\frac{W_{(\mathbf{i})}}{W_{(\mathbf{i}')}}$ từ tập hợp tất cả các lớp tương đương có dạng $Q_1^{i_1} \dots Q_n^{i_n} \eta$ modulo $W_{(\mathbf{i}')}$, trong đó η là một đơn thức bậc $N - d\sigma(\mathbf{i})$ của $z_0, z_1, \dots, z_n$.

Với $(\mathbf{i}') > (\mathbf{i})$ là hai phần tử liên tiếp nhau trong $\mathcal{S}$, ta đặt

$$\Delta_{(\mathbf{i})} := \dim \frac{W_{(\mathbf{i})}}{W_{(\mathbf{i}')}}.$$

Khi đó ta dễ dàng chứng minh được

Mệnh đề 1.3.2. Nếu $(\mathbf{i}_1)$ và $(\mathbf{i}_2)$ là hai cặp n -bộ thuộc $\mathcal{S}$ thỏa mãn $\sigma(\mathbf{i}_1) = \sigma(\mathbf{i}_2)$ thì

$$\Delta_{(\mathbf{i}_1)} = \Delta_{(\mathbf{i}_2)}.$$

Mệnh đề 1.3.3 ([1]). Nếu $\sigma(\mathbf{i}) \leq N/d - n$ thì

$$\Delta_{(\mathbf{i})} := \dim \frac{W_{(\mathbf{i})}}{W_{(\mathbf{i}')}} = d^n,$$

trong đó $(\mathbf{i}') > (\mathbf{i})$ là hai phần tử liên tiếp trong $\mathcal{S}$.

Trong luận án này, kí hiệu “||” trong một bất đẳng thức nào đó thì ta hiểu bất đẳng thức đó đúng với mọi $r \in (1, +\infty)$ ngoại trừ một tập E mà $\int_E r^{\lambda-1} dr < +\infty$ với $R = +\infty$ và bất đẳng thức đúng với mọi $r \in (1, R)$ ngoại trừ một E mà $\int_E \frac{1}{(R-r)^{\lambda+1}} dr < +\infty$ với $R < +\infty$. Hai mệnh đề sau được Phuong - Thín chứng minh năm 2015, cần thiết cho việc chứng minh định lý cơ bản thứ hai của chúng tôi.

Mệnh đề 1.3.4 ([38]). Cho $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong không suy biến tuyến tính và $H_1, \dots, H_q$ là các siêu phẳng $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j \in K} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|}{|(a_j, f)(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j \in K} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|}{|(a_j, f)(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \right. \\ & \quad \left. \leq (n+1)T_f(r) - N_W(r, 0) + O_f(r), \right. \end{aligned}$$

trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R_0 = +\infty \\ O(\log \frac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R_0 < +\infty, \end{cases}$$

ở đây maximum được lấy trên tất cả các tập con K của $\{1, \dots, q\}$ sao cho $a_j, j \in K$, là độc lập tuyến tính.

Mệnh đề 1.3.5 ([38]). Cho $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chẵn hình không suy biến tuyến tính và $H_1, \dots, H_q$ là các siêu phẳng

trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ở vị trí tổng quát. Với mỗi $j = 1, \dots, q$, gọi L_j là dạng tuyến tính xác định H_j . Khi đó

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q m_f(r, H_j) &\leq \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j \in K} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|}{|(a_j, f)(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \max_K \sum_{j \in K} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|}{|(a_j, f)(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + O(1). \end{aligned}$$

1.3.2. Định lý cơ bản thứ hai

Định lý sau đây được chúng tôi chứng minh vào năm 2022 là một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt ở vị trí tổng quát.

Định lý 1.3.6 ([40]). Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và $D_j, 1 \leq j \leq q$, là một họ các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d_j tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi d là bội số chung nhỏ nhất của các $d_1, d_2, \dots, d_q$. Khi đó với mỗi số dương $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$ và

$$\alpha \geq (d[(n+1)^{2n}]\varepsilon^{-1} + 1)^n,$$

ta có

$$\| (q - (n+1) - \varepsilon)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q d_j^{-1} N_f^\alpha(r, D_j) + O_f(r)$$

đúng với mọi $1 < r < R$, trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R = +\infty \\ O(\log \frac{1}{R-r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R < +\infty. \end{cases}$$

Chứng minh. Giả sử $(f_0 : \dots : f_n)$ là một biểu diễn tối giản của f và P_j là đa thức thuần nhất bậc d_j trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ xác định siêu mặt D_j , với mỗi $j = 1, 2, \dots, n$. Ta giả sử rằng $q \geq n+1$.

Lấy $r : 1 < r < R$ tùy ý. Trước hết ta xem xét trong trường hợp $d_1 = d_2 = \dots = d_q = d$. Với mỗi $x, y \in \mathbb{C}, |x| = r$ và $|y| = 1/r$ tồn tại hai

hoán vị $\{i_1, \dots, i_q\}$ và $\{l_1, \dots, l_q\}$ của tập $\{1, \dots, q\}$ sao cho

$$|P_{i_1} \circ f(x)| \leq |P_{i_2} \circ f(x)| \leq \dots \leq |P_{i_q} \circ f(x)|, \quad (1.1)$$

và

$$|P_{l_1} \circ f(y)| \leq |P_{l_2} \circ f(y)| \leq \dots \leq |P_{l_q} \circ f(y)|. \quad (1.2)$$

Do các siêu mặt D_{i_j} , $1 \leq j \leq n+1$, ở vị trí tổng quát nên theo Hilbert's Nullstellensatz ([50]) ta có: với mỗi số nguyên k , $0 \leq k \leq n$, tồn tại số nguyên $t_k \geq d$ sao cho

$$z_k^{t_k} = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{jk}(z_0, \dots, z_n) P_{i_j}(z_0, \dots, z_n),$$

trong đó Q_{jk} , $1 \leq j \leq n+1$, $0 \leq k \leq n$, là các đa thức thuần nhất bậc $t_k - d$ với các hệ số lấy trên $\mathbb{C}$. Suy ra

$$|f_k(x)|^{t_k} \leq \sum_{j=1}^{n+1} |Q_{jk}(f_0(x), \dots, f_n(x))| \cdot |P_{i_j}(f_0(x), \dots, f_n(x))|. \quad (1.3)$$

Do Q_{jk} là các đa thức thuần nhất bậc $t_k - d$ nên

$$\begin{aligned} |Q_{jk}(f_0(x), \dots, f_n(x))| &\leq c_{jk} \max\{|f_0(x)|^{t_k-d}, \dots, |f_n(x)|^{t_k-d}\} \\ &= c_{jk} (\max\{|f_0(x)|, \dots, |f_n(x)|\})^{t_k-d} \\ &= c_{jk} \|f(x)\|^{t_k-d}, \end{aligned}$$

trong đó c_{jk} là tổng tất cả các môđun của các hệ số các đơn thức trong đa thức Q_{jk} . Hiển nhiên c_{jk} chỉ phụ thuộc vào Q_{jk} mà không phụ thuộc $f_0, \dots, f_n$. Mặt khác, với mỗi $k = 0, \dots, n$, ta có

$$\sum_{j=1}^{n+1} |P_{i_j}(f_0(x), \dots, f_n(x))| \leq (n+1) \max\{|P_{i_1} \circ f(x)|, \dots, |P_{i_{n+1}} \circ f(x)|\}.$$

Ta đặt

$$C_1 = (n+1) \max\{c_{jk} : j = 1, \dots, n+1; k = 0, \dots, n\}.$$

Bất đẳng thức (1.3) kéo theo

$$|f_k(x)|^{t_k} \leq C_1 \|f(x)\|^{t_k-d} \max\{|P_{i_1} \circ f(x)|, \dots, |P_{i_{n+1}} \circ f(x)|\}, \quad (1.4)$$

trong đó C_1 là một hằng số dương chỉ phụ thuộc vào các hệ số của các đơn thức trong b_{jk} , $1 \leq j \leq n+1$, $0 \leq k \leq n$, tức là phụ thuộc vào các hệ số của các đa thức thuần nhất P_i , $i = 1, \dots, q$. Chú ý rằng (1.4) đúng với mọi k , nên

$$\|f(x)\|^{t_k} \leq C_1 \|f(x)\|^{t_k-d} \max\{|P_{i_1} \circ f(x)|, \dots, |P_{i_{n+1}} \circ f(x)|\}.$$

Hay

$$\|f(x)\|^d \leq C_1 \max\{|P_{i_1} \circ f(x)|, \dots, |P_{i_{n+1}} \circ f(x)|\}. \quad (1.5)$$

Kết hợp (1.1) và (1.5) suy ra

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^q \frac{\|f(x)\|^d}{|P_j \circ f(x)|} &= \left(\prod_{k=1}^n \frac{\|f(x)\|^d}{|P_{i_k} \circ f(x)|} \right) \left(\prod_{k=n+1}^q \frac{\|f(x)\|^d}{|P_{i_k} \circ f(x)|} \right) \\ &\leq C_1^{q-n} \prod_{k=1}^n \frac{\|f(x)\|^d}{|P_{i_k} \circ f(x)|}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

trong đó C_1 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào các hệ số P_j .

Lập luận tương tự ta cũng có

$$\prod_{j=1}^q \frac{\|f(y)\|^d}{|P_j \circ f(y)|} \leq C_2^{q-n} \prod_{k=1}^n \frac{\|f(y)\|^d}{|P_{l_k} \circ f(y)|}, \quad (1.7)$$

trong đó C_2 là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào các hệ số P_j . Bất đẳng thức (1.6) kéo theo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|P_j \circ f(re^{i\theta})|} d\theta \\ \leq \int_0^{2\pi} \log \prod_{k=1}^n \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|P_{i_k} \circ f(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + (q-n) \log C_1 \\ \leq \int_0^{2\pi} \max_{\{i_1, \dots, i_n\}} \log \prod_{k=1}^n \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|P_{i_k} \circ f(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + (q-n) \log C_1. \end{aligned}$$

Tương tự, từ Bất đẳng thức (1.7) ta có

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|P_j \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta \\ \leq \int_0^{2\pi} \max_{\{i_1, \dots, i_n\}} \log \prod_{k=1}^n \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|P_{i_k} \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + (q-n) \log C_2. \end{aligned}$$

Như vậy, từ định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^q m_f(r, D_j) &\leq \int_0^{2\pi} \max_{\{i_1, \dots, i_n\}} \log \prod_{k=1}^n \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|P_{i_k} \circ f(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \max_{\{i_1, \dots, i_n\}} \log \prod_{k=1}^n \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|P_{i_k} \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\quad + (q-n)(\log C_1 + \log C_2). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Gọi N ($N \geq nd$) là một số nguyên cố định, kí hiệu V_N là không gian các đa thức thuần nhất bậc N trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$. Kí hiệu $M := \dim V_N$ và gọi $Q_1, \dots, Q_M$ là một cơ sở cố định của V_N . Với mỗi $j = 1, 2, \dots, M$ ta đặt $F_j = Q_j(f)$ và đặt

$$F = (F_1 : \dots : F_M) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C}),$$

khi đó từ giả thiết f là không suy biến đại số, ta có F không suy biến tuyến tính.

Lấy tùy ý n đa thức phân biệt $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \{P_1, \dots, P_q\}$, từ giả thuyết ở vị trí tổng quát của các siêu mặt $\{D_1, \dots, D_q\}$ ta suy ra họ các đa thức $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ xác định một đa tạp con có số chiều bằng 0 trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Gọi $\mathcal{S}$ là họ tất cả các n -bộ các số tự nhiên $(\mathbf{i}) = (i_1, \dots, i_n)$ thỏa mãn $\sigma(\mathbf{i}) \leq N/d$ đã được sắp xếp theo thứ tự từ điển, theo quy trình xây dựng lọc Corvaja-Zannier, ta xây dựng được một lọc các không gian con $\{W_{(\mathbf{i})}\}_{(\mathbf{i}) \in \mathcal{S}}$ của V_N và theo Mệnh đề 1.3.3, ta có

$$\Delta_{(\mathbf{i})} = \dim \frac{W_{(\mathbf{i})}}{W_{(\mathbf{i}')}} = d^n,$$

với mỗi $(\mathbf{i}') > (\mathbf{i})$ là hai n -bộ các số tự nhiên liên tiếp thuộc $\mathcal{S}$ thỏa mãn $\sigma(\mathbf{i}) \leq N/d - n$.

Bây giờ ta sẽ chọn một cơ sở thích hợp $\mathcal{B} = \{\psi_1, \dots, \psi_M\}$ của V_N : ta bắt đầu với không gian con nhỏ nhất khác $\{0\}$ của lọc $\{W_{(\mathbf{i})}\}_{(\mathbf{i}) \in \mathcal{S}}$ của V_N , kí hiệu là $W_{(\mathbf{i}^*)}$ và chọn một cơ sở bất kỳ của nó để đưa vào $\mathcal{B}$. Ta tiếp tục xây dựng các phần tử tiếp theo của cơ sở bằng quy nạp như sau: giả sử ta đã chọn được một cơ sở $W_{(\mathbf{i})}$ trong lọc để đưa vào $\mathcal{B}$ và $(\mathbf{i}') < (\mathbf{i})$ là n -bộ liên tiếp thuộc $\mathcal{S}$. Ta biết rằng mỗi phần tử của không gian thương $W_{(\mathbf{i}')}/W_{(\mathbf{i})}$ là một lớp tương đương và trong mỗi lớp đó sẽ có một phần tử thuộc $W_{(\mathbf{i}')}$, có biểu diễn dưới dạng $\alpha_1^{i_1}, \dots, \alpha_n^{i_n} Q$, trong đó $Q \in V_{N-d\sigma(\mathbf{i}')}$. Ta bổ sung các phần tử này vào $\mathcal{B}$ và lặp quá trình này cho đến khi $W_{(\mathbf{i}')} = V_N$. Bằng con đường như vậy ta sẽ thu được một cơ sở $\mathcal{B} = \{\psi_1, \dots, \psi_M\}$ của V_N .

Hiển nhiên với mỗi $j : 1 \leq j \leq M$, phần tử ψ_j biểu diễn được dưới một dạng tuyến tính, kí hiệu là L_j , của $Q_1, \dots, Q_M$ và do $\mathcal{B} = \{\psi_1, \dots, \psi_M\}$ là một cơ sở của V_N nên $L_1, \dots, L_M$ là độc lập tuyến tính. Hiển nhiên, từ cách xây dựng ta có $\psi_j \circ f = L_j(F)$.

Lấy $z \in \Delta$ tùy ý. Giả sử $\psi_j \in \mathcal{B}$ là một phần tử thuộc $W_{(\mathbf{i})}$ được xây dựng từ không gian thương $W_{(\mathbf{i})}/W_{(\mathbf{i}')}$, trong đó $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n) < (\mathbf{i}')$ là hai n -bộ các số tự nhiên liên tiếp thuộc $\mathcal{S}$. Khi đó $\psi_j = \alpha_1^{i_1}, \dots, \alpha_n^{i_n} Q$, trong đó $Q \in V_{N-d\sigma(\mathbf{i})}$, do đó ta có

$$\begin{aligned} |\psi_j \circ f(z)| &\leq |\alpha_1 \circ f(z)|^{i_1} \dots |\alpha_n \circ f(z)|^{i_n} |Q \circ f(z)| \\ &\leq C_3 |\alpha_1 \circ f(z)|^{i_1} \dots |\alpha_n \circ f(z)|^{i_n} \|f(z)\|^{N-d\sigma(\mathbf{i})}, \end{aligned}$$

trong đó C_3 là một hằng số dương chỉ phụ thuộc vào ψ_j . Suy ra

$$\begin{aligned} \log |L_j(F)(z)| &= \log |\psi_j \circ f(z)| \\ &\leq i_1 \log |\alpha_1 \circ f(z)| + \dots + i_n \log |\alpha_n \circ f(z)| \\ &\quad + (N - d\sigma(\mathbf{i})) \log \|f(z)\| + \log C_3 \\ &\leq N \log \|f(z)\| - i_1 \log \frac{\|f(z)\|^d}{|\alpha_1 \circ f(z)|} - \dots - i_n \log \frac{\|f(z)\|^d}{|\alpha_n \circ f(z)|} + \log C_3. \end{aligned}$$

Chú ý rằng có đúng $\Delta_{(\mathbf{i})}$ hàm ψ_j trong cơ sở $\mathcal{B}$, như vậy ta có

$$\begin{aligned}
\log \prod_{j=1}^M |L_j(F)(z)| &\leq - \sum_{(\mathbf{i})} \Delta_{(\mathbf{i})} \left(i_1 \log \frac{\|f(z)\|^d}{|\alpha_1 \circ f(z)|} + \cdots + i_n \log \frac{\|f(z)\|^d}{|\alpha_n \circ f(z)|} \right) \\
&\quad + MN \log \|f(z)\| + M \log C_3 \\
&\leq - \left(\sum_{(\mathbf{i})} \Delta_{(\mathbf{i})} i_j \right) \sum_{j=1}^n \log \frac{\|f(z)\|^d}{|\alpha_j \circ f(z)|} \\
&\quad + MN \log \|f(z)\| + M \log C_3 \\
&\leq -A \log \prod_{j=1}^n \frac{\|f(z)\|^d}{|\alpha_j \circ f(z)|} + MN \log \|f(z)\| + M \log C_3,
\end{aligned}$$

trong đó $A = \sum_{(\mathbf{i})} \Delta_{(\mathbf{i})} i_j$. Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
\log \prod_{j=1}^n \frac{\|f(z)\|^d}{|\alpha_j \circ f(z)|} &\leq \frac{1}{A} \log \prod_{j=1}^M \frac{\|F(z)\|}{|L_j \circ F(z)|} - \frac{M}{A} \log \|F(z)\| \\
&\quad + \frac{MN}{A} \log \|f(z)\| + \frac{M}{A} \log C_3. \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Chú ý rằng ta chỉ có một số hữu hạn cách chọn các đa thức $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ trong họ $\{P_1, \dots, P_q\}$ nên ta có một họ hữu hạn các dạng tuyến tính $L_1, \dots, L_T$. Từ (1.9), với mỗi $r > 1$ ta có

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \max_{\{i_1, \dots, i_n\}} \log \prod_{k=1}^n \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|P_{i_k} \circ f(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} + \int_0^{2\pi} \max_{\{i_1, \dots, i_n\}} \log \prod_{k=1}^n \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|P_{i_k} \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&\leq \frac{1}{A} \left(\int_0^{2\pi} \max_K \log \prod_{j \in K} \frac{\|F(re^{i\theta})\|}{|L_j(F)(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{2\pi} \max_K \log \prod_{j \in K} \frac{\|F(r^{-1}e^{i\theta})\|}{|L_j(F)(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\
&\quad - \frac{M}{A} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|F(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|F(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta \right) \\
&\quad + \frac{MN}{A} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta \right) + C_4 \\
&= \frac{1}{A} \left(\int_0^{2\pi} \max_K \log \prod_{j \in K} \frac{\|F(re^{i\theta})\|}{|L_j(F)(re^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{2\pi} \max_K \log \prod_{j \in K} \frac{\|F(r^{-1}e^{i\theta})\|}{|L_j(F)(r^{-1}e^{i\theta})|} \frac{d\theta}{2\pi} \Big) - \frac{M}{A} T_F(r) \\
& + \frac{MN}{A} T_f(r) + C_4,
\end{aligned}$$

trong đó $\max_K$ được lấy trên tất cả các tập con K của $\{1, \dots, T\}$ sao cho các dạng tuyến tính $L_j, j \in K$, độc lập tuyến tính, C_4 là một hằng số độc lập với r . Từ (1.8) và áp dụng Mệnh đề 1.3.4 cho đường cong chỉnh hình $F : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^{M-1}(\mathbb{C})$ và các siêu phẳng xác định bởi các dạng tuyến tính $L_1, \dots, L_T$, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^q m_f(r, D_j) & \leq -\frac{1}{A} N_W(r, 0) + \frac{M}{A} T_F(r) + O_F(r) - \frac{M}{A} T_F(r) \\
& + \frac{MN}{A} T_f(r) + C_4 \\
& = -\frac{1}{A} N_W(r, 0) + \frac{MN}{A} T_f(r) + O_F(r) + C_4, \tag{1.10}
\end{aligned}$$

trong đó W là Wronskian của các hàm $F_1, \dots, F_M$. Theo Định lý cơ bản thứ nhất ta có

$$T_F(r) = dT_f(r) + O(1),$$

điều này kéo theo

$$O_F(r) = O_f(r).$$

Do đó từ (1.10) ta có

$$(qd - \frac{MN}{A}) T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f(r, D_j) - \frac{1}{A} N_W(r, 0) + O_f(r). \tag{1.11}$$

Bây giờ ta ước lượng $\sum_{j=1}^q N_f(r, D_j) - \frac{1}{A} N_W(r, 0)$. Với mỗi $z_0 \in \Delta$ tùy ý, khi đó với mỗi $j = 1, \dots, q$, tồn tại số nguyên $\beta_j \geq 0$ và một hàm phân hình g_j không triệt tiêu trong lân cận U của z_0 sao cho

$$P_j \circ f = (z - z_0)^{\beta_j} g_j,$$

trong đó $\beta_j = 0$ nếu $P_j \circ f$ không triệt tiêu tại z_0 .

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng $P_j \circ f$ triệt tiêu tại z_0 với $1 \leq j \leq q_1$ và $P_j \circ f$ không triệt tiêu tại z_0 với $j > q_1$. Do các siêu mặt $D_j, j = 1, \dots, q$, ở vị trí tổng quát nên $q_1 \leq n$. Cũng không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\beta_j \geq M$ với $1 \leq j \leq q_0$ và $1 \leq \beta_j < M$ với $q_0 < j \leq q_1$ và $\beta_j = 0$ với $q_1 < j \leq q$.

Các đa thức $\{P_1, \dots, P_n\}$ xác định cho ta một cơ sở $\{\psi_1, \dots, \psi_M\}$ của V_N và các dạng tuyến tính độc lập tuyến tính $L_1, \dots, L_M$ sao cho $\psi_t \circ f = L_t(F)$. Theo tính chất của Wronskian ta có

$$\begin{aligned} W &= W(F_1, \dots, F_M) = CW(L_1(F), \dots, L_M(F)) \\ &= C \begin{vmatrix} \psi_1 \circ f & \dots & \psi_M \circ f \\ (\psi_1 \circ f)' & \dots & (\psi_M \circ f)' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\psi_1 \circ f)^{(M-1)} & \dots & (\psi_M \circ f)^{(M-1)} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ta thấy với mỗi $(\mathbf{i}) = (i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}$ và $\psi_t \in \{\psi_1, \dots, \psi_M\}$ có biểu diễn dưới dạng $\psi_t = P_1^{i_1} \dots P_n^{i_n} Q$, trong đó $Q \in V_{N-d\sigma(\mathbf{i})}$ thì

$$\psi_t \circ f = (P_1 \circ f)^{i_1} \dots (P_n \circ f)^{i_n} (Q \circ f),$$

trong đó $(P_j \circ f)^{i_j}(z) = (z - z_0)^{i_j \cdot \beta_j} g_j^{i_j}(z), j = 1, \dots, n$. Chú ý rằng có $\Delta_{(\mathbf{i})}$ phần tử ψ_t như vậy trong cơ sở $\{\psi_1, \dots, \psi_M\}$. Như vậy W triệt tiêu tại z_0 với bậc ít nhất là

$$\begin{aligned} \sum_{(\mathbf{i})} \left(\sum_{j=1}^{q_0} i_j (\beta_j - M) \right) \Delta_{(\mathbf{i})} &= \sum_{(\mathbf{i})} i_j \Delta_{(\mathbf{i})} \sum_{j=1}^{q_0} (\beta_j - M) = A \sum_{j=1}^{q_0} (\beta_j - M) \\ &= A \sum_{j=1}^q \max\{0, \beta_j - M\}. \end{aligned}$$

Bởi vậy

$$\sum_{j=1}^q N_{1,f}(r, D_j) - \frac{1}{A} N_1\left(r, \frac{1}{W}\right) \leq \sum_{j=1}^q N_{1,f}^M(r, D_j)$$

và

$$\sum_{j=1}^q N_{2,f}(r, D_j) - \frac{1}{A} N_2\left(r, \frac{1}{W}\right) \leq \sum_{j=1}^q N_{2,f}^M(r, D_j).$$

Suy ra

$$\sum_{j=1}^q N_f(r, D_j) - \frac{1}{A} N_W(r, 0) \leq \sum_{j=1}^q N_f^M(r, D_j). \quad (1.12)$$

Tiếp theo ta ước lượng về trái của (1.11). Ta biết rằng số các m -bộ các số nguyên không âm mà tổng $\leq S$ bằng với số các $(m+1)$ -bộ các số nguyên không âm mà tổng đúng bằng $S \in \mathbb{Z}$ và bằng $\binom{S+n}{n}$. Từ Mệnh đề 1.3.3 ta có

$$\begin{aligned} A &:= \sum_{\sigma(\mathbf{i}) \leq N/d} i_j \Delta_{(\mathbf{i})} \geq \sum_{\sigma(\mathbf{i}) \leq N/d-n} i_j \Delta_{(\mathbf{i})} = \frac{d^n}{n+1} \sum_{(\mathbf{i})} \sum_{j=1}^{n+1} i_j \\ &= \frac{d^n}{n+1} \sum_{(\widehat{\mathbf{i}})} (N/d - n) = \frac{d^n}{n+1} \binom{N/d - n}{n} \\ &= \frac{N(N-d) \dots (N-nd)}{d(n+1)!}, \end{aligned}$$

trong đó $\sum_{(\widehat{\mathbf{i}})}$ được lấy trên tất cả các bộ $(n+1)$ số nguyên không âm với tổng chính xác bằng $N/d - n$. Hơn nữa

$$M = \dim V_N = \binom{N+n}{n} = \frac{(N+1)(N+2) \dots (N+n)}{n!},$$

suy ra

$$\frac{MN}{A} \leq d(n+1) \prod_{j=1}^n \frac{N+j}{N-(n-j+1)d}.$$

Dễ dàng kiểm tra

$$\frac{N+1}{N-nd} \geq \frac{N+2}{N-(n-1)d} \geq \dots \geq \frac{N+n}{N-d}.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
\frac{MN}{A} &\leq d(n+1) \left(\frac{N+1}{N-nd} \right)^n \\
&= d(n+1) \left(1 + \frac{1+nd}{N-nd} \right)^n \\
&= d(n+1) \left(1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1+nd}{N-nd} \right)^k \right).
\end{aligned}$$

Nếu ta đặt

$$N = d([(n+1)^2(2^n - 1)\varepsilon^{-1}] + n + 1),$$

thì N chia hết cho d và

$$\begin{aligned}
\frac{MN}{A} &\leq d(n+1) \left(1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1+nd}{N-nd} \right) \\
&= d(n+1) \left(1 + (2^n - 1) \frac{1+nd}{N-nd} \right) \\
&\leq d(n+1+\varepsilon).
\end{aligned}$$

Do đó

$$(qd - \frac{MN}{A})T_f(r) \geq d(q - n - 1 - \varepsilon)T_f(r). \quad (1.13)$$

Kết hợp các công thức (1.11), (1.13) và (1.12) với nhau, ta có

$$\| \quad d(q - n - 1 - \varepsilon)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^M(r, D_j) + O_f(r). \quad (1.14)$$

Bây giờ ta ước lượng M , ta có

$$\begin{aligned}
M = \dim V_N &= \binom{N+n}{n} = \frac{(N+1)(N+2)\dots(N+n)}{n!} \leq (N+1)^n \\
&\leq (d([(n+1)^2(2^n - 1)\varepsilon^{-1}] + n + 1) + 1)^n \\
&\leq (d[(n+1)^2 2^n \varepsilon^{-1}] + 1)^n.
\end{aligned}$$

Do đó nếu

$$\alpha \geq (d[(n+1)^2 2^n \varepsilon^{-1}] + 1)^n$$

thì $\alpha \geq M$ nên $N_f^M(r, D_j) \leq N_f^\alpha(r, D_j)$ với mọi $j = 1, 2, \dots, q$. Do đó, từ (1.14) ta có

$$\| \quad d(q - n - 1 - \varepsilon)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^\alpha(r, D_j) + O_f(r). \quad (1.15)$$

Từ bất đẳng thức này ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Bây giờ ta xem xét trường hợp $P_1, P_2, \dots, P_q$ là có bậc không giống nhau. Với mọi $j \in \{1, \dots, q\}$, ta đặt $Q_j = P_j^{d/d_j}$, trong đó d là bội nhỏ nhất của $d_1, d_2, \dots, d_q$. Khi đó $Q_1, \dots, Q_q$ có cùng bậc d . Từ (1.15) ta có

$$\| \quad d(q - n - 1 - \varepsilon)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^\alpha(r, Q_j) + O_f(r). \quad (1.16)$$

Chú ý rằng nếu $z \in \mathbb{C}$ là không điểm của $P_j \circ f$ với bội β thì z là không điểm của $P_j^{d/d_j} \circ f$ với bội $\beta \frac{d}{d_j}$. Điều này kéo theo rằng

$$\begin{aligned} N_f^\alpha(r, P_j^{d/d_j}) &= N_{1,f}^\alpha(r, P_j^{d/d_j}) + N_{2,f}^\alpha(r, P_j^{d/d_j}) \\ &\leq \frac{d}{d_j} N_{1,f}^\alpha(r, P_j) + \frac{d}{d_j} N_{2,f}^\alpha(r, P_j) \\ &= \frac{d}{d_j} N_f^\alpha(r, P_j). \end{aligned}$$

Do đó từ (1.15) ta có

$$\begin{aligned} (q - (n + 1) - \varepsilon)T_f(r) &\leq \sum_{j=1}^q d^{-1} N_f^\alpha(r, P_j^{d/d_j}) + O_f(r) \\ &\leq \sum_{j=1}^q d_j^{-1} N_f^\alpha(r, Q_j) + O_f(r). \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

Kết luận Chương 1

Trong Chương 1, Luận án đã thu được các kết quả chính sau:

- Giới thiệu một số khái niệm về hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng của đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên kết hợp với các siêu mặt. Hàm đặc trưng là khái niệm quen thuộc đã được xây dựng trước, hàm đếm, hàm xấp xỉ kết hợp với các siêu mặt được chúng tôi xây dựng dựa trên những khái niệm quen thuộc trong Lý thuyết Nevanlinna-Cartan.
- Phát biểu và chứng minh Định lý 1.2.3 về một dạng Định lý cơ bản thứ nhất; phát biểu và chứng minh Định lý 1.3.6 về một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt.

Chương 2

Vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên

2.1. Một số kiến thức chuẩn bị

2.1.1. Hàm đếm có trọng

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên một hình vành khuyên. Để trình bày các kết quả chính, trong phần này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản và kết quả sử dụng trong chứng minh.

Cho U là một miền trong $\mathbb{C}$, $f(z)$ là một hàm phân hình trên U và z_0 là một điểm thuộc U . Với M, k là các số nguyên dương, ta kí hiệu

$$\begin{aligned}\nu_f(z_0, \leq k) &= \begin{cases} \nu_f(z_0) & \text{nếu } \nu_f(z_0) \leq k, \\ 0 & \text{trong các trường còn lại;} \end{cases} \\ \nu_f^M(z_0, \leq k) &= \begin{cases} \nu_f^M(z_0) & \text{nếu } \nu_f^M(z_0) \leq k, \\ 0 & \text{trong các trường còn lại;} \end{cases} \\ \nu_f(z_0, > k) &= \begin{cases} \nu_f(z_0) & \text{nếu } \nu_f(z_0) > k, \\ 0 & \text{trong các trường còn lại;} \end{cases} \\ \nu_f^M(z_0, > k) &= \begin{cases} \nu_f^M(z_0) & \text{nếu } \nu_f^M(z_0) > k, \\ 0 & \text{trong các trường còn lại.} \end{cases}\end{aligned}$$

Cho $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $f_0, \dots, f_n$ là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung trong Δ .

Cho D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, xác định bởi đa thức thuần nhất Q . Cho M, k là các số nguyên dương, với $1 < r < R$, kí hiệu $n_{1,f}(r, D, \leq k)$, $n_{2,f}(r, D, \leq k)$ lần lượt là số các không điểm có bội không vượt quá k của $Q(f)$ trong $\Delta_{1,r}$ và $\Delta_{2,r}$ kể cả bội, $n_{1,f}^M(r, D, \leq k)$, $n_{2,f}^M(r, D, \leq k)$ lần lượt là số các không điểm có bội không vượt quá k của $Q(f)$ trong $\Delta_{1,r}$ và $\Delta_{2,r}$ bội cắt cụt bởi M , tức là

$$\begin{aligned} n_{1,f}(r, D, \leq k) &= \sum_{z \in \Delta_1} \nu_{Q(f)}(z, \leq k), \\ n_{2,f}(r, D, \leq k) &= \sum_{z \in \Delta_2} \nu_{Q(f)}(z, \leq k), \\ n_{1,f}^M(r, D, \leq k) &= \sum_{z \in \Delta_1} \nu_{Q(f)}^M(z, \leq k), \\ n_{2,f}^M(r, D, \leq k) &= \sum_{z \in \Delta_2} \nu_{Q(f)}^M(z, \leq k). \end{aligned}$$

Ta kí hiệu

$$\begin{aligned} N_{1,f}(r, D, \leq k) &= N_{1,f}(r, Q, \leq k) = \int_{1/r}^1 \frac{n_{1,f}(r, D, \leq k)}{t} dt; \\ N_{2,f}(r, D, \leq k) &= N_{2,f}(r, Q, \leq k) = \int_1^r \frac{n_{2,f}(r, D, \leq k)}{t} dt; \\ N_{1,f}^M(r, D, \leq k) &= N_{1,f}^M(r, Q, \leq k) = \int_{1/r}^1 \frac{n_{1,f}^M(r, D, \leq k)}{t} dt; \\ N_{2,f}^M(r, D, \leq k) &= N_{2,f}^M(r, Q, \leq k) = \int_1^r \frac{n_{2,f}^M(r, D, \leq k)}{t} dt. \end{aligned}$$

Các hàm đếm được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} N_f(r, D, \leq k) &= N_f(r, Q, \leq k) = N_{1,f}(r, D, \leq k) + N_{2,f}(r, D, \leq k), \\ N_f^M(r, D, \leq k) &= N_f^M(r, Q, \leq k) = N_{1,f}^M(r, D, \leq k) + N_{2,f}^M(r, D, \leq k). \end{aligned}$$

Tương tự ta kí hiệu $n_{1,f}(r, D, > k)$, $n_{2,f}(r, D, > k)$ lần lượt là số các không điểm có bội không nhỏ hơn $k + 1$ của $Q(f)$ trong $\Delta_{1,r}$ và $\Delta_{2,r}$ kể cả bội, $n_{1,f}^M(r, D, > k)$, $n_{2,f}^M(r, D, > k)$ lần lượt là số các không điểm có bội không nhỏ hơn $k + 1$ của $Q(f)$ trong $\Delta_{1,r}$ và $\Delta_{2,r}$ bội cắt cụt bởi M , tức là

$$\begin{aligned}
n_{1,f}(r, D, > k) &= \sum_{z \in \Delta_1} \nu_{Q(f)}(z, > k), \\
n_{2,f}(r, D, > k) &= \sum_{z \in \Delta_2} \nu_{Q(f)}(z, > k), \\
n_{1,f}^M(r, D, > k) &= \sum_{z \in \Delta_1} \nu_{Q(f)}^M(z, > k), \\
n_{2,f}^M(r, D, > k) &= \sum_{z \in \Delta_2} \nu_{Q(f)}^M(z, > k).
\end{aligned}$$

Ta kí hiệu

$$\begin{aligned}
N_{1,f}(r, D, > k) &= N_{1,f}(r, Q, > k) = \int_{1/r}^1 \frac{n_{1,f}(r, D, > k)}{t} dt; \\
N_{2,f}(r, D, > k) &= N_{2,f}(r, Q, > k) = \int_1^r \frac{n_{2,f}(r, D, > k)}{t} dt; \\
N_{1,f}^M(r, D, > k) &= N_{1,f}^M(r, Q, > k) = \int_{1/r}^1 \frac{n_{1,f}^M(r, D, > k)}{t} dt; \\
N_{2,f}^M(r, D, > k) &= N_{2,f}^M(r, Q, > k) = \int_1^r \frac{n_{2,f}^M(r, D, > k)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Các hàm đếm được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned}
N_f(r, D, > k) &= N_f(r, Q, > k) = N_{1,f}(r, D, > k) + N_{2,f}(r, D, > k), \\
N_f^M(r, D, > k) &= N_f^M(r, Q, > k) = N_{1,f}^M(r, D, > k) + N_{2,f}^M(r, D, > k).
\end{aligned}$$

Từ định nghĩa các hàm đếm chúng ta dễ dàng suy ra được một số quan hệ giữa các loại hàm đếm: kể cả bội, bội cắt cụt, hàm đếm chỉ tính tại các bội không vượt qua k hay không nhỏ hơn $k+1$ trong mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 2.1.1. *Cho $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $f_0, \dots, f_n$ là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung trong Δ và D là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $f(\mathbb{C}) \not\subset D$. Khi đó với mỗi số thực dương $r > 0$, với các số nguyên dương k, M ta có*

- 1) $N_f(r, D) = N_{f, \leq k}(r, D) + N_{f, > k}(r, D);$
- 2) $N_f^M(r, D) = N_{f, \leq k}^M(r, D) + N_{f, > k}^M(r, D);$
- 3) $N_f^M(r, D) \leq N_f(r, D);$
- 4) $N_f^1(r, D) \leq N_f^M(r, D) \leq MN_f^1(r, D);$
- 5) $N_{f, \leq k}^1(r, D) \leq N_{f, \leq k}^M(r, D) \leq MN_{f, \leq k}^1(r, D);$
- 6) $N_{f, > k}^1(r, D) \leq N_{f, > k}^M(r, D) \leq MN_{f, > k}^1(r, D).$

2.1.2. Hai định lý cơ bản với mục tiêu là siêu phẳng

Trong phần này chúng tôi nhắc lại hai định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai được chứng minh bởi H. T. Phương và N. V. Thìn vào năm 2015, cần thiết cho việc chứng minh các kết quả chính của chúng tôi.

Mệnh đề 2.1.2 ([38]). *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình và H là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho ảnh của f không chứa trong siêu phẳng H . Khi đó với mỗi $1 < r < R$, ta có*

$$T_f(r) = m_f(r, H) + N_f(r, H) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là một đại lượng giới nội không phụ thuộc vào r .

Mệnh đề 2.1.3 ([38]). *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $H_1, \dots, H_q$ là một họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó ta có*

$$\| \quad (q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^n(r, H_j) + O_f(r),$$

trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R_0 = +\infty \\ O(\log \frac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R_0 < +\infty. \end{cases}$$

2.2. Hai định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình

Trong phần này chúng tôi phát biểu và chứng minh hai kết quả về các điều kiện đại số liên quan đến các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese để hai đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên là trùng nhau.

2.2.1. Trường hợp không xét nghịch ảnh của từng siêu mặt

Gọi D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và Q là đa thức thuần nhất bậc d , với các hệ số lấy trong $\mathbb{C}$, xác định D . Khi đó Q biểu diễn được dưới dạng:

$$Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \dots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$ và $i_{k0} + \dots + i_{kn} = d$, $a_k \in \mathbb{C}$ với $k = 1, \dots, n_d$. Ta gọi $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n_d})$ là vectơ liên kết với siêu mặt D (hoặc Q).

Tiếp theo ta nhắc lại khái niệm họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ các siêu mặt cố định, trong đó D_j được xác định bởi đa thức thuần nhất Q_j trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ bậc d_j , với mỗi $j = 1, \dots, q$. Gọi $m_{\mathcal{D}}$ là bội chung nhỏ nhất của các bậc $d_1, \dots, d_q$, kí hiệu

$$n_{\mathcal{D}} = \binom{n + m_{\mathcal{D}}}{n} - 1.$$

Với mỗi $j = 1, \dots, q$, ta đặt $Q_j^* = Q_j^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$ và gọi $\mathbf{a}_j^*$ là vectơ liên kết với đa thức Q_j^* . Họ $\mathcal{D}$ các siêu mặt cố định được gọi là ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese nếu $q > n_{\mathcal{D}}$ và với mỗi họ tùy ý thì các chỉ số $i_1, \dots, i_{n_{\mathcal{D}}+1} \in \{1, \dots, q\}$, các vectơ $\mathbf{a}_{i_1}^*, \dots, \mathbf{a}_{i_{n_{\mathcal{D}}+1}}^*$ là độc lập tuyến tính.

Cho đường cong chỉnh hình $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, với một siêu mặt D bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ xác định bởi đa thức thuần nhất Q , ta kí hiệu

$$\overline{E}_f(D) := \{z \in \Delta \mid Q \circ f(z) = 0 \text{ không kể bội}\};$$

$$E_f(D) := \{(z, m) \in \Delta \times \mathbb{N} \mid Q \circ f(z) = 0 \text{ và } \nu_{Q(f)}(z) = m \geq 1\}.$$

Với một họ các siêu mặt $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta định nghĩa

$$\overline{E}_f(\mathcal{D}) := \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} \overline{E}_f(D_j) \quad \text{và} \quad E_f(\mathcal{D}) := \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} E_f(D_j).$$

Với các khái niệm và kí hiệu như trên, năm 2021 chúng tôi đã chứng minh một dạng định lý duy nhất cho đường cong chẵn hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt như sau:

Định lý 2.2.1 ([39]). *Cho f và g là hai đường cong chẵn hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}^2/m_{\mathcal{D}}$ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $f \not\equiv g$. Gọi k là số nguyên dương đủ lớn, ta sẽ chọn sau, trước hết ta chứng minh với mỗi $r, 1 < r < R$:

$$\begin{aligned} & (q(k+1 - n_{\mathcal{D}}) - (n_{\mathcal{D}} + 1)(k+1))T_f(r) \\ & \leq \frac{n_{\mathcal{D}}^2 k}{m_{\mathcal{D}}} (T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)O_f(r), \end{aligned} \quad (2.1)$$

trong đó $O_f(r)$ xác định như trong Định lý 2.1.3.

Thật vậy, giả sử $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_n)$ là biểu diễn tối giản của f . Gọi Q_j là đa thức thuần nhất bậc d_j trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ xác định D_j với mỗi $j = 1, \dots, q$. Với mỗi $j = 1, \dots, q$, đặt

$$Q_j^* = Q_j^{m_{\mathcal{D}}/d_j},$$

khi đó các đa thức $Q_1^*, \dots, Q_q^*$ có cùng bậc $m_{\mathcal{D}}$ vì $m_{\mathcal{D}}$ là bội số chung nhỏ nhất của $d_1, \dots, d_q$.

Kí hiệu $(z_0 : \cdots : z_n)$ là hệ tọa độ thuần nhất trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và $\{\mathbf{I}_0, \dots, \mathbf{I}_{n_{\mathcal{D}}}\}$ là tập hợp tất cả các $(n+1)$ -bộ số tự nhiên sao cho $\sigma(\mathbf{I}_j) = m_{\mathcal{D}}, j = 0, \dots, n_{\mathcal{D}}$ đã được sắp xếp theo trật tự từ điển, tức là $\mathbf{I}_i < \mathbf{I}_j$ với mọi $i < j \in \{0, \dots, n_{\mathcal{D}}\}$. Với mỗi $\mathbf{z} = (z_0 : \cdots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta kí hiệu

$$\mathbf{z}^{\mathbf{I}} = z_0^{i_0} \cdots z_n^{i_n},$$

trong đó $\mathbf{I} = (i_0, \dots, i_n) \in \{\mathbf{I}_0, \dots, \mathbf{I}_{n_{\mathcal{D}}}\}$.

Kí hiệu

$$\varrho_{m_{\mathcal{D}}} : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$$

là phép nhúng Veronese bậc $m_{\mathcal{D}}$, tức là nếu kí hiệu $(w_0 : \cdots : w_{n_{\mathcal{D}}})$ là hệ tọa độ thuần nhất trong $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ thì $\varrho_{m_{\mathcal{D}}}$ được xác định như sau

$$\varrho_{m_{\mathcal{D}}}(\mathbf{z}) = (w_0(\mathbf{z}) : \cdots : w_{n_{\mathcal{D}}}(\mathbf{z})),$$

trong đó $w_j(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^{\mathbf{I}_j}, \mathbf{I}_j \in \{\mathbf{I}_0, \dots, \mathbf{I}_{n_{\mathcal{D}}}\}$ với mỗi $j = 0, \dots, n_{\mathcal{D}}$.

Ta đặt

$$F = (F_0 : \cdots : F_{n_{\mathcal{D}}}) = \varrho_{m_{\mathcal{D}}} \circ f,$$

dễ thấy $F_j = \mathbf{f}^{\mathbf{I}_j}, j = 0, \dots, n_{\mathcal{D}}$. Khi đó F là đường cong chỉnh hình từ Δ vào $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ và $\mathbf{F} = (F_0, \dots, F_{n_{\mathcal{D}}})$ là một biểu diễn tối giản của F . Từ giả thiết rằng f là không suy biến đại số ta suy ra F không suy biến tuyến tính.

Với mỗi đa thức $D_j \in \{D_1, \dots, D_q\}$, kí hiệu $\mathbf{a}_j = (a_{j0}, \dots, a_{jn_{\mathcal{D}}})$ là vectơ liên kết với Q_j^* . Với mỗi $j = 1, \dots, q$, kí hiệu

$$L_j = a_{j0}w_0 + \cdots + a_{jn_{\mathcal{D}}}w_{n_{\mathcal{D}}},$$

khi đó L_j là một dạng tuyến tính trong $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$. Gọi H_j là siêu phẳng trong $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ xác định bởi dạng tuyến tính L_j và ta nói rằng siêu phẳng H_j liên kết với siêu mặt D_j . Theo giả thiết họ $\{D_1, \dots, D_q\}$ ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta suy ra họ các siêu phẳng $\{H_1, \dots, H_q\}$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$. Áp dụng Mệnh đề 2.1.3 cho ánh xạ chỉnh hình $F : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^{n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{C})$ và họ các siêu phẳng H_j ở vị trí tổng quát ta có

$$\| (q - n_{\mathcal{D}} - 1)T_F(r) \leq \sum_{j=1}^q N_F^{n_{\mathcal{D}}}(r, H_j) + O_F(r). \quad (2.2)$$

Bây giờ ta ước lượng Bất đẳng thức (2.2). Theo định nghĩa đường cong F , với mỗi $j = 1, \dots, q$,

$$H_j \circ F = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{F} := \sum_{k=0}^{n_{\mathcal{D}}} a_{jk} \cdot F_k = Q_j^* \circ f.$$

Suy ra

$$N_f(r, Q_j^*) = N_F(r, H_j); \quad N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^*) = N_F^{n_{\mathcal{D}}}(r, H_j). \quad (2.3)$$

Hơn nữa, từ định nghĩa đường cong F , ta có

$$\begin{aligned} m_f(r, Q_j^*) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^{m_{\mathcal{D}}}}{|Q_j^* \circ f(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^{m_{\mathcal{D}}}}{|Q_j^* \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|F(re^{i\theta})\|}{|H_j \circ F(re^{i\theta})|} d\theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|F(r^{-1}e^{i\theta})\|}{|H_j \circ F(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta + O(1) \\ &= m_F(r, H_j) + O(1). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Kết hợp (2.3) và Định lý 2.1.2 và (2.5) ta có

$$\begin{aligned} T_F(r) &= N_F(r, H_j) + m_F(r, H_j) + O(1) \\ &= N_f(r, Q_j^*) + m_f(r, Q_j^*) + O(1). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Từ Mệnh đề 1.1.8, ta có

$$\begin{aligned} &N_f(r, Q_j^*) + m_f(r, Q_j^*) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^{m_{\mathcal{D}}}}{|Q_j^* \circ f(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^{m_{\mathcal{D}}}}{|Q_j^* \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Q_j^* \circ f(re^{i\theta})| d\theta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Q_j^* \circ f(r^{-1}e^{i\theta})| d\theta + O(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta \right) + O(1) \\
&= m_{\mathcal{D}} T_f(r) + O(1).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Như vậy, từ (2.6) ta có

$$T_F(r) = m_{\mathcal{D}} T_f(r) + O(1). \tag{2.8}$$

Điều này kéo theo

$$O_F(r) = O_f(r). \tag{2.9}$$

Kết hợp (2.2), (2.3), (2.8) và (2.9), ta có

$$\| (q - n_{\mathcal{D}} - 1) T_f(r) \leq \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^*) + O_f(r). \tag{2.10}$$

Bây giờ ta ước lượng vế phải của (2.10). Với mỗi $j \in \{1, \dots, q\}$, từ Mệnh đề 2.1.1 và (2.7) ta có

$$\begin{aligned}
N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^*) &= N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* \leq k) + N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* > k) \\
&= \frac{k}{k+1} N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* \leq k) + \frac{k}{k+1} N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* \leq k) \\
&\quad + N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* > k) \\
&\leq \frac{k}{k+1} N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* \leq k) + \frac{n_{\mathcal{D}}}{k+1} N_f^1(r, Q_j^* \leq k) \\
&\quad + n_{\mathcal{D}} N_f^1(r, Q_j^* > k) \\
&\leq \frac{k}{k+1} N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* \leq k) + \frac{n_{\mathcal{D}}}{k+1} N_f(r, Q_j^* \leq k) \\
&\quad + \frac{n_{\mathcal{D}}}{k+1} N_f(r, Q_j^* > k) \\
&\leq \frac{k}{k+1} N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* \leq k) + \frac{n_{\mathcal{D}}}{k+1} N_f(r, Q_j^*) \\
&\leq \frac{k}{k+1} N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^* \leq k) + \frac{n_{\mathcal{D}} m_{\mathcal{D}}}{k+1} T_f(r) + O(1),
\end{aligned}$$

Lấy tổng trên tập các chỉ số $j = 1, 2, \dots, q$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^*) &\leq \frac{k}{(k+1)m_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^*, \leq k) \\ &\quad + \frac{qn_{\mathcal{D}}}{k+1} T_f(r) + O(1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Áp dụng (2.11) vào (2.10), ta có

$$\begin{aligned} (q - n_{\mathcal{D}} - 1)T_f(r) &\leq \frac{k}{m_{\mathcal{D}}(k+1)} \sum_{j=1}^q N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^*, \leq k) \\ &\quad + \frac{qn_{\mathcal{D}}}{k+1} T_f(r) + O_f(r). \end{aligned}$$

Tương đương với

$$\left(q - \frac{qn_{\mathcal{D}}}{k+1} - n_{\mathcal{D}} - 1\right)T_f(r) \leq \frac{k}{m_{\mathcal{D}}(k+1)} \sum_{j=1}^q N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^*, \leq k) + O_f(r).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &(q(k+1 - n_{\mathcal{D}}) - (n_{\mathcal{D}} + 1)(k+1))T_f(r) \\ &\leq \frac{k}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q N_f^{n_{\mathcal{D}}}(r, Q_j^*, \leq k) + (k+1)O_f(r) \\ &\leq \frac{n_{\mathcal{D}}k}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q N_f^1(r, Q_j^*, \leq k) + (k+1)O_f(r). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Do $f \not\equiv g$ nên tồn tại hai chỉ số $\alpha, \beta \in \{0, \dots, n\}$, $\alpha \neq \beta$ sao cho $f_{\alpha}g_{\beta} \not\equiv f_{\beta}g_{\alpha}$. Giả sử $z_0 \in \Delta$ là không điểm của $Q_j^*(f)$ với bội nhỏ hơn hay bằng k , khi đó z_0 là không điểm của $Q_j(f)$ vì $Q_j^* = Q_j^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$, suy ra $z_0 \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Từ giả thiết ta có $g(z_0) = f(z_0)$, kéo theo

$$\frac{f_{\alpha}(z_0)}{f_{\beta}(z_0)} = \frac{g_{\alpha}(z_0)}{g_{\beta}(z_0)}.$$

Do đó

$$f_{\alpha}(z_0)g_{\beta}(z_0) = f_{\beta}(z_0)g_{\alpha}(z_0)$$

vì $f_{\alpha}, g_{\alpha}, f_{\beta}, g_{\beta}$ là các hàm chỉnh hình. Điều này kéo theo z_0 là không điểm của hàm $f_{\alpha}g_{\beta} - f_{\beta}g_{\alpha}$. Chú ý rằng họ $\mathcal{D}$ ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng

Veronese nên tồn tại không quá $n_{\mathcal{D}}$ siêu mặt D_j trong họ $\mathcal{D}$ sao cho

$$D_j \circ f(z_0) = Q(f)(z_0) = 0.$$

Điều này kéo theo

$$\sum_{j=1}^q N_f^1(r, Q_j^*, \leq k) \leq n_{\mathcal{D}} N_0 \left(r, \frac{1}{f_{\alpha} g_{\beta} - f_{\beta} g_{\alpha}} \right). \quad (2.13)$$

Đặt $H = f_{\alpha} g_{\beta} - f_{\beta} g_{\alpha}$, khi đó H là hàm chỉnh hình, từ Mệnh đề 1.1.8 ta có

$$N_0(r, \frac{1}{H}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |H(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |H(r^{-1}e^{i\theta})| d\theta + O(1).$$

Ngoài ra, với mỗi $z \in \Delta$ ta có

$$\begin{aligned} \log |H(z)| &= \log |(f_{\alpha} g_{\beta} - f_{\beta} g_{\alpha})(z)| \\ &\leq \log \max\{|f_{\alpha}(z)g_{\beta}(z)|, |f_{\beta}(z)g_{\alpha}(z)|\} + \log 2 \\ &= \max\{\log |f_{\alpha}(z)g_{\beta}(z)|, \log |f_{\beta}(z)g_{\alpha}(z)|\} + \log 2 \\ &= \max\{\log |f_{\alpha}(z)| + \log |g_{\beta}(z)|, \log |f_{\beta}(z)| + \log |g_{\alpha}(z)|\} \\ &\quad + \log 2 \\ &\leq \max\{\log |f_{\alpha}(z)|, \log |f_{\beta}(z)|\} + \max\{\log |g_{\alpha}(z)|, \log |g_{\beta}(z)|\} \\ &\quad + \log 2 \\ &= \log \max\{|f_{\alpha}(z)|, |f_{\beta}(z)|\} + \log \max\{|g_{\alpha}(z)|, |g_{\beta}(z)|\} + \log 2 \\ &\leq \log \|f(z)\| + \log \|g(z)\| + \log 2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |H(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |H(r^{-1}e^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|g(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|g(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta + O(1). \\ &= T_f(r) + T_g(r) + O(1). \end{aligned}$$

Từ đó, (2.13) trở thành

$$\sum_{j=1}^q N_f^1(r, Q_j^*, \leq k) \leq n_{\mathcal{D}}(T_f(r) + T_g(r)) + O(1).$$

Do đó (2.12) trở thành

$$\begin{aligned} & (q(k+1-n_{\mathcal{D}})-(n_{\mathcal{D}}+1)(k+1))T_f(r) \\ & \leq \frac{n_{\mathcal{D}}^2 k}{m_{\mathcal{D}}}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)O_f(r). \end{aligned}$$

Như vậy (2.1) được chứng minh. Tương tự cho ánh xạ g ta có

$$\begin{aligned} & (q(k+1-n_{\mathcal{D}})-(n_{\mathcal{D}}+1)(k+1))T_g(r) \\ & \leq \frac{n_{\mathcal{D}}^2 k}{m_{\mathcal{D}}}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)O_g(r). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Kết hợp (2.1) và (2.14), ta có

$$\begin{aligned} & (q(k+1-n_{\mathcal{D}})-(n_{\mathcal{D}}+1)(k+1))(T_f(r) + T_g(r)) \\ & \leq \frac{2n_{\mathcal{D}}^2 k}{m_{\mathcal{D}}}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)(O_f(r) + O_g(r)). \end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} & q(k+1-n_{\mathcal{D}}) - (n_{\mathcal{D}}+1)(k+1) - \frac{2n_{\mathcal{D}}^2 k}{m_{\mathcal{D}}} \\ & \leq \frac{O_f(r) + O_g(r)}{T_f(r) + T_g(r)}(k+1) \end{aligned} \quad (2.15)$$

đúng với mọi số $1 < r < R$. Từ giả thiết $O_f(r)$ và $O_g(r)$, ta có

$$\limsup_{r \rightarrow R} \frac{O_f(r) + O_g(r)}{T_f(r) + T_g(r)} = 0.$$

Cho $r \rightarrow R$ trong (2.15) ta được

$$q(k+1-n_{\mathcal{D}}) - (n_{\mathcal{D}}+1)(k+1) - \frac{2n_{\mathcal{D}}^2 k}{m_{\mathcal{D}}} \leq 0.$$

Điều này tương đương với

$$k(qm_{\mathcal{D}} - (n_{\mathcal{D}}+1)m_{\mathcal{D}} - 2n_{\mathcal{D}}^2) + (q - qn_{\mathcal{D}} - (n_{\mathcal{D}}+1))m_{\mathcal{D}} \leq 0.$$

Nếu ta chọn

$$k > \frac{(qn_{\mathcal{D}} - q + n_{\mathcal{D}} + 1)m_{\mathcal{D}}}{qm_{\mathcal{D}} - (n_{\mathcal{D}} + 1)m_{\mathcal{D}} - 2n_{\mathcal{D}}^2},$$

thì từ giả thiết $q > n_{\mathcal{D}} + 1 + \frac{2n_{\mathcal{D}}^2}{m_{\mathcal{D}}}$ ta có mâu thuẫn. Như vậy $f_i g_j \equiv f_j g_i$ với mỗi $i \neq j \in \{0, \dots, n\}$, tức là $f \equiv g$. Điều này kéo theo kết luận của Định lý 2.2.1. $\square$

2.2.2. Trường hợp có xem xét điều kiện nghịch ảnh của từng siêu mặt

Định lý 2.2.2 ([39]). *Cho f và g là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}/m_{\mathcal{D}}$ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử*

- (a) $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$,
- (b) $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ và $\overline{E}_g(D_i) \cap \overline{E}_g(D_j) = \emptyset$ với mọi $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$.

Khi đó $f \equiv g$.

Chứng minh. Ta cũng chứng minh Định lý 2.2.2 bằng phản chứng. Giả sử $f \not\equiv g$. Gọi k là một số nguyên dương đủ lớn ta sẽ chọn sau. Với các giả thiết trong Định lý 2.2.2 và chứng minh tương tự như Định lý 2.2.1, với mỗi số thực $r : 1 < r < R$ ta có

$$\begin{aligned} & (q(k+1 - n_{\mathcal{D}}) - (n_{\mathcal{D}} + 1)(k+1))T_f(r) \\ & \leq \frac{n_{\mathcal{D}}k}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{j=1}^q N_f^1(r, Q_j^*, \leq k) + (k+1)O_f(r), \end{aligned} \quad (2.16)$$

đúng với mỗi $j = 1, 2, \dots, q$, trong đó $Q_j^* = Q_j^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$.

Vì $f \not\equiv g$ nên tồn tại hai số $\alpha, \beta \in \{0, \dots, n\}, \alpha \neq \beta$ sao cho

$$f_{\alpha} g_{\beta} \not\equiv f_{\beta} g_{\alpha}.$$

Ta biết rằng, nếu $z_0 \in \Delta$ là không điểm của $Q_j^*(f)$ với bội nhỏ hơn hoặc bằng k , thì z_0 là không điểm của hàm $f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha$. Từ giả thiết

$$\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$$

với mỗi cặp $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$, ta suy ra nếu z_0 là không điểm của $Q_j^*(f)$ thì z_0 sẽ không là không điểm của $Q_i^*(f)$ với mọi $i \in \{1, \dots, q\}, i \neq j$. Do đó

$$\sum_{j=1}^q N_f^1(r, Q_j^*, \leq k) \leq N\left(r, \frac{1}{f_\alpha g_\beta - f_\beta g_\alpha}\right) \leq T_f(r) + T_g(r) + O(1).$$

Như vậy Bất đẳng thức (2.16) trở thành

$$\begin{aligned} & (q(k+1 - n_{\mathcal{D}}) - (n_{\mathcal{D}} + 1)(k+1))T_f(r) \\ & \leq \frac{n_{\mathcal{D}}k}{m_{\mathcal{D}}}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)O_f(r). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Tương tự với ánh xạ g ta có

$$\begin{aligned} & (q(k+1 - n_{\mathcal{D}}) - (n_{\mathcal{D}} + 1)(k+1))T_g(r) \\ & \leq \frac{n_{\mathcal{D}}k}{m_{\mathcal{D}}}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)O_g(r). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Kết hợp (2.17) và (2.18), ta có

$$\begin{aligned} & (q(k+1 - n_{\mathcal{D}}) - (n_{\mathcal{D}} + 1)(k+1))(T_f(r) + T_g(r)) \\ & \leq \frac{2n_{\mathcal{D}}k}{m_{\mathcal{D}}}(T_f(r) + T_g(r)) + (k+1)(O_f(r) + O_g(r)). \end{aligned}$$

Kéo theo

$$\begin{aligned} & qm_{\mathcal{D}}(k+1 - n_{\mathcal{D}}) - m_{\mathcal{D}}(n_{\mathcal{D}} + 1)(k+1) - 2n_{\mathcal{D}}k \\ & \leq \frac{O_f(r) + O_g(r)}{T_f(r) + T_g(r)}(k+1)m_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

đúng với mọi số thực $1 < r < R$. Cho $r \rightarrow R$, ta có

$$k(qm_{\mathcal{D}} - (n_{\mathcal{D}} + 1)m_{\mathcal{D}} - 2n_{\mathcal{D}}) + (q - qn_{\mathcal{D}} - (n_{\mathcal{D}} + 1))m_{\mathcal{D}} \leq 0.$$

Nếu ta chọn

$$k > \frac{(qn_{\mathcal{D}} - q + n_{\mathcal{D}} + 1)m_{\mathcal{D}}}{qm_{\mathcal{D}} - (n_{\mathcal{D}} + 1)m_{\mathcal{D}} - 2n_{\mathcal{D}}},$$

thì từ giả thiết $q > n_{\mathcal{D}} + 1 + \frac{2n_{\mathcal{D}}}{m_{\mathcal{D}}}$ ta có mâu thuẫn. Như vậy $f_i g_j \equiv f_j g_i$ với mọi $i \neq j \in \{0, \dots, n\}$, tức là $f \equiv g$. Định lý 2.2.2 được chứng minh. $\square$

Nhận xét. 1. Trong Định lý 2.2.2, số siêu mặt tối thiểu thỏa mãn giả thiết là

$$n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}/m_{\mathcal{D}}.$$

Chú ý rằng khi họ các siêu mặt là các siêu phẳng thì vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese chính là ở vị trí tổng quát thông thường trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Trong trường hợp này $n_{\mathcal{D}} = n$ và $m_{\mathcal{D}} = 1$ nên $q = 3n + 2$, trùng với số siêu phẳng cần thiết trong kết quả của Fujimoto.

2. Ta biết rằng, một hàm phân hình h trên hình vành khuyên là siêu việt khi $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T_0(r, h)}{\log r} = \infty$ khi $R = \infty$ và $\limsup_{r \rightarrow R} \frac{T_0(r, h)}{-\log(R - r)} = \infty$ khi $R < \infty$. Do đó, đối với một đường cong chỉnh hình $f = (f_0 : \dots : f_n)$ thì chỉ cần một hàm f_j là siêu việt thì $O_f(r) = o(T_f(r))$.

Kết luận Chương 2

Trong Chương 2, luận án đã thu được các kết quả chính sau :

- Giới thiệu một số khái niệm cơ bản cần thiết sử dụng đến trong chứng minh vấn đề duy nhất của đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên: hàm đếm bổ sung, các định lý cơ bản cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu phẳng.

- Phát biểu và chứng minh hai định lý: Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.2 về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong các trường hợp siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese. Hai kết quả này cho chúng ta các điều kiện đủ để hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số trên một hình vành khuyên là đồng nhất.

Chương 3

Vấn đề duy nhất cho hàm nguyên liên quan đến giả thuyết Brück

3.1. Kiến thức bổ trợ

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kí hiệu trong Lý thuyết Nevanlinna cho đa thức vi phân và họ chuẩn tắc các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, cần thiết trong các chứng minh kết quả của chúng tôi.

3.1.1. Phân bố giá trị cho đa thức vi phân

Cho hàm phân hình khác hằng $g(z)$ trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và p đạo hàm đầu tiên của nó. Một đa thức vi phân P của g được định nghĩa bởi

$$P(z) := \sum_{i=1}^n \alpha_i(z) \prod_{j=0}^p (g^{(j)}(z))^{S_{ij}},$$

trong đó S_{ij} , $0 \leq i, j \leq n$, là các số nguyên không âm và $\alpha_i(z)$, $1 \leq i \leq n$ là các hàm phân hình nhỏ đối với g . Đặt

$$d(P) := \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^p S_{ij} \quad \text{và} \quad \theta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^p j S_{ij}.$$

Năm 2002, J. Hinchliffe ([21]) đã chứng minh kết quả sau, cho một đánh giá giữa các hàm Nevanlinna của hàm phân hình và hàm đếm của đa thức vi phân.

Mệnh đề 3.1.1 ([21]). Cho g là một hàm phân hình siêu việt và $a \neq 0$ là một hằng số phức, gọi P là một đa thức vi phân khác hằng của g với $d(P) \geq 2$. Khi đó

$$T(r, g) \leq \frac{\theta(P) + 1}{d(P) - 1} \bar{N}(r, \frac{1}{g}) + \frac{1}{d(P) - 1} \bar{N}(r, \frac{1}{P - a}) + o(T(r, g)),$$

đối với mọi $r \in [1, +\infty)$ nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgues hữu hạn.

Khi f là một hàm nguyên siêu việt, bất đẳng thức trên trở thành

$$T(r, g) \leq \frac{\theta(P) + 1}{d(P)} \bar{N}(r, \frac{1}{g}) + \frac{1}{d(P)} \bar{N}(r, \frac{1}{P - a}) + o(T(r, g)),$$

đối với mọi $r \in [1, +\infty)$ nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgues hữu hạn.

Cho f là một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, ta nhắc lại bậc $\sigma(f)$ của hàm phân hình f định nghĩa bởi

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Và siêu bậc của f được định nghĩa bởi

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

Trường hợp đặc biệt, nếu f là một hàm nguyên, biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

thì ta kí hiệu

$$\mu(r, f) = \max_{n \in \mathbb{N}, |z|=r} \{|a_n z^n|\},$$

$$\nu(r, f) = \sup\{n : |a_n| r^n = \mu(r, f)\},$$

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Trong trường hợp này bậc của f có thể biểu diễn được dưới dạng

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log(M(r, f))}{\log r}.$$

Mệnh đề 3.1.2 ([29]). Nếu f là một hàm nguyên với bậc $\sigma(f)$, khi đó

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(r, f)}{\log r}.$$

Mệnh đề 3.1.3 ([29]). Cho f là một hàm nguyên siêu việt, δ là một số thực thỏa mãn $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Cho z là một số phức thỏa mãn $|z| = r$ và

$$|f(z)| > M(r, f) \nu(r, f)^{-\frac{1}{4} + \delta}.$$

Khi đó tồn tại một tập $F \subset \mathbb{R}_+$ có độ đo logarit hữu hạn, tức là $\int_F \frac{dt}{t} < +\infty$, sao cho

$$\frac{f^{(m)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r, f)}{z} \right)^m (1 + o(1))$$

đúng với mọi $m \geq 1$ và $r \notin F$.

Lấy $E_0(z) = 1 - z$, $E_m(z) = (1 - z)e^{z+z^2/2+\dots+z^m/m}$, $m \in \mathbb{Z}^+$, khi đó ta có kết quả sau được gọi là định lý biểu diễn Weierstrass.

Mệnh đề 3.1.4 ([29]). Cho f là một hàm nguyên, với bội không điểm tại $z = 0$ là $m \geq 0$. Ta gọi các không điểm khác của f là $a_1, a_2, \dots$, mỗi không điểm được lặp lại số lần bằng bội của nó. Khi đó f có biểu diễn

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n} \left(\frac{z}{a_n} \right),$$

với g là một hàm nguyên và m_n là các số tự nhiên. Hơn nữa, nếu f có bậc ρ hữu hạn thì g là một đa thức với bậc không vượt quá ρ .

3.1.2. Họ chuẩn tắc các hàm phân hình

Kí hiệu S là mặt cầu Riemann và

$$\pi : \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S$$

là phép chiếu cầu.

Định nghĩa 3.1.5. Cho $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$, kí hiệu và $M_1 = \pi(z_1)$, $M_2 = \pi(z_2)$ là hai điểm trên mặt cầu S tương ứng lần lượt với các điểm z_1, z_2 . Độ dài của

đoạn thẳng $\overline{M_1 M_2}$ được gọi là *khoảng cách cầu* giữa hai điểm z_1, z_2 và kí hiệu là $\rho_S(z_1, z_2)$.

Hiển nhiên, nếu $z_1 \equiv z_2$ thì $\rho_S(z_1, z_2) = 0$. Hơn nữa ta dễ dàng tính toán được khoảng cách cầu giữa các điểm $z_1 \neq z_2$ trong mặt phẳng phức mở rộng như sau:

- Nếu $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ thì $\rho_S(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{(1 + |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |z_2|^2)^{\frac{1}{2}}}$;
- Nếu $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty$ thì $\rho_S(z_1, z_2) = \frac{1}{(1 + |z_1|^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Định nghĩa 3.1.6. Một dãy các điểm $\{z_n, n = 1, 2, \dots\}$ của $\widehat{\mathbb{C}}$ được gọi là *hội tụ đối với khoảng cách cầu* (hay còn gọi là *hội tụ cầu*) nếu với mỗi số $\varepsilon > 0$, tồn tại một số nguyên dương N sao cho, với mọi $n \geq N, m \geq N$, ta có:

$$\rho_S(z_n, z_m) < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Bổ đề 3.1.7. Nếu một dãy các điểm $\{z_n, n = 1, 2, \dots\}$ của $\widehat{\mathbb{C}}$ hội tụ đối với khoảng cách cầu thì tồn tại một điểm duy nhất $z^* \in \widehat{\mathbb{C}}$ sao cho:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_S(z_n, z^*) = 0. \quad (3.2)$$

Phần tử z^* trong bổ đề trên được gọi là giới hạn của dãy $\{z_n\}$ đối với khoảng cách cầu hay còn gọi là giới hạn cầu của dãy $\{z_n\}$.

Định nghĩa 3.1.8. Cho $S = \{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ là một dãy các hàm phân hình xác định trong miền D và E một tập con của D . Dãy S được gọi là *hội tụ đều trên E đối với khoảng cách cầu* (hay còn gọi là *hội tụ cầu đều*), nếu với mỗi số dương ε , tồn tại một số nguyên dương N sao cho với mọi $n \geq N, m \geq N$ ta có:

$$\rho_S(f_n(z), f_m(z)) < \varepsilon \quad (3.3)$$

với mọi $z \in E$.

Giả sử $\{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ hội tụ cầu đều trên E . Khi đó với mỗi điểm $z_0 \in E$, dãy $\{f_n(z_0), n = 1, 2, \dots\}$ là hội tụ cầu và theo Bổ đề 3.1.7 nó có duy nhất một giới hạn cầu trong E , ta kí hiệu là w_0 . Do đó ta thiết lập được một hàm f xác định trên E : $f(z_0) = w_0$ với mỗi $z_0 \in E$. Hàm f xác định như vậy được gọi là hàm giới hạn của dãy hàm $\{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ đối với khoảng cách cầu.

Giả sử $\{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ hội tụ cầu đều trên E và f là hàm giới hạn của dãy hàm $\{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ đối với khoảng cách cầu. Với một số dương ε , từ giả thiết $\{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ hội tụ cầu đều trên E suy ra tồn tại một số nguyên dương N sao cho khi $n \geq N, m \geq N$ ta có

$$\rho_S(f_n(z), f_m(z)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

với mọi $z \in E$. Do đó khi $n \geq N, m \geq N$ và $z \in E$, ta có:

$$\begin{aligned} \rho_S(f_n(z), f(z)) &\leq \rho_S(f_n(z), f_m(z)) + \rho_S(f_m(z), f(z)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \rho_S(f_m(z), f(z)). \end{aligned}$$

Cho $m \rightarrow \infty$, ta nhận được

$$\rho_S(f_n(z), f(z)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

với mọi $z \in E$, với mọi $n \geq N$. Khi đó ta nói rằng dãy hàm $f_n(z)$ hội tụ cầu đều đối với khoảng cách cầu (hay hội tụ cầu đều) đến hàm $f(z)$ trên E khi $n \rightarrow +\infty$.

Bổ đề 3.1.9. Nếu $f(z)$ là một hàm phân hình trong miền D thì $f(z)$ liên tục trong D đối với khoảng cách cầu. Tức là, với mỗi điểm $z_0 \in D$ ta luôn có:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \rho_S(f(z), f(z_0)) = 0. \quad (3.4)$$

Định nghĩa 3.1.10. Cho $\mathcal{S} = \{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ là một dãy các hàm phân hình xác định trong một miền D . Một điểm $z_0 \in D$ được gọi là C_0 -điểm của dãy $\mathcal{S}$ nếu tồn tại một hình tròn $U = \{|z - z_0| < r\} \subset D$ sao cho

dãy $\mathcal{S}$ là hội tụ đều trong U đối với khoảng cách cầu. Dãy $\mathcal{S}$ được gọi là C_0 -dãy trong D , nếu mỗi điểm của D đều là một C_0 -điểm của $\mathcal{S}$.

Giả sử dãy $\mathcal{S}$ hội tụ cầu đều trong hình tròn $U = \{|z - z_0| < r\}$, khi đó dãy $\mathcal{S}$ có hàm giới hạn $f(z)$ xác định trong U đối với khoảng cách cầu và khi $n \rightarrow +\infty$ thì $f_n(z)$ hội tụ đều đến $f(z)$ trong U đối với khoảng cách cầu.

Mệnh đề 3.1.11. Cho $\mathcal{S} = \{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ là C_0 -dãy các hàm phân hình trong một miền D . Khi đó hàm giới hạn $f(z)$ của dãy $\mathcal{S}$ đối với khoảng cách cầu là một hàm phân hình trong D hoặc ∞ .

Định nghĩa 3.1.12. Cho $D \subset \mathbb{C}$ là một miền và $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên D . Họ $\mathcal{F}$ được gọi là *họ chuẩn tắc* trên D nếu mọi dãy $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ luôn tồn tại một dãy con của $\{f_n\}$ hội tụ cầu đều trên mọi tập con compact của D .

Ví dụ. Kí hiệu $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Cho $f_n(z) = \frac{n}{z}, n = 1, 2, 3, \dots$, trên U . Khi đó f_n là hàm phân hình và $\{f_n\}$ hội tụ cầu đều địa phương tới ∞ trong U .

Định nghĩa 3.1.13. Cho $\mathcal{F}$ là họ các hàm phân hình trong một miền D và z_0 là một điểm của D . Ta nói rằng họ $\mathcal{F}$ là *chuẩn tắc tại z_0* , nếu tồn tại một hình tròn $U = \{|z - z_0| < r\} \subset D$ sao cho họ $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc trên hình tròn U .

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra nếu $\mathcal{F}$ chuẩn tắc trên D thì $\mathcal{F}$ chuẩn tắc mỗi điểm của D . Chiều ngược lại ta có kết quả sau:

Mệnh đề 3.1.14. Cho $\mathcal{F}$ là họ các hàm phân hình trong một miền D . Nếu họ $\mathcal{F}$ chuẩn tắc tại mỗi điểm của D thì $\mathcal{F}$ chuẩn tắc trên D .

Định nghĩa 3.1.15. Cho $\mathcal{F}$ là họ các hàm phân hình trong một miền D . Ta nói rằng $\mathcal{F}$ là *bị chặn đều địa phương* trong D , nếu cho mỗi z_0 của D ,

tồn tại một hình tròn $U = \{|z - z_0| < r\}$ nằm trong D và một số dương M sao cho với mỗi $f \in \mathcal{F}$

$$|f(z)| \leq M, \quad (3.5)$$

đúng với mọi $z \in U$.

Mệnh đề 3.1.16. *Cho $\mathcal{F}$ là họ các hàm phân hình trong một miền D . Nếu $\mathcal{F}$ bị chặn đều địa phương trong D , khi đó $\mathcal{F}$ chuẩn tắc trong D .*

Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$, với mỗi $f \in \mathcal{F}$, đạo hàm cầu của hàm f được định nghĩa bởi:

$$f^\#(z) = \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2}.$$

Định lý 3.1.17 (Định lý Marty). *Một họ $\mathcal{F}$ các hàm phân hình trên một miền $D \subset \mathbb{C}$ là chuẩn tắc trên miền D khi và chỉ khi tập các đạo hàm cầu*

$$\{f^\#(z), f \in \mathcal{F}\}$$

bị chặn đều trên mỗi tập con compact của D .

Mệnh đề 3.1.18 (Bổ đề Zalcman, [53]). *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên đĩa mở $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Khi đó nếu $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc tại một điểm $z_0 \in \Delta$, thì với mỗi số thực α thỏa mãn $-1 < \alpha < 1$, tồn tại*

1) *một số thực r , $0 < r < 1$ và một dãy điểm z_n , $|z_n| < r$, $z_n \rightarrow z_0$,*

2) *dãy các số dương ρ_n , $\rho_n \rightarrow 0^+$,*

3) *dãy các hàm f_n , $f_n \in \mathcal{F}$ thỏa mãn dãy hàm $g_n(\xi) = \frac{f_n(z_n + \rho_n \xi)}{\rho_n^\alpha}$ hội tụ cầu đều về hàm $g(\xi)$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$, trong đó $g(\xi)$ là một hàm phân hình khác hằng và $g^\#(\xi) \leq g^\#(0) = 1$. Hơn nữa, bậc của g không lớn hơn 2.*

Mệnh đề 3.1.19 ([9]). *Cho g là một hàm nguyên và M là một hằng số dương. Nếu $g^\#(\xi) \leq M$ đối với mọi $\xi \in \mathbb{C}$, thì g có bậc cao nhất là 1.*

Chú ý. Trong Mệnh đề 3.1.18, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình, thì g là một hàm chỉnh hình dựa trên định lý Hurwitz. Do đó, bậc của g không lớn hơn 1 theo Mệnh đề 3.1.19.

3.2. Vấn đề duy nhất

Trong phần này chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh một định lý về vấn đề duy nhất cho các hàm nguyên liên quan đến giả thuyết Brück. Kỹ thuật chứng minh kết quả này dựa trên một kết quả về tiêu chuẩn chuẩn tắc của họ các hàm phân hình phức được chúng tôi phát biểu và chứng minh trong phần đầu tiên của mục này.

3.2.1. Tiêu chuẩn chuẩn tắc của họ các hàm phân hình

Để chứng minh kết quả của chúng tôi về tiêu chuẩn chuẩn tắc của họ các hàm phân hình phức, trước hết chúng tôi chứng minh một số bổ đề cần thiết sau đây:

Mệnh đề 3.2.1 ([47]). *Cho f là một hàm phân hình siêu việt và a là một hằng số phức. Gọi $n \in \mathbb{N}$, $k, n_j, t_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \dots, k$ thỏa mãn*

$$n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 3.$$

Khi đó phương trình

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có vô số nghiệm. Hơn nữa, nếu f là một hàm nguyên siêu việt, khẳng định đúng khi $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$.

Chứng minh. Đặt

$$P(f) = f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)}.$$

Ta thấy

$$(f^{n_j})^{(t_j)} = \sum c_{m_0, m_1, \dots, m_{t_j}} f^{m_0} (f')^{m_1} \dots (f^{(t_j)})^{m_{t_j}},$$

trong đó $c_{m_0, m_1, \dots, m_{t_j}}$ là các hằng số, $m_0, m_1, \dots, m_{t_j}$ là các hằng số không âm thỏa mãn $m_0 + \dots + m_{t_j} = n_j$ và $\sum_{j=1}^{t_j} j m_j = t_j$. Do đó ta dễ dàng tính toán được

$$d(P) = n + \sum_{j=1}^k n_j \text{ và } \theta(P) = \sum_{j=1}^k t_j.$$

Sử dụng Mệnh đề 3.1.1 với f và $P(f)$, ta có

$$\begin{aligned} T(r, f) \leq & \frac{\sum_{j=1}^k t_j + 1}{n + \sum_{j=1}^k n_j - 1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{n + \sum_{j=1}^k n_j - 1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{P - a}\right) \\ & + o(T(r, f)). \end{aligned}$$

Vì $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 3$, ta thu được phương trình

$$f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có vô số nghiệm. Hơn nữa, nếu f là một hàm nguyên siêu việt, ta có

$$\begin{aligned} T(r, f) \leq & \frac{\sum_{j=1}^k t_j + 1}{n + \sum_{j=1}^k n_j} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{n + \sum_{j=1}^k n_j} \overline{N}\left(r, \frac{1}{P - a}\right) \\ & + o(T(r, f)). \end{aligned}$$

Do đó điều kiện $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$ kéo theo

$$f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có vô số nghiệm. □

Mệnh đề 3.2.2 ([47]). *Cho f là một hàm hữu tỷ khác hằng và a là một hằng số phức khác không. Cho $n \in \mathbb{N}$, $k, n_j, t_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \dots, k$ thỏa mãn*

$$n_j \geq t_j, \quad n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2, \quad j = 1, \dots, k.$$

Khi đó phương trình

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có ít nhất hai không điểm phân biệt.

Chứng minh. Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. f là một đa thức. Giả sử f là một đa thức bậc $m \geq 1$, khi đó

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)}$$

cũng là một đa thức có bậc là

$$m \left(n + \sum_{j=1}^k n_j \right) - \sum_{j=1}^k t_j \geq n + \sum_{j=1}^k n_j - \sum_{j=1}^k t_j \geq 2.$$

Do đó, nếu

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - a$$

có một không điểm duy nhất là z_0 , thì

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - a = A(z - z_0)^l,$$

trong đó $l \geq 2$ và A là một hằng số khác không, suy ra

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})' = Al(z - z_0)^{l-1}.$$

Điều này kéo theo z_0 là không điểm duy nhất của

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})'.$$

Vì f là đa thức nên f có không điểm. Giả sử z^* là một không điểm bội $m \geq 1$ của f , khi đó z^* là không điểm bội

$$m \left(n + \sum_{j=1}^k n_j \right) - \sum_{j=1}^k t_j \geq 2$$

của $f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)}$ và do đó nó là một không điểm của

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})'.$$

Như đã nói ở trên, $(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})'$ có không điểm duy nhất là z_0 nên z_0 phải là không điểm của f . Ta thấy rằng

$$0 = f^n(z_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(z_0) \dots (f^{n_k})^{(t_k)}(z_0) = a \neq 0.$$

Đó là mâu thuẫn. Kéo theo

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có ít nhất hai không điểm phân biệt.

Trường hợp 2. f là một hàm hữu tỷ và không phải là đa thức. Ta xem xét hai trường hợp có thể xảy ra

Trường hợp 2.1. f có không điểm. Khi đó f có thể biểu diễn được dưới dạng

$$f = A \frac{\prod_{i=1}^s (z - \alpha_i)^{m_i}}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{d_l}}, \quad (3.1)$$

trong đó $A \neq 0$, $m_i \geq 1, i = 1, \dots, s$ và $d_l \geq 1, l = 1, \dots, t$. Đặt

$$M = m_1 + \dots + m_s \geq s, \quad N = d_1 + \dots + d_t \geq t.$$

Khi đó, với mỗi $j = 1, 2, \dots, k$, ta có

$$f^{n_j} = A^{n_j} \frac{\prod_{i=1}^s (z - \alpha_i)^{n_j m_i}}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{n_j d_l}}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (3.2)$$

Điều này kéo theo

$$(f^{n_j})^{(t_j)} = A^{n_j} \frac{\prod_{i=1}^s (z - \alpha_i)^{n_j m_i - t_j}}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{n_j d_l + t_j}} g_j(z), \quad (3.3)$$

trong đó g_j là một đa thức với

$$\deg g_j(z) \leq t_j(s + t - 1), \quad j = 1, \dots, k.$$

Kết hợp (3.1), (3.2) và (3.3), ta có

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = \frac{\prod_{i=1}^s (z - \alpha_i)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)m_i - \sum_{j=1}^k t_j}}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)d_l + \sum_{j=1}^k t_j}} g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (3.4)$$

trong đó

$$g(z) = A^{n + \sum_{j=1}^k n_j} \prod_{v=1}^k g_v(z)$$

với

$$\deg g(z) \leq (s + t - 1) \sum_{j=1}^k t_j.$$

Giả sử rằng

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có một không điểm duy nhất z_0 . Khi đó $z_0 \neq \alpha_i$ với mọi $i = 1, \dots, s$. Thực vậy, nếu $z_0 = \alpha_i$ với $i \in \{1, \dots, s\}$, khi đó

$$0 = f^n(z_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(z_0) \dots (f^{n_k})^{(t_k)}(z_0) = a \neq 0.$$

Đây là điều mâu thuẫn. Từ (3.4) ta có

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a + \frac{B(z - z_0)^l}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)d_l + \sum_{j=1}^k t_j}}, \quad (3.5)$$

trong đó B là một hằng số khác 0. Điều đó kéo theo

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})' = \frac{(z - z_0)^{l-1} G_1(z)}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)d_l + \sum_{j=1}^k t_j + 1}}, \quad (3.6)$$

trong đó

$$G_1(z) = B(l - (n + \sum_{j=1}^k n_j)N - t \sum_{j=1}^k t_j)z^t + b_1 z^{t-1} + \dots + b_t.$$

Cũng từ (3.4) ta có

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})' = \frac{\prod_{i=1}^s (z - \alpha_i)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)m_i + \sum_{j=1}^k t_j - 1} G_2(z)}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)d_l + \sum_{j=1}^k t_j + 1}}. \quad (3.7)$$

Dễ kiểm tra được

$$s + t - 1 \leq \deg G_2(z) \leq \left(\sum_{j=1}^k t_j + 1 \right) (s + t - 1).$$

a) Nếu $l \neq (n + \sum_{j=1}^k n_j)N + t \sum_{j=1}^k t_j$, khi đó $\deg P(z) \geq \deg Q(z)$. Từ (3.4), ta có

$$\sum_{i=1}^s \left((n + \sum_{j=1}^k n_j)m_i - \sum_{j=1}^k t_j \right) + \deg g \geq \sum_{l=1}^t \left((n + \sum_{j=1}^k n_j)d_l + \sum_{j=1}^k t_j \right).$$

Ta chú ý rằng

$$\deg g(z) \leq \left(\sum_{j=1}^k t_j \right) (s + t - 1).$$

Điều này kéo theo

$$M \geq N + \frac{\sum_{j=1}^k t_j}{n + \sum_{j=1}^k n_j},$$

do đó $M > N$. Vì $z_0 \neq \alpha_i$ với mọi $i = 1, \dots, s$ nên ta có

$$\sum_{i=1}^s \left((n + \sum_{j=1}^k n_j)m_i - \sum_{j=1}^k t_j - 1 \right) \leq \deg G_1 = t.$$

Kéo theo

$$(n + \sum_{j=1}^k n_j)M \leq (1 + \sum_{j=1}^k t_j)s + t < \left(\sum_{j=1}^k t_j + 2 \right)M. \quad (3.8)$$

Ta chú ý rằng $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$, như vậy (3.8) cho ta mâu thuẫn.

b) Nếu $l = (n + \sum_{j=1}^k n_j)N + (\sum_{j=1}^k t_j)t$.

Nếu $M > N$, lập luận giống như Trường hợp 1 ta cũng có mâu thuẫn.

Nếu $M \leq N$. Vì

$$l - 1 \leq \deg G_2 \leq \left(\sum_{j=1}^k t_j + 1\right)(s + t - 1),$$

nên

$$\begin{aligned} (n + \sum_{j=1}^k t_j)N = l - \left(\sum_{j=1}^k t_j\right)t &\leq \deg G_2 + 1 - \left(\sum_{j=1}^k t_j\right)t \\ &< (1 + \sum_{j=1}^k t_j)s + t \leq \left(\sum_{j=1}^k t_j + 2\right)N. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Từ điều kiện $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$ và (3.9), ta có mâu thuẫn.

Trường hợp 2.2. f không có không điểm. Khi đó f được biểu diễn dưới dạng

$$f = \frac{A}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{d_l}}, \quad d_l \geq 1, \quad l = 1, \dots, t. \quad (3.10)$$

Như thế, với mỗi $j = 1, 2, \dots, k$ ta có

$$(f^{n_j})^{(t_j)} = \frac{A^{n_j}}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{n_j d_l + t_j}} g_j(z), \quad (3.11)$$

trong đó g_j là một đa thức với $\deg g_j(z) \leq t_j(t - 1)$. Điều này kéo theo

$$f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = \frac{g(z)}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j) d_l + \sum_{j=1}^k t_j}} = \frac{g(z)}{Q(z)}, \quad (3.12)$$

trong đó $g(z) = A^{n + \sum_{j=1}^k n_j} \prod_{v=1}^k g_v(z)$ với $\deg g(z) \leq (\sum_{j=1}^k t_j)(t - 1)$. Ta thấy rằng

$$f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - a = \frac{g(z) - aQ(z)}{Q(z)}. \quad (3.13)$$

Do $N = d_1 + \dots + d_t \geq t$ ta có

$$\deg Q \geq (n + \sum_{j=1}^k n_j + \sum_{j=1}^k t_j)t > \deg g,$$

điều này kéo theo $g(z) - aQ(z) = 0$ là một đa thức bậc lớn hơn 1 nên có ít nhất một không điểm và không trùng với không điểm của $Q(z)$. Kéo theo $f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$ có ít nhất một nghiệm. Ta giả sử rằng

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có một không điểm duy nhất z_0 , khi đó

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a + \frac{B(z - z_0)^l}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)d_l + \sum_{j=1}^k t_j}}, \quad (3.14)$$

trong đó B là một hằng số khác không. Điều này kéo theo

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})' = \frac{(z - z_0)^{l-1} G_1(z)}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)d_l + \sum_{j=1}^k t_j + 1}}, \quad (3.15)$$

trong đó

$$G_1(z) = B(l - (n + \sum_{j=1}^k n_j)N - (\sum_{j=1}^k t_j)t)z^t + b_1 z^{t-1} + \dots + b_t.$$

Từ (3.12), ta có

$$(f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)})' = \frac{G_2(z)}{\prod_{l=1}^t (z - \beta_l)^{(n + \sum_{j=1}^k n_j)d_l + \sum_{j=1}^k t_j + 1}}. \quad (3.16)$$

Dễ dàng kiểm tra được

$$t - 1 \leq \deg G_2(z) \leq (\sum_{j=1}^k t_j + 1)(t - 1).$$

Ta xem xét hai trường hợp có thể xảy ra

a) Nếu $l \neq (n + \sum_{j=1}^k n_j)N + (\sum_{j=1}^k t_j)t$, khi đó $\deg g(z) \geq \deg Q(z)$. Từ (3.12), ta có

$$\deg g \geq \sum_{j=1}^t ((n + \sum_{j=1}^k n_j)d_j + \sum_{j=1}^k t_j) = (n + \sum_{j=1}^k n_j)N + (\sum_{j=1}^k t_j)t.$$

Chú ý rằng $\deg g(z) \leq (\sum_{j=1}^k t_j)(t-1)$. Đó là điều mâu thuẫn.

b) Nếu $l = (n + \sum_{j=1}^k n_j)N + (\sum_{j=1}^k t_j)t$. Từ

$$l-1 \leq \deg G_2 \leq (\sum_{j=1}^k t_j + 1)(t-1),$$

ta có

$$\begin{aligned} (n + \sum_{j=1}^k n_j)N &= l - (\sum_{j=1}^k t_j)t \leq \deg G_2 + 1 - (\sum_{j=1}^k t_j)t \\ &= t - \sum_{j=1}^k t_j. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Từ điều kiện $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$ và $t \leq N$, ta có

$$(\sum_{j=1}^k t_j + 2)N + \sum_{j=1}^k t_j \leq N.$$

Đây là điều mâu thuẫn. Như vậy ta thu được

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có ít nhất hai không điểm phân biệt. Mệnh đề được chứng minh trong các trường hợp. $\square$

Cho f và g là hai hàm phân hình và a và b là hai số phức phân biệt. Ta nhắc lại, nếu $g - b = 0$ mỗi khi $f - a = 0$ thì ta viết $f = a \Rightarrow g = b$. Nếu $f = a \Rightarrow g = b$ và $g = b \Rightarrow f = a$ thì ta viết $f = a \Leftrightarrow g = b$. Nếu

$f - a$ và $g - b$ có chung không điểm và cực điểm kể cả bội thì ta kí hiệu $f - a \rightleftharpoons g - b$. Sử dụng khái niệm này chúng tôi đã chứng minh kết quả sau về tiêu chuẩn chuẩn tắc của một họ các hàm phân hình.

Định lý 3.2.3 ([47]). *Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$. Cho a và b là hai số phức thỏa mãn $b \neq 0$, gọi $n \in \mathbb{N}$, $n_j, t_j, k \in \mathbb{N}^*$, ($j = 1, 2, \dots, k$) thỏa mãn*

$$n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 3 \quad (3.18)$$

và

$$f^{n+n_1+\dots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \quad (3.19)$$

đối với $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ngoài ra, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình thì khẳng định đúng khi (3.18) được thay thế bởi một trong các điều kiện sau:

$$k = 1, n = 0, n_1 \geq t_1 + 1; \quad (3.20)$$

$$n \geq 1 \text{ hoặc } k \geq 2, n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2. \quad (3.21)$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết rằng D là đĩa đơn vị. Giả sử rằng $\mathcal{F}$ không chuẩn tắc tại $z_0 \in D$. Sử dụng Mệnh đề 3.1.18 với $\alpha = \sum_{j=1}^k t_j / (n + \sum_{j=1}^k n_j)$, ta suy ra tồn tại một dãy điểm

$$z_v : |z_v| < r, v = 1, 2, \dots, \infty, \quad z_v \rightarrow z_0,$$

tồn tại dãy số dương

$$\rho_v, v = 1, 2, \dots, \infty, \quad \rho_v \rightarrow 0^+$$

và dãy các hàm $f_v, f_v \in \mathcal{F}, v = 1, 2, \dots, \infty$ sao cho hàm

$$g_v(\xi) = \frac{f_v(z_v + \rho_v \xi)}{\rho_v^\alpha}$$

hội tụ cầu đều đến hàm $g(\xi)$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$, trong đó $g(\xi)$ là một hàm phân hình khác hằng. Từ cách xác định hàm g_v ta có

$$\begin{aligned} f_v^n(z_v + \rho_v \xi) (f_v^{n_1})^{(t_1)}(z_v + \rho_v \xi) \dots (f_v^{n_k})^{(t_k)}(z_v + \rho_v \xi) - b \\ = g_v^n(\xi) (g_v^{n_1}(\xi))^{(t_1)} \dots (g_v^{n_k}(\xi))^{(t_k)} - b. \end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} f_v^n(z_v + \rho_v \xi) (f_v^{n_1})^{(t_1)}(z_v + \rho_v \xi) \dots (f_v^{n_k})^{(t_k)}(z_v + \rho_v \xi) - b \\ \rightarrow g^n(\xi) (g^{n_1}(\xi))^{(t_1)} \dots (g^{n_k}(\xi))^{(t_k)} - b \end{aligned} \quad (3.22)$$

đều (với khoảng cách cầu) trên mỗi tập con compact của $\mathbb{C} \setminus \{\text{cực điểm của } g\}$.

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. $a \neq 0$. Lấy M là một hằng số dương sao cho

$$M \leq |a| \left(\frac{1}{n+n_1+\dots+n_k} \right).$$

Với mỗi $f \in \mathcal{F}$, ta kí hiệu E_f bởi

$$E_f = \left\{ z \in D : f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \right\}.$$

Khi đó $|f(z)| \geq M$ với mỗi $f \in \mathcal{F}$ và $z \in E_f$.

Bây giờ ta chứng minh phương trình

$$g^n(\xi) (g^{n_1}(\xi))^{(t_1)} \dots (g^{n_k}(\xi))^{(t_k)} = b \quad (3.23)$$

có ít nhất một không điểm là ξ_0 . Thực vậy, ta xét hai trường hợp con:

Trường hợp con 1.1. g là một hàm phân hình.

Nếu g là hàm phân hình siêu việt, ta thấy rằng phương trình (3.23) có vô số nghiệm theo Mệnh đề 3.2.1. Nếu g là hàm hữu tỷ, phương trình (3.23) có ít nhất một không điểm theo Mệnh đề 3.2.2.

Trường hợp con 1.2. g là một hàm nguyên. Ta xét hai khả năng

a) g là hàm nguyên siêu việt:

Nếu $n = 0$ và $k = 1$ thì với $n_1 = t_1 + 1$ (xem [20]) hoặc $n_1 \geq t_1 + 2$ (theo Mệnh đề 3.2.1), hàm $(g^{n_1})^{t_1} - b$ có vô số không điểm.

Nếu $n \geq 1$ hoặc $k \geq 2, n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$, theo Mệnh đề 3.2.1, phương trình (3.23) có vô số không điểm.

b) g là đa thức. Do k, n, n_j, t_j thỏa mãn giả thiết của Định lý 3.2.3 kéo theo $g^n(\xi)(g^{n_1}(\xi))^{(t_1)} \dots (g^{n_k}(\xi))^{(t_k)} - b$ là đa thức bậc ít nhất 1, suy ra phương trình (3.23) có ít nhất một nghiệm.

Như vậy, trong mọi trường hợp Phương trình (3.23) luôn có nghiệm, tức là luôn tồn tại $\xi_0 \in \mathbb{C}$ thỏa mãn

$$g^n(\xi_0)(g^{n_1}(\xi_0))^{(t_1)} \dots (g^{n_k}(\xi_0))^{(t_k)} = b. \quad (3.24)$$

Ta thấy rằng $g(\xi_0) \neq 0, \infty$, nên $g_v(\xi)$ hội tụ đều đến $g(\xi)$ trong một lân cận của ξ_0 . Từ (3.22) và định lý Hurwitz, tồn tại một dãy $\xi_v \rightarrow \xi_0$ thỏa mãn

$$f_v^n(z_v + \rho_v \xi_v)(f_v^{n_1}(z_v + \rho_v \xi_v))^{(t_1)} \dots (f_v^{n_k}(z_v + \rho_v \xi_v))^{(t_k)} = b$$

với mỗi số v đủ lớn. Hiển nhiên $\zeta_v = z_v + \rho_v \xi_v \in E_{f_v}$. Điều đó kéo theo

$$|g_v(\xi_v)| = \frac{|f_v(\zeta_v)|}{\rho_v^\alpha} \geq \frac{M}{\rho_v^\alpha}. \quad (3.25)$$

Do ξ_0 không phải là cực điểm của g , nên $g(\xi)$ bị chặn trong một lân cận ξ_0 . Tuy nhiên, cho $v \rightarrow \infty$ trong (3.25), ta có mâu thuẫn với việc hàm $g(\xi)$ bị chặn trong một lân cận ξ_0 .

Trường hợp 2. $a = 0$. Với mỗi $f \in F$, nếu tồn tại $z_0 \in D$ sao cho $f(z_0) = 0$. Giả sử z_0 là không điểm bội $m \geq 1$ của f , khi đó z_0 là không điểm bội

$$m \left(n + \sum_{j=1}^k n_j \right) - \sum_{j=1}^k t_j \geq 2$$

của $f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)}$, do đó

$$f^n(z_0)(f^{n_1}(z_0))^{(t_1)} \dots (f^{n_k}(z_0))^{(t_k)} = 0,$$

mâu thuẫn với giả thiết vì $b \neq 0$.

Như vậy với mọi $f \in \mathcal{F}$ ta luôn có $f(z) \neq 0$ với mọi $z \in D$. Hơn nữa, nếu

$$f^n(z_0)(f^{n_1}(z_0))^{(t_1)} \dots (f^{n_k}(z_0))^{(t_k)} = b,$$

với $z_0 \in D$ thì từ giả thiết ta suy ra $f(z_0)^{n+n_1+\dots+n_k} = 0$, do đó $f(z_0) = 0$, kéo theo $b = 0$. Đó chính là mâu thuẫn.

Như thế $f \neq 0$ và $f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} \neq b$ với mọi $f \in \mathcal{F}$. Theo định lý Hurwitz, ta có $g \neq 0$, $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \dots (g^{n_k})^{(t_k)} \neq b$ hoặc

$$g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \dots (g^{n_k})^{(t_k)} \equiv b.$$

Nếu $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \dots (g^{n_k})^{(t_k)} \equiv b$. Theo Mệnh đề 3.1.19, bậc của g cao nhất là 1. Do đó ta có $g(z) = e^{P(z)}$ theo Mệnh đề 3.1.4, trong đó P là một đa thức với bậc cao nhất là 1. Như vậy $g(\xi) = e^{c\xi+d}$, trong đó c là một hằng số khác không. Điều này kéo theo

$$g^n(\xi)(g^{n_1}(\xi))^{(t_1)} \dots (g^{n_k}(\xi))^{(t_k)} = (n_1 c)^{t_1} \dots (n_k c)^{t_k} e^{(n+\sum_{j=1}^k n_j)c\xi + (n+\sum_{j=1}^k n_j)d} \equiv b.$$

Đây chính là điều mâu thuẫn. Như vậy

$$g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \dots (g^{n_k})^{(t_k)} \neq b. \quad (3.26)$$

Ta xét hai trường hợp con như sau:

Trường hợp con 2.1. g là hàm phân hình. Từ điều kiện

$$n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 3,$$

ta thấy $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \dots (g^{n_k})^{(t_k)} - b$ có một không điểm theo Mệnh đề 3.2.1 và Mệnh đề 3.2.2. Điều này mâu thuẫn với (3.26).

Trường hợp con 2.2. Nếu g là một hàm nguyên siêu việt (chú ý rằng $g \neq 0$). Thứ nhất, $n = 0, k = 1, n_1 = t_1 + 1$ (xem [20]) và $n_1 \geq t_1 + 2$ (theo Mệnh đề 3.2.1 và Mệnh đề 3.2.2), thì $(g^{n_1})^{t_1} - b$ có một không điểm. Thứ hai, $n \geq 1$ or $k \geq 2, n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$, theo Mệnh đề 3.2.1, ta thấy rằng $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \dots (g^{n_k})^{(t_k)} - b$ có một không điểm. Điều này mâu thuẫn với (3.26). Nếu g là một đa thức, thì từ k, n, n_j, t_j thỏa mãn giả thiết của Định lý 3.2.3, ta có $g^n(g^{n_1})^{(t_1)} \dots (g^{n_k})^{(t_k)} - b$ có không điểm. Điều này mâu thuẫn với (3.26). Như vậy Định lý 3.2.3 được chứng minh. $\square$

3.2.2. Định lý duy nhất

Như đã nói trong phần mở đầu, năm 1996 Brück ([2]) đã đặt ra giả thuyết: cho f là một hàm nguyên thỏa mãn $\sigma_2(f)$ không là một số nguyên hay ∞ . Nếu f và f' chung nhau một giá trị hữu hạn $a \in \mathbb{C}$ kể cả bội thì

$$\frac{f' - a}{f - a} = c, \quad (3.27)$$

trong đó c là một hằng số nào đó. Giả thuyết này đã được Brück chứng minh năm 1996 cho trường hợp $a = 0$ (xem [2]), về sau đã hút được sự quan tâm của nhiều tác giả và có nhiều công trình được công bố.

Với một hàm phân hình f , kí hiệu

$$M[f] := f^n (f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} \text{ và } F = f^{n+n_1+\dots+n_k},$$

trong đó $n, n_1, \dots, n_k, t_1, \dots, t_k$ là các số nguyên dương.

Định lý sau đây của chúng tôi là một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück khi thay thế f bởi F và f' bởi $M[f]$. Kỹ thuật chứng minh của định lý dựa vào tiêu chuẩn chuẩn tắc của họ các hàm phân hình đã được chúng tôi chứng minh trong Mục 3.2.1.

Định lý 3.2.4 ([47]). Cho $n \in \mathbb{N}$ và $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \dots, k$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$1) \ k = 1, \ n = 0, \ n_1 \geq t_1 + 1;$$

$$2) \ n \geq 1 \text{ hoặc } k \geq 2, \ n_j \geq t_j, \ n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2.$$

Cho a và b là hai giá trị hữu hạn khác 0 và f là một hàm nguyên khác hằng. Nếu $F = a \Leftrightarrow M[f] = b$ thì

$$\frac{M[f] - b}{F - a} = c,$$

trong đó c là một hằng số. Đặc biệt, nếu $a = b$ thì $f = c_1 e^{tz}$, trong đó c_1 và t là các hằng số khác 0 và t thỏa mãn điều kiện $(tn_1)^{t_1} \dots (tn_k)^{t_k} = 1$.

Chứng minh. Đặt

$$\mathcal{F} = \{g_\omega(z) = f(z + \omega), \omega \in \mathbb{C}\}, \quad z \in D = \Delta,$$

trong đó Δ là một đĩa đơn vị. Sử dụng Định lý 3.2.3, ta có họ hàm $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc trên D . Theo định lý Marty, tồn tại một hằng số $M > 0$ thỏa mãn

$$f^\#(\omega) = \frac{|f'(\omega)|}{1 + |f(\omega)|^2} = \frac{|g'_\omega(0)|}{1 + |g_\omega(0)|^2} \leq M,$$

với mọi $\omega \in \mathbb{C}$. Theo Mệnh đề 3.1.19, bậc của f cao nhất là 1. Từ điều kiện

$$f^{n+n_1+\dots+n_k} = a \iff f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b,$$

ta suy ra f là hàm nguyên siêu việt và

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\dots+n_k} - a} = e^{\alpha(z)}. \quad (3.28)$$

Từ (3.28), ta có

$$T(r, e^{\alpha(z)}) = O(T(r, f)).$$

Do đó $\sigma(e^\alpha) \leq \sigma(f) \leq 1$. Điều đó kéo theo $\alpha(z)$ là đa thức và $\deg(\alpha) \leq 1$.

Do f là một hàm nguyên siêu việt nên $M(r, f) \rightarrow \infty$ khi $r \rightarrow \infty$. Đặt

$$M(r_n, f) = |f(z_n)|,$$

trong đó $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $\theta_n \in [0, 2\pi)$, $|z_n| = r_n$. Ta thấy rằng

$$\lim_{r_n \rightarrow \infty} \frac{1}{|f(z_n)|} = \lim_{r_n \rightarrow \infty} \frac{1}{M(r_n, f)} = 0. \quad (3.29)$$

Theo Mệnh đề 3.1.3, tồn tại một tập hợp $F \subset \mathbb{R}_+$ có độ đo logarit hữu hạn thỏa mãn

$$\frac{f^{(m)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r, f)}{z} \right)^m (1 + o(1)) \quad (3.30)$$

đúng với mọi $m \geq 1$ và $r \notin F$. Tính toán đơn giản ta có

$$(f^n)^{(k)} = \sum c_{m_0, m_1, \dots, m_k} f^{m_0} (f')^{m_1} \dots (f^{(k)})^{m_k}, \quad (3.31)$$

trong đó $c_{m_0, m_1, \dots, m_k}$ là các hằng số và $m_0, m_1, \dots, m_k$ là các số nguyên không âm thỏa mãn $m_0 + m_1 + \dots + m_k = n$, $\sum_{j=1}^k j m_j = k$.

Từ (3.31), ta có

$$\frac{(f^n)^{(k)}}{f^n} = \sum c_{m_0, m_1, \dots, m_k} \frac{f^{m_0}}{f^{m_0}} \frac{(f')^{m_1}}{f^{m_1}} \dots \frac{(f^{(k)})^{m_k}}{f^{m_k}}.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \frac{(f^n)^{(k)}(z_j)}{f^n(z_j)} &= \sum c_{m_0, m_1, \dots, m_k} \frac{(f')^{m_1}(z_j)}{f^{m_1}(z_j)} \dots \frac{(f^{(k)})^{m_k}(z_j)}{f^{m_k}(z_j)} \\ &= \sum c_{m_0, m_1, \dots, m_k} \left(\frac{\nu(r_j, f)}{z_j} \right)^{m_1 + \dots + m_k} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Từ (3.28), ta có

$$\frac{\frac{(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)}}{f^{n_1} \dots f^{n_k}} - \frac{b}{f^{n+n_1+\dots+n_k}}}{1 - \frac{a}{f^{n+n_1+\dots+n_k}}} = e^{\alpha(z)}. \quad (3.33)$$

Áp dụng (3.32) vào (3.33), sử dụng (3.30) và Mệnh đề 3.1.2, ta có

$$\begin{aligned} |\alpha(z_n)| &= |\log e^{\alpha(z_n)}| \\ &= \left| \log \frac{\frac{(f^{n_1})^{(t_1)}(z_n) \dots (f^{n_k})^{(t_k)}(z_n)}{f^{n_1}(z_n) \dots f^{n_k}(z_n)} - \frac{b}{f^{n+n_1+\dots+n_k}(z_n)}}{1 - \frac{a}{f^{n+n_1+\dots+n_k}(z_n)}} \right| \\ &\leq O(\log \nu(r_n, f)) + O(\log r_n) + O(1) \\ &= O(\log r_n), \end{aligned} \quad (3.34)$$

khi $r_n \rightarrow \infty$. Từ (3.34), ta thu được $\alpha(z)$ là một hằng số vì $\alpha(z)$ là một đa thức. Theo đẳng thức (3.28), ta có

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\dots+n_k} - a} = c.$$

Nếu $a = b$, ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của ξ_0 thỏa mãn

$$f^n(\xi_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(\xi_0) \dots (f^{n_k})^{(t_k)}(\xi_0) = b.$$

Vì f là một hàm nguyên siêu việt, do đó theo [20] nếu $n = 0, k = 1, n_1 = t_1 + 1$ và theo Mệnh đề 3.2.1 và Mệnh đề 3.2.2 nếu $n_1 \geq t_1 + 2$, ta suy

ra $(f^{n_1})^{t_1} - b$ có vô số không điểm. Nếu $n \geq 1$ hoặc $k \geq 2$, từ điều kiện $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$ và Mệnh đề 3.2.1, ta có $f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ có vô số không điểm. Như vậy, trong mọi trường hợp

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$$

đều có nghiệm. Ta gọi ξ_0 là một không điểm bội $m \geq 1$ của

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - b,$$

khi đó theo giả thiết, ta suy ra ξ_0 là một không điểm của $f^{n+n_1+\dots+n_k} - b$ với bội m . Điều này kéo theo

$$1 = \frac{f^n(\xi_0)(f^{n_1})^{(t_1)}(\xi_0) \dots (f^{n_k})^{(t_k)}(\xi_0) - b}{f^{n+n_1+\dots+n_k}(\xi_0) - b} = c.$$

Do đó $f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = f^{n+n_1+\dots+n_k}$, kéo theo f không có không điểm và bậc của f nhiều nhất là 1. Điều này kéo theo $f = c_1 e^{tz}$, trong đó c_1 và t là các hằng số và t thỏa mãn $(tn_1)^{t_1} \dots (tn_k)^{t_k} = 1$. Định lý được chứng minh. $\square$

Trường hợp đặc biệt của Định lý 3.2.4, nếu ta chọn $n = 0$, $k = 1$, $t_1 = 1$ trong Định lý 3.2.4, thì ta có:

Hệ quả 3.2.5. *Cho f là một hàm nguyên khác hằng, $n \geq 2$ là một số nguyên và $F = f^n$. Nếu F và F' chung nhau giá trị 1 CM thì $F \equiv F'$ và f có dạng*

$$f = ce^{z/n},$$

trong đó c là một hằng số khác 0.

Chú ý. Như đã nói trong phần mở đầu, năm 2008, L. Z. Yang và J. L. Zhang ([52]) đã chứng minh một kết quả tương tự Hệ quả 3.2.5 với điều kiện $n \geq 7$. Như vậy Định lý 3.2.4 là một cải tiến thực sự kết quả của Yang và Zhang.

Kết luận Chương 3

Trong Chương 3, ngoài việc giới thiệu một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna và tính chuẩn tắc của họ các hàm phân hình, luận án đã thu được các kết quả chính sau :

- Phát biểu và chứng minh một số kết quả bổ trợ về nghiệm của $f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$ trong các trường hợp f là hàm phân hình siêu việt hay hữu tỷ.

- Phát biểu và chứng minh một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho một họ các hàm phân hình (Định lý 3.2.3). Điều kiện đại số trong định lý này liên quan đến lũy thừa của hàm phân hình có cùng số không điểm với một đơn thức vi phân của hàm phân hình đó.

- Phát biểu và chứng minh Định lý 3.2.4 về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück, trong đó chúng tôi thay thế f bởi $F = f^{n+n_1+\dots+n_k}$ và f' bởi một đa thức vi phân của f dạng $M[f] := f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)}$.

Kết luận chung và đề nghị

Luận án đã nghiên cứu về một số dạng định lý cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna - Cartan cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp các siêu mặt và vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên và hàm nguyên liên quan đến giả thuyết Brück.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Phát biểu và chứng minh hai dạng định lý cơ bản: Định lý cơ bản thứ nhất và Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong các trường hợp mục tiêu là các siêu mặt.

2. Đưa ra hai định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ trong trường hợp mục tiêu là siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

3. Đưa ra một tiêu chuẩn chuẩn tắc mới cho họ các hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và chứng minh một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo cho kết quả của luận án như sau:

1. Nghiên cứu một số Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên vào một đa tạp đại số trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ trong các trường hợp mục tiêu là siêu phẳng hay siêu mặt.

2. Nghiên cứu vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt ở vị trí tổng quát.

3. Nghiên cứu vấn đề xác định duy nhất cho hàm hay đường cong chỉnh hình với mục tiêu là tập hợp các điểm hay các siêu phẳng mà chứng minh dựa vào các dạng định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm mới.

Danh mục Công trình của tác giả đã công bố liên quan đến luận án

1) ([47]) Thin N. V., Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2018), A uniqueness problem for entire functions related to Brück's conjecture, *Mathematica Slovaca*, Vol. 68, No. 4, pp. 823-836.

2) ([39]) Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2021), Some uniqueness theorems for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 66, Issue. 1, pp. 22-34.

3) ([40]) Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2022), On fundamental theorems for holomorphic curves on an annulus intersecting hypersurfaces, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 48, pp. 151-163.

Tài liệu tham khảo

- [1] An T. T., Phuong H. T. (2009), An explicit estimate on multiplicity truncation in the second main theorem for holomorphic curves encountering hypersurfaces in general position in projective space, *Houston Journal of Mathematics*, Vol. 35, No.3, pp. 774-786.
- [2] Brück, R. (1996), On entire functions which share one value CM with their first derivatives, *Results Math* 30, pp. 21-24.
- [3] Banerjee. A., Chakraborty. B. (2016), On the generalizations of Brück conjecture, *Commun. Korean Math*, Soc.31, no. 2, 311-327.
- [4] Cartan H. (1933), Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, *Mathematica (Cluj)* 7, pp. 80-103.
- [5] Chuang C. T. (1987), On differential polynomials, *Analysis of One Complex Variable*, World Sci. Publishing, Singapore, pp. 12-32.
- [6] Chakraborty. B., (2018), Some uniqueness results related to the Brück conjecture, *Analysis*, Doi: 10.1515/anly-2017-0060.
- [7] Cao T. B., Deng Z. S. (2012), On the uniqueness of meromorphic functions that share three or two finite sets on annuli, *Proc Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, Vol. 122, No. 2, pp. 203-220.
- [8] Cao T. B., Yi H. X., Xu H. Y. (2009), On the multiple values and uniqueness of meromorphic functions on annuli, *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 58, Issue 7, pp. 1457-1465.

- [9] Clunie J., Hayman W. K. (1965), The spherical derivative of integral and meromorphic functions, *Commentarii Mathematici Helvetici* 40, pp. 117-148.
- [10] Chen Z. X., Shon K. H. (2004), On conjecture of R. Brück concerning the entire function sharing one value CM with its derivative, *Taiwanese journal of Mathematics*, Vol. 8, No. 2, pp. 235-244.
- [11] Chen Z. H., Yan Q. M. (2010), A note on uniqueness problem for meromorphic mappings with $2N + 3$ hyperplanes, *Science China Mathematics*, Vol. 53, No. 10, pp. 2657-2663.
- [12] Corvaja P., Zannier U. M. (2004), On a general Thue's equation, *American Journal of Mathematics*, Vol. 126, No. 5, pp. 1033-1055.
- [13] Dethloff G., Tan T. V. (2006), An extension of uniqueness theorems for meromorphic mappings, *Vietnam Journal of Mathematics*. 34, No. 1, pp. 71-94.
- [14] Dulock M., Ru M. (2008), A uniqueness theorem for holomorphic curves sharing hypersurfaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Issue. 8, pp. 797-802.
- [15] Fujimoto H. (1975), The uniqueness problem of meromorphic maps in to complex projective space, *Nagoya Math. J.*, Vol. 58, pp. 1-23.
- [16] Fujimoto H. (1998), Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory, *Nagoya Math. J.*, Vol. 152, pp. 131-152.
- [17] Giang H. H. (2021), Uniqueness theorem for holomorphic mappings on annuli sharing few hyperplanes, *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 73, Issue. 2, pp. 289-302.

- [18] Gundersen G. G., Yang L. Z. (1998), Entire functions that share one value with one or two of their derivatives, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 223, Issue. 1, pp. 88-95.
- [19] Hayman W. K. (1964), Meromorphic Functions, *Clarendon Press, Oxford*.
- [20] Hennekemper W. (1981), Über die Werteverteilung von $(f^{k+1})^k$ *Math. Z.* 177, pp. 375-380.
- [21] Hinchliffe J. D. (2002), On a result of Chuang related to Hayman's Alternative, *Comput. Method. Funct. Theory*, Issue. 2, pp. 293-297.
- [22] Hu P. C., Li P., Yang C. C. (2003), Unicity of meromorphic mappings, *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*.
- [23] Hu P. C., Thin N. V. (2021), Difference analogue of second main theorems for meromorphic mapping into algebraic variety, *Analysis Mathematica*, Vol. 47, pp. 811-842.
- [24] Khrystianyn A. Y., Kondratyuk A. A. (2005), On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. I, *Matematychni Studii*, Vol. 23, No. 1, pp. 19-30.
- [25] Khrystianyn A. Y., Kondratyuk A. A. (2005), On the Nevanlinna theory for meromorphic functions on annuli. II, *Matematychni Studii*, Vol. 24, No. 2, pp. 57-68.
- [26] Korhonen R. (2004), Nevanlinna Theory in an Annulus, in *Book: Value Distribution Theory and Related Topics*, pp. 167-179.
- [27] Lang S. (1987), Introduction to Complex Hyperbolic spaces, *Springer-Verlag New York Inc.*

- [28] Lahiri I., Dewan. S. (2003), Value distribution of the product of a meromorphic function and its derivative, *Kodai Mathematical Journal*, Vol. 26, Issue. 1, pp. 95-100.
- [29] Laine I. (1993), Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, in *Book: De Gruyter Studies in Mathematics*, Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- [30] Li X. M., Cao C. C. (2008), Entire functions sharing one polynomial with their derivatives, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, Vol. 118, No. 1, pp. 13–26.
- [31] Lund M. E., Ye Z. (2009), Logarithmic derivatives in annuli, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 356, pp. 441-452.
- [32] Lund M. E., Ye Z. (2010), Nevanlinna theory of meromorphic functions on annuli, *Science China Mathematics*, Vol. 53, pp. 547-554.
- [33] Nochka I. E. (1983), On the theory of meromorphic functions, *Sov. Math. Dokl.*, Vol. 27, pp. 377-381.
- [34] Phuong H. T. (2009), On unique range sets for holomorphic maps sharing hypersurfaces without counting multiplicity, *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. 34, No. 3, pp. 351-360.
- [35] Phuong H. T. (2011), On Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing hypersurfaces without counting multiplicity, *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 63, No. 4, pp. 556-565.
- [36] Phuong H. T. (2013), Uniqueness theorems for holomorphic curves sharing moving hypersurfaces, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 58, Issue. 11, pp. 1481-1491.

- [37] Phuong H. T., Minh T. H. (2013), A uniqueness theorem for holomorphic curves on annulus sharing $2n+3$ hyperplanes, *VietNam Journal of Mathematics*, Vol. 41, No. 2, pp. 167-179.
- [38] Phuong H. T., Thin N. V. (2015), On fundamental theorems for holomorphic curves on the annuli, *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 67, Issue. 7, pp. 1111-1125.
- [39] Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2021), Some uniqueness theorems for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces, *Complex Variables and Elliptic Equations* , Vol. 66, Issue. 1, pp. 22-34.
- [40] Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2021), On fundamental theorems for holomorphic curves on an annulus intersecting hypersurfaces, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 48, pp. 151-163.
- [41] Ru M. (2004), A defect relation for holomorphic curves intersecting hypersurfaces, *American Journal of Mathematics*, Vol. 126, No. 1, pp. 215-226.
- [42] Ru M. (2009), Holomorphic curves into algebraic varieties, *Annals of Mathematics*, Vol. 169, pp. 255–267.
- [43] Ru M., Wang J. T-Y. (2004), Truncated second main theorem with moving targets, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 356, No. 2, pp. 557-571.
- [44] Schiff J. (1993), Normal Families, *Springer-Verlag*.
- [45] Shi L. (2020), Degenerated second main theorem for holomorphic curves into algebraic varieties, *International Journal of Mathematics*, Vol. 31, No. 06, 2050042.
- [46] Smiley L. (1983), Geometric conditions for unicity of holomorphic curves, *Contemp. Math. Soc.*, Vol. 25, pp. 149-154.

- [47] Thin N. V., Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2018), A uniqueness problem for entire functions related to Brück's conjecture, *Mathematica Slovaca*, Vol. 68, No. 4, pp. 823-836.
- [48] Thai D. D., Quang S. D. (2008), Second main theorem with truncated counting function in several complex variables for moving targets, *Forum Mathematicum*, Vol. 20, pp. 163-179.
- [49] Tan Y., Zang Q. (2015), The fundamental theorems of algebroid functions on annuli, *Turkish Journal of Mathematics*, Vol. 39, pp. 293-312.
- [50] B.L. van der Waerden (1991), *Algebra* Springer Verlag, Vol. II.
- [51] Yan Q. M., Chen Z. H. (2008), Weak Cartan-type second main theorem for holomorphic curves, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, Vol. 24, No.3, pp. 455-462.
- [52] Yang L. Z., Zhang J. L. (2008), Non-existence of meromorphic solutions of a Fermat type functional equation, *Aequationes mathematicae*, Vol. 76, pp. 140-150.
- [53] Zalcman L. (1998), Normal families: New perspectives, *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, Vol. 35, pp. 215-230.
- [54] Zang Q. (2005), Meromorphic function that shares one small function with its derivative, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 6, Issue. 4, Article. 116.
- [55] Zang T. D., Lu. W. R. (2008), Notes on a meromorphic function sharing one small function with its derivative, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Vol. 53, Issue. 9, pp. 857-867.