

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LEUANGLITH VILAISAVANH

VỀ LÝ THUYẾT NEVANLINNA CHO HÌNH VÀNH
KHUYÊN VÀ VẤN ĐỀ DUY NHẤT

Ngành: Toán Giải tích

Mã số: 9460102

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2022

Công trình được hoàn thành tại:
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Hà Trần Phương

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Trường
hợp tại: **TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM-ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

Vào hồi.....ngày.....tháng.....năm 2022

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- THƯ VIỆN QUỐC GIA
- TRUNG TÂM SỐ - ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
- THƯ VIỆN TRƯỜNG ĐẠI SƯ PHẠM

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Được bắt nguồn bởi các công trình của R. Nevanlinna từ đầu thế kỷ XX, Lý thuyết phân bố giá trị cho hàm phân hình (còn gọi là Lý thuyết Nevanlinna) được đánh giá là một trong những thành tựu sâu sắc và đẹp đẽ của Toán học. Với nội dung chính bao gồm hai định lý cơ bản: Định lý cơ bản thứ nhất và Định lý cơ bản thứ hai, Lý thuyết phân bố giá trị ngày càng thu hút được sự quan tâm của nhiều tác giả trong và ngoài nước, thu được nhiều kết quả quan trọng và có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học như vấn đề duy nhất cho hàm phân hình, hệ động lực phức, phương trình vi phân phức,....

Kí hiệu $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là không gian xạ ảnh n chiều trên trường $\mathbb{C}$. Năm 1933, H. Cartan đã mở rộng các kết quả của Nevanlinna cho trường hợp đường cong chỉnh hình vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và đưa ra một số ứng dụng. Theo hướng nghiên cứu này nhiều nhà toán học trong và ngoài nước đã công bố nhiều kết quả đặc sắc về các dạng định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai trong các trường hợp khác nhau và nghiên cứu ứng dụng của các định lý này trong những lĩnh vực khác nhau của Toán học, đặc biệt là vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình.

Với đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có một biểu diễn tối giản là $(f_0, \dots, f_n)$, hàm

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan* của đường cong f , trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$.

Cho H là một siêu phẳng, xác định bởi dạng tuyến tính L . Hàm

$$m_f(r, H) = m_f(r, L) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|}{|L(f)(re^{i\theta})|} d\theta$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của f kết hợp với siêu phẳng H . Kí hiệu $n_f(r, H)$ là số không điểm của $L(f)(z)$ trong đĩa $\{|z| < r\}$, kể cả bội, $n_f^M(r, H)$ là số các không điểm $L(f)(z)$ trong đĩa $\{|z| < r\}$, bội cắt cụt bởi một số nguyên dương M . Hàm

$$N_f(r, H) = N_f(r, L) = \int_0^r \frac{n_f(t, H) - n_f(0, H)}{t} dt + n_f(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* và hàm

$$N_f^M(r, H) = N_f^M(r, L) = \int_0^r \frac{n_f^M(t, H) - n_f^M(0, H)}{t} dt + n_f^M(0, H) \log r$$

được gọi là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi M của đường cong f kết hợp với siêu phẳng H , trong đó $n_f(0, H) = \lim_{r \rightarrow 0} n_f(r, H)$, $n_f^M(0, H) = \lim_{r \rightarrow 0} n_f^M(r, H)$. Số M trong kí hiệu $N_f^M(r, H)$ được gọi là *chỉ số bội cắt cụt*.

Năm 1933, H. Cartan đã chứng minh hai kết quả sau:

Định lý 1. Cho đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và một siêu phẳng H sao cho $f(\mathbb{C}) \not\subset H$, khi đó ta có

$$T_f(r) = N_f(r, H) + m_f(r, H) + O(1).$$

Định lý 2. Cho đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và q siêu phẳng $H_1, \dots, H_q$ ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó bất đẳng thức

$$(q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^n(r, H_j) + o(T_f(r))$$

đúng với mọi $r > 0$ đủ lớn nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn.

Định lý 1 được gọi là Định lý cơ bản thứ nhất, Định lý 2 được gọi là Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ không suy biến tuyến tính kết hợp với các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Công trình này của H. Cartan được đánh giá hết sức quan trọng, nó mở ra một hướng nghiên cứu mới trong việc phát triển lý thuyết phân bố giá trị - nghiên cứu sự phân bố giá trị của ánh xạ phân hình, chỉnh hình - mà ngày nay ta biết đến với tên gọi gắn với tên hai nhà toán học xuất sắc “**Lý thuyết Nevanlinna-Cartan**”. Các kết quả nghiên cứu theo hướng này trong thời gian gần đây tập trung vào hai vấn đề:

1. Xây dựng các dạng định lý cơ bản (định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai) cho đường cong chỉnh hình từ $\mathbb{C}$ hoặc một miền trong $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hoặc một đa tạp

đại số xạ ảnh trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với mục tiêu là các siêu phẳng, siêu mặt cố định hoặc di động, bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan với các hàm xấp xỉ, hàm đếm hay hàm đếm bội cắt cụt. Từ đó suy ra các kết quả về quan hệ số khuyết.

2. Nghiên cứu các ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna-Cartan trong các lĩnh vực khác nhau của toán học, chẳng hạn, nghiên cứu sự suy biến của các đường cong đại số, vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và đường cong chỉnh hình, hệ phương trình vi phân, đạo hàm riêng phức,

Hướng nghiên cứu thứ nhất đã thu hút được sự quan tâm của rất nhiều nhà toán học và thu được nhiều kết quả sâu sắc, chẳng hạn, G. Dethloff, E. I. Nochka, M. Ru, P. Vojta, H. H. Khoai, D. D. Thai, T. V. Tan, T. T. H. An, S. D. Quang Năm 1983, Nochka đã mở rộng kết quả của H. Cartan cho trường hợp họ các siêu phẳng $H_1, \dots, H_q$ ở vị trí N -tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Năm 2004, M. Ru đã đưa ra một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình không suy biến đại số kết hợp với các siêu mặt cố định. Năm 2009, Ông đã mở rộng kết quả đó cho đường cong chỉnh hình vào một đa tạp đại số xạ ảnh V . Năm 2007, T. T. H. An và H. T. Phuong và năm 2008, Q. M. Yan và Z. H. Chen đã chứng minh một quan hệ giữa hàm đặc trưng $T_f(r)$ của đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với các hàm đếm bội cắt cụt $N_f^M(r, D_j)$ trong trường hợp họ các siêu mặt cố định $\{D_1, \dots, D_q\}$ ở vị trí tổng quát. Ngoài ra, trong những năm gần đây G. Dethloff, T. V. Tan, D. D. Thai, S. D. Quang, L. Shi, P. C. Hu, N. V. Thin... đã công bố một số công trình theo hướng này cho đường cong chỉnh hình một hoặc nhiều biến phức vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ hay một đa tạp đại số xạ ảnh trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với mục tiêu là các siêu phẳng hay siêu mặt, cố định hay di động, ở vị trí tổng quát hay N -dưới tổng quát.

Một trong những ứng dụng quan trọng của lý thuyết Nevanlinna-Cartan, cũng như lý thuyết Nevanlinna là nghiên cứu sự xác định của ánh xạ chỉnh hình cũng như hàm phân hình thông qua ảnh ngược của một hay nhiều tập hữu hạn phần tử. Vấn đề này cũng thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học: A. Boutabaa, W. Cherry, G. Dethloff, H. Fujimoto, M. Ru, L. Smiley, C. C. Yang, H. H. Khoai,

D. D. Thai, T. V. Tan, S. D. Quang, H. T. Phuong và nhiều tác giả khác.

Cho ánh xạ chỉnh hình $f : U \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và một biểu diễn tối giản $(f_0, \dots, f_n)$ của f , trong đó U là toàn bộ mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ hoặc một miền trong $\mathbb{C}$. Với một họ các siêu mặt cô định $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$, với mỗi $D_j \in \mathcal{D}$, ta kí hiệu

$$\begin{aligned}\overline{E}_f(D_j) &= \{z \in U \mid Q_j \circ f(z) = 0 \text{ không kể bội}\}; \\ E_f(D_j) &= \{(z, m) \in U \times \mathbb{N} \mid Q_j \circ f(z) = 0 \text{ và } \text{ord}_{Q_j \circ f}(z) = m\}.\end{aligned}$$

Và đặt

$$\overline{E}_f(\mathcal{D}) = \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} \overline{E}_f(D_j) \quad \text{và} \quad E_f(\mathcal{D}) = \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} E_f(D_j).$$

Kí hiệu $\mathcal{F}$ là một họ các ánh xạ chỉnh hình khác hằng từ U vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Họ các siêu mặt $\mathcal{D}$ được gọi là *tập xác định duy nhất không kể bội*, kí hiệu URSIM (hoặc *tập xác định duy nhất kể cả bội*, kí hiệu URSCM) cho họ ánh xạ $\mathcal{F}$ nếu với mỗi cặp ánh xạ $f, g \in \mathcal{F}$, điều kiện $\overline{E}_f(\mathcal{D}) = \overline{E}_g(\mathcal{D})$ (hoặc $E_f(\mathcal{D}) = E_g(\mathcal{D})$ tương ứng) kéo theo $f \equiv g$. Các tập URSIM, URSCM được gọi chung là *tập xác định duy nhất* cho họ ánh xạ $\mathcal{F}$.

Năm 1975, H. Fujimoto đã chứng minh một kết quả về vấn đề duy nhất cho ánh xạ phân hình vào không gian xạ ảnh phức, cho thấy tồn tại các tập xác định duy nhất kể cả bội gồm $3n + 2$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát cho họ các ánh xạ phân hình phức không suy biến tuyến tính. Kết quả này được xem như mở đầu cho các nghiên cứu về vấn đề duy nhất cho ánh xạ chỉnh hình. Tiếp theo công trình này, năm 1983, L. Smiley giới thiệu một kết quả mới về vấn đề duy nhất cho ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính bởi ảnh ngược của một họ hữu hạn các siêu phẳng, vấn đề này được H. Fujimoto nghiên cứu lại năm 1998. Năm 2006, G. Dethloff và T. V. Tan xem xét vấn đề tương tự cho trường hợp siêu phẳng di động. Và nhiều kết quả khác về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trong trường hợp nhiều biến được công bố bởi M. Ru, D. D. Thai, T. V. Tan, D. Quang Chú ý rằng, hầu hết những chứng minh của các kết quả về tập xác định duy nhất đều dựa vào các dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt.

Đối với vấn đề duy nhất cho hàm phân hình, năm 1926, R. Nevanlinna chứng minh: *Hai hàm phân hình phức khác hằng f, g thỏa mãn $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(a_i)$, $i =$*

$1, \dots, 5$, thì $f \equiv g$. Kết quả này của Nevanlinna cho thấy hai hàm phân hình được xác định duy nhất bởi ảnh ngược của năm điểm phân biệt. Tiếp theo công trình Nevanlinna, có rất nhiều công trình của các tác giả trong và ngoài nước được công bố, tập trung vào các hướng: các hàm phân hình chung nhau một phần tử hay một tập hợp, có tính bội và không tính bội. Kí hiệu

$$\sigma_2(f) = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

Cho f, g là hai hàm phân hình trên mặt phẳng phức và $a \in \mathbb{C}$. Ta nói hàm f và g chung nhau giá trị a không kể bội nếu $f - a$ và $g - a$ có cùng các không điểm, f và g chung nhau giá trị a kể cả bội nếu $f - a$ và $g - a$ có cùng các không điểm kể cả bội. Năm 1996, Brück đã đặt ra giả thuyết mà về sau chúng ta quen gọi là giả thuyết Brück: *cho f là một hàm nguyên thỏa mãn $\sigma_2(f)$ không là một số nguyên hay ∞ . Nếu f và f' chung nhau một giá trị hữu hạn $a \in \mathbb{C}$ kể cả bội thì $\frac{f' - a}{f - a} = c$, trong đó c là một hằng số nào đó.* Chú ý rằng, giả thuyết trên đã được Brück chứng minh trong trường hợp $a = 0$. Năm 1998, Gundersen và Yang đã chứng minh giả thuyết Brück đúng khi f là hàm nguyên có bậc hữu hạn (không phải là số nguyên). Trong trường hợp f là một hàm có bậc vô hạn với $\sigma_2(f) < \frac{1}{2}$, giả thuyết Brück được chứng minh bởi Chen và Shon. Trường hợp $\sigma_2(f) \geq \frac{1}{2}$ vẫn còn là một vấn đề mở. Một hướng nghiên cứu thú vị khác về vấn đề duy nhất liên quan đến giả thuyết Brück là thay f với f^n , thay thế f bởi một đa thức vi phân hoặc thay thế a bởi một đa thức hay một hàm. Năm 2008, L. Z. Yang và J. L. Zhang đã chứng minh một kết quả liên quan đến giả thuyết Brück như sau: *cho f là một hàm nguyên khác hằng, $n \geq 7$ là một số nguyên và $F = f^n$. Nếu F và F' chung nhau giá trị 1 CM, thì $F \equiv F'$ và f có dạng*

$$f = ce^{z/n},$$

trong đó c là một hằng số khác 0. Năm 2008, Li và Cao nghiên cứu một mở rộng của giả thuyết Brück khi thay thế hằng số a bởi một đa thức phù hợp và thay thế đạo hàm cấp một f' bởi đạo hàm cấp cao. Các công trình này tạo nên hướng nghiên cứu mới, thường gọi là *vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück*.

Như vậy, việc tiếp tục phát triển lý thuyết Nevanlinna-Cartan, đặc biệt nghiên cứu các dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt là thực sự cần thiết. Nó sẽ cho chúng ta những cơ sở quan trọng để nghiên cứu vấn đề duy nhất cho hàm phân hình và ánh xạ chỉnh hình. Hiện nay, vấn đề phát triển lý thuyết Nevanlinna-Cartan và nghiên cứu ứng dụng của lý thuyết này cũng như lý thuyết Nevanlinna trong những ngành khoa học khác nhau đã và đang được quan tâm mạnh mẽ, gắn liền với các công trình của rất nhiều nhà toán học trong và ngoài nước: A. Boutabaa, H. Cartan, W. Cherry, G. Dethloff, Ph. Griffiths, M. Ru, P. Vojta, P. M. Wong, H. H. Khoai, D. D. Thai, T. T. H. An, S. D. Quang, H. T. Phuong, V. H. An và nhiều tác giả khác.

Sự lựa chọn đề tài "**Về lý thuyết Nevanlinna cho hình vành khuyên và vấn đề duy nhất**" của tác giả luận án này cũng nhằm tiếp tục phát triển thêm những điều lý thú của Lý thuyết Nevanlinna - Cartan cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên và vấn đề duy nhất.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

• Đối tượng nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi tập trung nghiên cứu các tính chất của hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. Đây cũng là các đối tượng nghiên cứu cơ bản của lý thuyết Nevanlinna và Nevanlinna-Cartan.

• Mục đích nghiên cứu :

Hướng nghiên cứu thứ nhất: xây dựng một số dạng định lý cơ bản (thứ nhất và thứ hai) cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với các mục tiêu là siêu mặt bằng cách thiết lập quan hệ giữa hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan với các hàm xấp xỉ, hàm đếm hay hàm đếm bội cắt cụt.

Hướng nghiên cứu thứ hai: thiết lập một số điều kiện đủ để hai đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên là trùng nhau trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

Hướng nghiên cứu thứ ba: xây dựng một số kết quả mới về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück trong trường hợp thay thế f bởi F và f' bởi $M[f]$.

3. Tổng quan về luận án

Trong suốt luận án này ta luôn kí hiệu $R > 1$ là một số thực dương hoặc $+\infty$ và

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < R\}$$

là một hình vành khuyên trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Một trong những hướng nghiên cứu trong lý thuyết Nevanlinna và Nevanlinna-Cartan là xem xét các định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai cho trường hợp ánh xạ từ $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Theo hướng nghiên cứu này, R. Korhonen, A. Khrystianyn và A. Kondratyuk đã có các công bố đầu tiên về phân bố giá trị cho hàm phân hình trên hình vành khuyên. Vấn đề này lập tức thu hút được sự quan tâm của các tác giả trên thế giới như H. Cao, S. Liu, N. Lu, M. E. Lund, D. Meng và thu được một số kết quả quan trọng. Đối với đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, gần đây, năm 2015, H. T. Phuong và N. V. Thìn đã công bố hai định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu phẳng di động. Các quả mà chúng tôi đạt được trong luận án này về phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên là các định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai trong trường hợp mục tiêu là các siêu mặt. Kết quả cụ thể như sau:

Định lý 1.2.3. *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình và D là một siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d sao cho ảnh của f không chứa trong D . Khi đó với mỗi $1 < r < R$, ta có*

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = dT_f(r) + O(1).$$

Định lý 1.3.6. *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và $D_j, 1 \leq j \leq q$, là một họ các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d_j tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi d là bội số chung nhỏ nhất của các $d_1, d_2, \dots, d_q$. Với*

$$0 < \varepsilon < 1$$

$$\alpha \geq (d[(n+1)^2 2^n] \varepsilon^{-1} + 1).$$

Khi đó với mọi $1 < r < R$ ta có

$$\| (q - (n+1) - \varepsilon) T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q d_j^{-1} N_f^\alpha(r, D_j) + O_f(r),$$

trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R = +\infty \\ O(\log \frac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R < +\infty. \end{cases}$$

Định lý 1.2.3 là một dạng định lý cơ bản thứ nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên. Định lý 1.3.6 là một dạng Định lý cơ bản thứ hai với bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ kết hợp với các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, cho thấy một quan hệ giữa hàm đặc trưng $T_f(r)$ của đường cong chỉnh hình $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ với các hàm đếm bội cắt cụt $N_f^M(r, D_j)$.

Đối với vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên, năm 2013, H. T. Phuong và T. H. Minh đã chứng minh một số kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu phẳng cố định, năm 2021, H. H. Giang công bố một số kết quả theo hướng nghiên cứu này cùng với mục tiêu là các siêu phẳng.... Các quả mà chúng tôi đạt được theo hướng nghiên cứu này như sau:

Định lý 2.2.1. Cho f và g là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Kí hiệu $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q \geq n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}^2/\delta_{\mathcal{D}}$ siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.

Định lý 2.2.2. Cho f và g là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Kí hiệu $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}/m_{\mathcal{D}}$ siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử

$$(a) \quad f(z) = g(z) \text{ với mọi } z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D}),$$

(b) $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ và $\overline{E}_g(D_i) \cap \overline{E}_g(D_j) = \emptyset$ với mọi $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$.

Khi đó $f \equiv g$.

Định lý 2.2.1 và Định lý 2.2.2 là hai điều kiện đại số để xác định duy nhất đối với đường cong chính hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát với phép nhúng Veronese.

Cho f và g là hai hàm phân hình và a và b là hai số phức phân biệt. Nếu $g - b = 0$ mỗi khi $f - a = 0$ thì ta viết $f = a \Rightarrow g = b$. Nếu $f = a \Rightarrow g = b$ và $g = b \Rightarrow f = a$ thì ta viết $f = a \Leftrightarrow g = b$. Nếu $f - a$ và $g - b$ có chung không điểm và cực điểm kể cả bội thì ta kí hiệu $f - a \rightleftharpoons g - b$. Theo hướng nghiên cứu thứ ba về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück, chúng tôi đã đạt được định lý sau vào năm 2018:

Định lý 3.2.4 Cho $n \in \mathbb{N}$ và $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \dots, k$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$1) \ k = 1, \ n = 0, \ n_1 \geq t_1 + 1;$$

$$2) \ n \geq 1 \text{ hoặc } k \geq 2, \ n_j \geq t_j, \ n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2.$$

Cho a và b là hai giá trị hữu hạn khác 0 và f là một hàm nguyên khác hằng. Nếu $f^{n+n_1+\dots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ thì

$$\frac{f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} - b}{f^{n+n_1+\dots+n_k} - a} = c,$$

trong đó c là một hằng số. Đặc biệt, nếu $a = b$ thì $f = c_1 e^{tz}$, trong đó c_1 và t là các hằng số khác 0 và t thỏa mãn $(tn_1)^{t_1} \dots (tn_k)^{t_k} = 1$.

Để chứng minh kết quả về vấn đề duy nhất trước hết chúng tôi phải thiết lập một tiêu chuẩn chuẩn tắc cho họ các hàm phân hình như sau:

Định lý 3.2.3 Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên miền phẳng phức D . Cho a và b là hai số phức thỏa mãn $b \neq 0$, gọi $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ và $n_j, t_j, j = 1, 2, \dots, k$ thỏa mãn

$$n_j \geq t_j, \quad n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 3, \quad (1)$$

và $f^{n+n_1+\dots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b$ đối với mỗi $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ngoài ra, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình thì khẳng định đúng khi (1) được thay thế bởi một trong các điều kiện sau:

$$k = 1, n = 0, n_1 \geq t_1 + 1;$$

$$n \geq 1 \text{ hoặc } k \geq 2, n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2.$$

Kỹ thuật chứng minh sử dụng Định lý 3.2.4 được kết hợp công cụ của lý thuyết họ chuẩn tắc và lý thuyết Nevanlinna.

4. Phương pháp nghiên cứu

Trong luận án này chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu cơ bản: trên cơ sở nghiên cứu các tài liệu theo hướng nghiên cứu, chúng tôi phát hiện các vấn đề mở cần phải giải quyết và sử dụng các kiến thức, kỹ thuật của giải tích phức, lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna và Nevanlinna-Cartan, hình học đại số, lý thuyết họ chuẩn tắc để đề xuất những phương pháp phù hợp hoặc sử dụng một số kỹ thuật đã có nhằm giải quyết các vấn đề đặt ra. Ngoài việc công bố trên các tạp chí, các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại :

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên hằng năm.
- Hội nghị Quốc tế về Đại số - Lý thuyết số - Hình học - Tô pô 2021, 21 - 23 /10/ 2021 tại Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

Chương 1

Hai định lý cơ bản cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên

1.1. Một số kiến thức cơ bản trong Lý thuyết phân bố giá trị cho các hàm phân hình

Cho f là một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm f . Kí hiệu $n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội của f trong $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Hàm

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* của f . Hàm $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$ là *hàm đặc trưng* của hàm f .

Định lý 1.1.1 (Định lý cơ bản thứ nhất). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và a là số phức. Khi đó*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1).$$

Định lý 1.1.2 (Định lý cơ bản thứ hai). *Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Cho $a_1, \dots, a_q$ là q số phức phân biệt trong $\mathbb{C}$. Khi đó*

$$(q-1)T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \sum_{i=1}^q \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_i}) + S(r, f)$$

đúng với mọi $r \in [1, \infty)$ ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn, trong đó $S(r, f) = o(T(r, f))$ khi $r \rightarrow \infty$.

Cho $R > 1$ là số thực dương hoặc $+\infty$, ta kí hiệu

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R} < |z| < R \right\},$$

là hình vành khuyên trong $\mathbb{C}$. Với mỗi số thực r thỏa mãn $1 < r < R$, ta kí hiệu

$$\Delta_r = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} < |z| < r \right\} = \Delta_{1,r} \cup \Delta_{2,r}.$$

Cho $f(z)$ là một hàm phân hình trên Δ và z_0 là một điểm thuộc Δ . Nếu $f(z)$ có không điểm bội α tại z_0 thì ta kí hiệu $\nu_f(z_0) = \alpha$. Nếu $f(z)$ có cực điểm bội α tại z_0 thì ta kí hiệu $\nu_{f,\infty}(z_0) = \alpha$. Trường hợp $f(z_0) \neq 0, \infty$ ta kí hiệu $\nu_f(z_0) = 0$ và $\nu_{f,\infty}(z_0) = 0$. Cho f là một hàm phân hình trên Δ , tức là f chỉnh hình trên Δ trừ ra một số các điểm bất thường cực điểm, ta nhắc lại

$$m(r, f) = m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

trong đó $a \in \mathbb{C}$ và $r \in (R^{-1}, R)$ và $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$ với số thực $x > 0$. Với một số thực $r \in \{1 < r < R\}$, ta kí hiệu

$$m_0(r, f) = m(r, f) + m(r^{-1}, f).$$

Hàm $m_0(r, f)$ được gọi là *hàm xấp xỉ* hay *hàm bù* của f tại $a \in \mathbb{C}$ và tại ∞ . Kí hiệu $n_1(r, f)$ là số các cực điểm kể cả bội của f trong $\Delta_{1,r}$, $n_2(r, f)$ là số các cực điểm kể cả bội của f trong $\Delta_{2,r}$, tức là

$$n_1(r, f) = \sum_{z \in \Delta_{1,r}} \nu_{f,\infty}(z), \quad n_2(r, f) = \sum_{z \in \Delta_{2,r}} \nu_{f,\infty}(z).$$

Ta đặt

$$N_1(r, f) = \int_{1/r}^1 \frac{n_1(t, f)}{t} dt; \quad N_2(r, f) = \int_1^r \frac{n_2(t, f)}{t} dt.$$

Hàm đếm tại các cực điểm kể cả bội của hàm f được định nghĩa bởi:

$$N_0(r, f) = N_1(r, f) + N_2(r, f).$$

Hàm đặc trưng $T_0(r, f)$ của f được định nghĩa bởi

$$T_0(r, f) = m_0(r, f) - 2m(1, f) + N_0(r, f).$$

Các hàm xấp xỉ, hàm đếm và hàm đặc trưng được gọi là các hàm Nevanlinna của một hàm phân hình trên hình vành khuyên.

Mệnh đề sau đây thường được gọi là Định lý cơ bản thứ nhất và Định lý cơ bản thứ hai cho hàm phân hình trên hình vành khuyên:

Mệnh đề 1.1.3. Cho f là một hàm phân hình trên Δ . Khi đó với mỗi $r \in (1, R)$, ta có

$$T_0(r, \frac{1}{f-c}) = T_0(r, f) + O(1)$$

đúng với mọi hằng số $c \in \mathbb{C}$.

Mệnh đề 1.1.4. Cho f là một hàm phân hình trên Δ , $a_1, a_2, \dots, a_p$ là các số phức phân biệt và $\lambda \geq 0$. Khi đó:

$$m_0(r, f) + \sum_{\nu=1}^p m_0\left(r, \frac{1}{f-a_\nu}\right) \leq 2T_0(r, f) - N_0^{(1)}(r, f) + S(r, f)$$

trong đó

$$N_0^{(1)}(r, f) = N_0(r, 1/f') + 2N_0(r, f) - N_0(r, f')$$

và

i) nếu $R = \infty$ thì $S(r, f) = O(\log(rT_0(r, f)))$ với mỗi $r \in (1, R)$, ngoại trừ một tập Δ_r thỏa mãn: $\int_{\Delta_r} r^{\lambda-1} dr < +\infty$;

ii) nếu $R < +\infty$ thì $S(r, f) = O\left(\log\left(\frac{T_0(r, f)}{R-r}\right)\right)$ với mỗi $r \in (1, R)$, ngoại trừ một tập Δ'_r thỏa mãn $\int_{\Delta'_r} \frac{d_r}{(R-r)^{\lambda-1}} < +\infty$.

1.2. Các hàm Nevanlinna-Cartan và Định lý cơ bản thứ nhất

Định nghĩa 1.2.1. Một ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, hay còn gọi là đường cong chỉnh hình, trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được định nghĩa là ánh xạ

$$f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$$z \longmapsto (f_0(z) : \dots : f_n(z)),$$

trong đó $f_j, 0 \leq j \leq n$, là các hàm nguyên trên Δ . Nếu $f_j, j = 0, 1, \dots, n$, là các đa thức thì f được gọi là đường cong đại số. Trong trường hợp $f_0, \dots, f_n$ không có không điểm chung trên Δ thì ta gọi $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ là một biểu diễn rút gọn của f .

Định nghĩa 1.2.2. Đường cong chỉnh hình $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là *suy biến tuyến tính* nếu ảnh của f chứa trong một đa tạp tuyến tính thực sự nào đó của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Đường cong chỉnh hình f được gọi là *suy biến đại số* nếu ảnh của f chứa trong một đa tạp đại số thực sự nào đó của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Cho $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình, trong đó $f_0, \dots, f_n$ là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung trong Δ . Với $1 < r < R$, hàm đặc trưng $T_f(r)$ của f được xác định bởi

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(r^{-1}e^{i\theta})\| d\theta,$$

trong đó $\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \dots, |f_n(z)|\}$. Khái niệm này độc lập với mọi cách chọn biểu diễn tối giản của hàm f , sai khác một hằng số. Cho D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, xác định bởi đa thức thuần nhất Q . *Hàm xấp xỉ* của f kết hợp với siêu mặt D được xác định bởi

$$m_f(r, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|Q \circ f(re^{i\theta})|} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(r^{-1}e^{i\theta})\|^d}{|Q \circ f(r^{-1}e^{i\theta})|} d\theta.$$

Cho M là một số nguyên dương, kí hiệu $n_{1,f}(r, D)$ và $n_{2,f}(r, D)$ là số các không điểm của $Q(f)$ lần lượt trong $\Delta_{1,r}$ và $\Delta_{2,r}$ kể cả bội, $n_{1,f}^M(r, D)$ và $n_{2,f}^M(r, D)$ là số các không điểm bội cắt cụt bởi M của $Q(f)$ lần lượt trong $\Delta_{1,r}$ và $\Delta_{2,r}$, tức là:

$$\begin{aligned} n_{1,f}(r, D) &= n_1(r, 1/Q(f)), & n_{2,f}(r, D) &= n_2(r, 1/Q(f)); \\ n_{1,f}^M(r, D) &= n_1^M(r, 1/Q(f)), & n_{2,f}^M(r, D) &= n_2^M(r, 1/Q(f)). \end{aligned}$$

Kí hiệu

$$\begin{aligned} N_{1,f}(r, D) &= \int_{r^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}(t, D)}{t} dt, & N_{2,f}(r, D) &= \int_1^r \frac{n_{2,f}(t, D)}{t} dt, \\ N_{1,f}^M(r, D) &= \int_{r^{-1}}^1 \frac{n_{1,f}^M(t, D)}{t} dt, & N_{2,f}^M(r, D) &= \int_1^r \frac{n_{2,f}^M(t, D)}{t} dt. \end{aligned}$$

Hàm đếm và hàm đếm bội cắt cụt được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} N_f(r, D) &= N_f(r, Q) := N_{1,f}(r, D) + N_{2,f}(r, D), \\ N_f^M(r, D) &= N_f^M(r, Q) := N_{1,f}^M(r, D) + N_{2,f}^M(r, D). \end{aligned}$$

Cho $D_1, \dots, D_q$ là các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta gọi Q_j , $1 \leq j \leq q$, là các đa thức thuần nhất bậc d_j trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ xác định D_j . Các siêu mặt $D_1, \dots, D_q$

được gọi là ở vị trí tổng quát nếu $q > n$ và với mỗi bộ gồm $n + 1$ chỉ số phân biệt $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, q\}$, ta có

$$\{z \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Q_{i_1}(z) = Q_{i_2}(z) = \dots = Q_{i_{n+1}}(z) = 0\} = \emptyset.$$

Năm 2022, chúng tôi chứng minh định lý sau đây:

Định lý 1.2.3. *Cho D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và $f = (f_0 : \dots : f_n) : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình mà ảnh của nó không chứa trong D . Khi đó với mỗi $1 < r < R$, ta có*

$$m_f(r, D) + N_f(r, D) = dT_f(r) + O(1).$$

Định lý 1.2.3 cho chúng ta một quan hệ đẳng thức giữa hàm đặc trưng của một đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên với các hàm xấp xỉ, hàm đếm kết hợp với một siêu mặt. Kết quả này cũng tương tự như trường hợp đường cong chỉnh hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

1.3. Định lý cơ bản thứ hai

Định lý sau đây được chúng tôi chứng minh vào năm 2022 là một dạng Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt ở vị trí tổng quát.

Định lý 1.3.1. *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến đại số và $D_j, 1 \leq j \leq q$, là một họ các siêu mặt trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ có bậc d_j tương ứng ở vị trí tổng quát. Gọi d là bội số chung nhỏ nhất của các $d_1, d_2, \dots, d_q$. Khi đó với mỗi số dương $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$ và*

$$\alpha \geq (d[(n+1)^2 2^n] \varepsilon^{-1} + 1)^n,$$

ta có

$$\| (q - (n+1) - \varepsilon)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q d_j^{-1} N_f^\alpha(r, D_j) + O_f(r)$$

đúng với mọi $1 < r < R$, trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R = +\infty \\ O(\log \frac{1}{R-r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R < +\infty. \end{cases}$$

Chương 2

Vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên

2.1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong phần này chúng tôi nhắc lại hai định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai được chứng minh bởi H. T. Phương và N. V. Thìn vào năm 2015, cần thiết cho việc chứng minh các kết quả chính của chúng tôi.

Mệnh đề 2.1.1. *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình và H là một siêu phẳng trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho ảnh của f không chứa trong siêu phẳng H . Khi đó với mỗi $1 < r < R$, ta có*

$$T_f(r) = m_f(r, H) + N_f(r, H) + O(1),$$

trong đó $O(1)$ là một đại lượng giới nội không phụ thuộc vào r .

Mệnh đề 2.1.2. *Cho $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình không suy biến tuyến tính và $H_1, \dots, H_q$ là một họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Khi đó ta có*

$$\| \quad (q - n - 1)T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q N_f^n(r, H_j) + O_f(r),$$

trong đó

$$O_f(r) = \begin{cases} O(\log r + \log T_f(r)) & \text{nếu } R_0 = +\infty \\ O(\log \frac{1}{R_0 - r} + \log T_f(r)) & \text{nếu } R_0 < +\infty. \end{cases}$$

2.2. Hai định lý duy nhất cho đường cong chĩnh hình

Gọi D là một siêu mặt bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và Q là đa thức thuần nhất bậc d , với các hệ số lấy trong $\mathbb{C}$, xác định D . Khi đó Q biểu diễn được dưới dạng:

$$Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{k=0}^{n_d} a_k z_0^{i_{k0}} \dots z_n^{i_{kn}},$$

trong đó $n_d = \binom{n+d}{n} - 1$ và $i_{k0} + \dots + i_{kn} = d$, $a_k \in \mathbb{C}$ với $k = 1, \dots, n_d$. Ta gọi $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n_d})$ là vectơ liên kết với siêu mặt D (hoặc Q).

Tiếp theo ta nhắc lại khái niệm họ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ các siêu mặt cố định, trong đó D_j được xác định bởi đa thức thuần nhất Q_j trong $\mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ bậc d_j , với mỗi $j = 1, \dots, q$. Gọi $m_{\mathcal{D}}$ là bội chung nhỏ nhất của các bậc $d_1, \dots, d_q$, kí hiệu

$$n_{\mathcal{D}} = \binom{n + m_{\mathcal{D}}}{n} - 1.$$

Với mỗi $j = 1, \dots, q$, ta đặt $Q_j^* = Q_j^{m_{\mathcal{D}}/d_j}$ và gọi $\mathbf{a}_j^*$ là vectơ liên kết với đa thức Q_j^* . Họ $\mathcal{D}$ các siêu mặt cố định được gọi là ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese nếu $q > n_{\mathcal{D}}$ và với mỗi họ tùy ý thì các chỉ số $i_1, \dots, i_{n_{\mathcal{D}}+1} \in \{1, \dots, q\}$, các vectơ $\mathbf{a}_{i_1}^*, \dots, \mathbf{a}_{i_{n_{\mathcal{D}}+1}}^*$ là độc lập tuyến tính.

Cho đường cong chĩnh hình $f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, với một siêu mặt D bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ xác định bởi đa thức thuần nhất Q , ta kí hiệu

$$\overline{E}_f(D) := \{z \in \Delta \mid Q \circ f(z) = 0 \text{ không kể bội}\};$$

$$E_f(D) := \{(z, m) \in \Delta \times \mathbb{N} \mid Q \circ f(z) = 0 \text{ và } \nu_{Q(f)}(z) = m \geq 1\}.$$

Với một họ các siêu mặt $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ta định nghĩa

$$\overline{E}_f(\mathcal{D}) := \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} \overline{E}_f(D_j) \quad \text{và} \quad E_f(\mathcal{D}) := \bigcup_{D_j \in \mathcal{D}} E_f(D_j).$$

Với các khái niệm và kí hiệu như trên, năm 2021 chúng tôi đã chứng minh một dạng định lý duy nhất cho đường cong chĩnh hình trên hình vành khuyên với mục tiêu là các siêu mặt như sau:

Định lý 2.2.1. *Cho f và g là hai đường cong chĩnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Cho $\mathcal{D} =$*

$\{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}^2/m_{\mathcal{D}}$ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$. Khi đó $f \equiv g$.

Định lý 2.2.2. Cho f và g là hai đường cong chỉnh hình không suy biến đại số từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sao cho $O_f(r) = o(T_f(r))$ và $O_g(r) = o(T_g(r))$. Cho $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_q\}$ là một họ gồm $q > n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}/m_{\mathcal{D}}$ các siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Giả sử

- (a) $f(z) = g(z)$ với mọi $z \in \overline{E}_f(\mathcal{D}) \cup \overline{E}_g(\mathcal{D})$,
- (b) $\overline{E}_f(D_i) \cap \overline{E}_f(D_j) = \emptyset$ và $\overline{E}_g(D_i) \cap \overline{E}_g(D_j) = \emptyset$ với mọi $i \neq j \in \{1, \dots, q\}$.

Khi đó $f \equiv g$.

Nhận xét. 1. Trong Định lý 2.2.2, số siêu mặt tối thiểu thỏa mãn giả thiết là

$$n_{\mathcal{D}} + 1 + 2n_{\mathcal{D}}/m_{\mathcal{D}}.$$

Chú ý rằng khi họ các siêu mặt là các siêu phẳng thì vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese chính là ở vị trí tổng quát thông thường trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Trong trường hợp này $n_{\mathcal{D}} = n$ và $m_{\mathcal{D}} = 1$ nên $q = 3n + 2$, trùng với số siêu phẳng cần thiết trong kết quả của Fujimoto.

2. Ta biết rằng, một hàm phân hình h trên hình vành khuyên là siêu việt khi $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{T_0(r, h)}{\log r} = \infty$ khi $R = \infty$ và $\limsup_{r \rightarrow R} \frac{T_0(r, h)}{-\log(R - r)} = \infty$ khi $R < \infty$. Do đó, đối với một đường cong chỉnh hình $f = (f_0 : \dots : f_n)$ thì chỉ cần một hàm f_j là siêu việt thì $O_f(r) = o(T_f(r))$.

Chương 3

Vấn đề duy nhất cho hàm nguyên liên quan đến giả thuyết Brück

3.1. Kiến thức bổ trợ

Cho hàm phân hình khác hằng $g(z)$ trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và p đạo hàm đầu tiên của nó. Một đa thức vi phân P của g được định nghĩa bởi

$$P(z) := \sum_{i=1}^n \alpha_i(z) \prod_{j=0}^p (g^{(j)}(z))^{S_{ij}},$$

trong đó S_{ij} , $0 \leq i, j \leq n$, là các số nguyên không âm và $\alpha_i(z)$, $1 \leq i \leq n$ là các hàm phân hình nhỏ đối với g . Đặt

$$d(P) := \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^p S_{ij} \quad \text{và} \quad \theta(P) := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=0}^p j S_{ij}.$$

Năm 2002, J. Hinchliffe đã chứng minh kết quả sau, cho một đánh giá giữa các hàm Nevanlinna của hàm phân hình và hàm đếm của đa thức vi phân.

Mệnh đề 3.1.1. *Cho g là một hàm phân hình siêu việt và $a \neq 0$ là một hằng số phức, gọi P là một đa thức vi phân khác hằng của g với $d(P) \geq 2$. Khi đó*

$$T(r, g) \leq \frac{\theta(P) + 1}{d(P) - 1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \frac{1}{d(P) - 1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{P - a}\right) + o(T(r, g)),$$

đối với mọi $r \in [1, +\infty)$ nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgues hữu hạn. Khi f là một hàm nguyên siêu việt, bất đẳng thức trên trở thành

$$T(r, g) \leq \frac{\theta(P) + 1}{d(P)} \overline{N}\left(r, \frac{1}{g}\right) + \frac{1}{d(P)} \overline{N}\left(r, \frac{1}{P - a}\right) + o(T(r, g)),$$

đối với mọi $r \in [1, +\infty)$ nằm ngoài một tập có độ đo Lebesgues hữu hạn.

Cho f là một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, ta nhắc lại *bậc* $\sigma(f)$ của hàm phân hình f định nghĩa bởi

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Và *siêu bậc* của f được định nghĩa bởi

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

Trường hợp đặc biệt, nếu f là một hàm nguyên, biểu diễn được dưới dạng chuỗi lũy thừa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

thì ta kí hiệu

$$\begin{aligned} \mu(r, f) &= \max_{n \in \mathbb{N}, |z|=r} \{|a_n z^n|\}, \\ \nu(r, f) &= \sup\{n : |a_n| r^n = \mu(r, f)\}, \\ M(r, f) &= \max_{|z|=r} |f(z)|. \end{aligned}$$

Trong trường hợp này bậc của f có thể biểu diễn được dưới dạng

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log(M(r, f))}{\log r}.$$

Mệnh đề 3.1.2. Nếu f là một hàm nguyên với bậc $\sigma(f)$, khi đó

$$\sigma(f) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(r, f)}{\log r}.$$

Mệnh đề 3.1.3. Cho f là một hàm nguyên siêu việt, δ là một số thực thỏa mãn $0 < \delta < \frac{1}{4}$. Cho z là một số phức thỏa mãn $|z| = r$ và

$$|f(z)| > M(r, f) \nu(r, f)^{-\frac{1}{4} + \delta}.$$

Khi đó tồn tại một tập $F \subset \mathbb{R}_+$ có độ đo logarit hữu hạn, tức là $\int_F \frac{dt}{t} < +\infty$, sao cho

$$\frac{f^{(m)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu(r, f)}{z} \right)^m (1 + o(1))$$

đúng với mọi $m \geq 1$ và $r \notin F$.

Lấy $E_0(z) = 1 - z$, $E_m(z) = (1 - z)e^{z+z^2/2+\dots+z^m/m}$, $m \in \mathbb{Z}^+$, khi đó ta có kết quả sau được gọi là định lý biểu diễn Weierstrass.

Mệnh đề 3.1.4. Cho f là một hàm nguyên, với bội không điểm tại $z = 0$ là $m \geq 0$. Ta gọi các không điểm khác của f là $a_1, a_2, \dots$, mỗi không điểm được lặp lại số lần bằng bội của nó. Khi đó f có biểu diễn

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

với g là một hàm nguyên và m_n là các số tự nhiên. Hơn nữa, nếu f có bậc ρ hữu hạn thì g là một đa thức với bậc không vượt quá ρ .

Kí hiệu S là mặt cầu Riemann và $\pi : \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S$ là phép chiếu cầu. Cho $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$, kí hiệu và $M_1 = \pi(z_1), M_2 = \pi(z_2)$ là hai điểm trên mặt cầu S tương ứng lần lượt với các điểm z_1, z_2 . Độ dài của đoạn thẳng $\overline{M_1 M_2}$ được gọi là *khoảng cách cầu* giữa hai điểm z_1, z_2 và kí hiệu là $\rho_S(z_1, z_2)$.

Định nghĩa 3.1.5. Cho $S = \{f_n(z), n = 1, 2, \dots\}$ là một dãy các hàm phân hình xác định trong miền D và E một tập con của D . Dãy S được gọi là *hội tụ đều trên E đối với khoảng cách cầu* (hay còn gọi là *hội tụ cầu đều*), nếu với mỗi số dương ε , tồn tại một số nguyên dương N sao cho với mọi $n \geq N, m \geq N$ ta có $\rho_S(f_n(z), f_m(z)) < \varepsilon$ với mọi $z \in E$.

Định nghĩa 3.1.6. Cho $D \subset \mathbb{C}$ là một miền và $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên D . Họ $\mathcal{F}$ được gọi là *họ chuẩn tắc* trên D nếu mọi dãy $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ luôn tồn tại một dãy con của $\{f_n\}$ hội tụ cầu đều trên mọi tập con compact của D .

3.2. Vấn đề duy nhất

Để chứng minh kết quả của chúng tôi về tiêu chuẩn chuẩn tắc của họ các hàm phân hình phức, trước hết chúng tôi chứng minh một số bổ đề cần thiết sau đây:

Mệnh đề 3.2.1. Cho f là một hàm phân hình siêu việt và a là một hằng số phức. Gọi $n \in \mathbb{N}$, $k, n_j, t_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \dots, k$ thỏa mãn

$$n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 3.$$

Khi đó phương trình

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có vô số nghiệm. Hơn nữa, nếu f là một hàm nguyên siêu việt, khẳng định đúng khi $n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2$.

Mệnh đề 3.2.2. Cho f là một hàm hữu tỷ khác hằng và a là một hằng số phức khác không. Cho $n \in \mathbb{N}$, $k, n_j, t_j \in \mathbb{N}^*$, $j = 1, \dots, k$ thỏa mãn

$$n_j \geq t_j, \quad n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2, \quad j = 1, \dots, k.$$

Khi đó phương trình

$$f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = a$$

có ít nhất hai không điểm phân biệt.

Cho f và g là hai hàm phân hình và a và b là hai số phức phân biệt. Ta nhắc lại, nếu $g - b = 0$ mỗi khi $f - a = 0$ thì ta viết $f = a \Rightarrow g = b$. Nếu $f = a \Rightarrow g = b$ và $g = b \Rightarrow f = a$ thì ta viết $f = a \Leftrightarrow g = b$. Nếu $f - a$ và $g - b$ có chung không điểm và cực điểm kể cả bội thì ta kí hiệu $f - a \rightleftharpoons g - b$. Sử dụng khái niệm này chúng tôi đã chứng minh kết quả sau về tiêu chuẩn chuẩn tắc của một họ các hàm phân hình.

Định lý 3.2.3. Cho $\mathcal{F}$ là một họ các hàm phân hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$. Cho a và b là hai số phức thỏa mãn $b \neq 0$, gọi $n \in \mathbb{N}$, $n_j, t_j, k \in \mathbb{N}^*$, ($j = 1, 2, \dots, k$) thỏa mãn

$$n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 3 \quad (3.1)$$

và

$$f^{n+n_1+\dots+n_k} = a \Leftrightarrow f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} = b \quad (3.2)$$

đối với $f \in \mathcal{F}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là một họ chuẩn tắc. Ngoài ra, nếu $\mathcal{F}$ là một họ các hàm chỉnh hình thì khẳng định đúng khi (3.1) được thay thế bởi một trong các

điều kiện sau:

$$k = 1, n = 0, n_1 \geq t_1 + 1; \quad (3.3)$$

$$n \geq 1 \text{ hoặc } k \geq 2, n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2. \quad (3.4)$$

Với một hàm phân hình f , kí hiệu

$$M[f] := f^n(f^{n_1})^{(t_1)} \dots (f^{n_k})^{(t_k)} \text{ và } F = f^{n+n_1+\dots+n_k},$$

trong đó $n, n_1, \dots, n_k, t_1, \dots, t_k$ là các số nguyên dương. Định lý sau đây của chúng tôi là một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück khi thay thế f bởi F và f' bởi $M[f]$. Kỹ thuật chứng minh của định lý dựa vào tiêu chuẩn chuẩn tắc của họ các hàm phân hình đã được chúng tôi chứng minh trong Mục 3.2.1.

Định lý 3.2.4. *Cho $n \in \mathbb{N}$ và $k, n_i, t_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, \dots, k$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:*

$$1) k = 1, n = 0, n_1 \geq t_1 + 1;$$

$$2) n \geq 1 \text{ hoặc } k \geq 2, n_j \geq t_j, n + \sum_{j=1}^k n_j \geq \sum_{j=1}^k t_j + 2.$$

Cho a và b là hai giá trị hữu hạn khác 0 và f là một hàm nguyên khác hằng. Nếu $F = a \Rightarrow M[f] = b$ thì

$$\frac{M[f] - b}{F - a} = c,$$

trong đó c là một hằng số. Đặc biệt, nếu $a = b$ thì $f = c_1 e^{tz}$, trong đó c_1 và t là các hằng số khác 0 và t thỏa mãn điều kiện $(tn_1)^{t_1} \dots (tn_k)^{t_k} = 1$.

Trường hợp đặc biệt của Định lý 3.2.4, nếu ta chọn $n = 0, k = 1, t_1 = 1$ trong Định lý 3.2.4, thì ta có:

Hệ quả 3.2.5. *Cho f là một hàm nguyên khác hằng, $n \geq 2$ là một số nguyên và $F = f^n$. Nếu F và F' chung nhau giá trị 1 CM thì $F \equiv F'$ và f có dạng $f = ce^{z/n}$, trong đó c là một hằng số khác 0.*

Chú ý. Như đã nói trong phần mở đầu, năm 2008, L. Z. Yang và J. L. Zhang đã chứng minh một kết quả tương tự Hệ quả 3.2.5 với điều kiện $n \geq 7$. Như vậy Định lý 3.2.4 là một cải tiến thực sự kết quả của Yang và Zhang.

Kết luận chung và đề nghị

Luận án đã nghiên cứu về một số dạng định lý cơ bản trong lý thuyết Nevanlinna - Cartan cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp các siêu mặt và vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên và hàm nguyên liên quan đến giả thuyết Brück.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Phát biểu và chứng minh hai dạng định lý cơ bản: Định lý cơ bản thứ nhất và Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong các trường hợp mục tiêu là các siêu mặt.

2. Đưa ra hai định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên từ Δ vào $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ trong trường hợp mục tiêu là siêu mặt ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

3. Đưa ra một tiêu chuẩn chuẩn tắc mới cho họ các hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và chứng minh một kết quả về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình liên quan đến giả thuyết Brück.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo cho kết quả của luận án như sau:

1. Nghiên cứu một số Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên vào một đa tạp đại số trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ trong các trường hợp mục tiêu là siêu phẳng hay siêu mặt.

2. Nghiên cứu vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trên hình vành khuyên trong trường hợp siêu mặt ở vị trí tổng quát.

3. Nghiên cứu vấn đề xác định duy nhất cho hàm hay đường cong chỉnh hình với mục tiêu là tập hợp các điểm hay các siêu phẳng mà chứng minh dựa vào các dạng định lý cơ bản thứ hai với hàm đếm mới.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH NGHIÊN CỨU ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Thin N.V., Phuong H.T., Vilaisavanh L. (2018), "A uniqueness problem for entire functions related to Bruck's conjecture", *Math. Slovaca* 68, No. 4, 823–836.
2. Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2021), "Some uniqueness theorems for holomorphic curves on annulus sharing hypersurfaces", *Complex variable and Elliptic Equations*, Vol. 66(1), pp.22-34.
3. Phuong H. T., Vilaisavanh L. (2022), "On fundamental theorems for holomorphic curves on an annulus intersecting hypersurfaces", *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, Vol. 48, pp. 151-163.