

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ THỊ THÙY DƯƠNG

TÍNH CHÍNH QUY VÀ DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN
NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH
NAVIER-STOKES

Ngành: Toán giải tích

Mã số: 946 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TSKH. Nguyễn Minh Trí

THÁI NGUYÊN - 2021

LỜI CAM ĐOAN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Nguyễn Minh Trí. Tôi xin cam đoan kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình nào khác. Tôi xin chịu trách nhiệm về những lời cam đoan của mình.

Thái Nguyên, ngày ... tháng ... năm 2021

Tác giả

Vũ Thị Thùy Dương

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được thực hiện và hoàn thành tại khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TSKH. Nguyễn Minh Trí. Tác giả đã rất may mắn khi được thầy hướng dẫn và giúp tác giả làm quen với việc nghiên cứu khoa học từ khi tác giả còn là học viên cao học. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới thầy giáo hướng dẫn của mình. Thầy đã tận tình dìu dắt và luôn động viên, khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán, cùng các thầy cô phòng Giải tích, Viện Toán học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để giúp đỡ tác giả học tập và nghiên cứu. Bên cạnh đó, tác giả xin được bày tỏ lòng cảm ơn tới Ban giám hiệu, khoa Khoa học cơ bản và bộ môn Toán, trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh đã luôn tạo điều kiện thuận lợi để tác giả có thể nghiên cứu và hoàn thành luận án của mình.

Tác giả cũng xin gửi lời tri ân chân thành đến người anh, người thầy thứ hai, TS. Đào Quang Khải, phòng Phương trình đạo hàm riêng, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã nhiệt tình hướng dẫn và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn quỹ NAFOSTED đã tài trợ cho tác giả trong suốt quá trình học nghiên cứu sinh.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin dành cho gia đình của tác giả, những người đã luôn yêu thương, chia sẻ, động viên và giúp đỡ tác giả vượt qua mọi khó khăn trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả

Vũ Thị Thùy Dương

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Mục lục	iii
Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt	v
Mở đầu	1
Tổng quan luận án	7
1 Một số kiến thức chuẩn bị	17
1.1. Một số không gian hàm	17
1.1.1 Không gian các hàm trơn	17
1.1.2 Không gian các hàm khả tích	18
1.1.3 Không gian các hàm suy rộng	19
1.1.4 Không gian Besov, không gian Triebel	21
1.1.5 Không gian Sobolev	23
1.1.6 Không gian Lorentz	27
1.2. Một số toán tử cơ bản trong hệ phương trình Navier-Stokes .	29
1.2.1 Toán tử Helmholtz-Leray	29
1.2.2 Toán tử Stokes	30
1.2.3 Nửa nhóm Stokes e^{-tA}	32
1.3. Nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes	34

2	Tính chính quy và đáng điều kiện cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát	36
2.1.	Tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát	37
2.1.1	Đặt bài toán	37
2.1.2	Các tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u, v)$ và nửa nhóm Stokes e^{-tA}	38
2.1.3	Tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát	45
2.2.	Đáng điều kiện cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát	52
2.2.1	Các tính chất của toán tử Stokes trong miền tổng quát	52
2.2.2	Đáng điều kiện cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát	55
	Kết luận chương 2	60
3	Đáng điều kiện cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều	61
3.1.	Một số tính chất của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều	62
3.2.	Đáng điều kiện cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều	77
	Kết luận chương 3	82
	Kết luận chung và đề nghị	83
	Danh mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án	85
	Tài liệu tham khảo	86

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{N}_0$	Tập hợp các số nguyên không âm.
$\mathbb{R}^d$	Không gian Euclide thực d chiều.
$ x $	chuẩn Euclid của phần tử x trong không gian $\mathbb{R}^d$.
$\ u\ _X$	Chuẩn của u trong không gian X .
X^*	Không gian đối ngẫu của X .
$\liminf u(x)$	Giới hạn dưới của $u(x)$.
$u_k \rightarrow u_0$	$\{u_k\}$ hội tụ mạnh tới u_0 .
$\langle x, y \rangle$	Tích vô hướng của x và y .
$\nabla u(x)$	Gradient của hàm $u(x)$.
$\operatorname{div} u(x)$	Div của hàm $u(x)$.
$\Delta u(x)$	Laplace của hàm $u(x)$.
$\mathbb{P}$	Toán tử Helmholtz-Leray.
$\dot{\Lambda}$	Toán tử giả vi phân thuần nhất Calderon.
$C_0^\infty(\Omega)$	Không gian các hàm trơn có $\operatorname{div} u = 0$ trong Ω .
$L^p(\Omega)$	Không gian các hàm khả tích bậc p trong Ω .
$\dot{H}_q^s$	Không gian Sobolev thuần nhất.
$L^{p,r}$	Không gian Lorentz.
$\dot{B}_q^{s,p}$	Không gian Besov thuần nhất.
$\dot{F}_q^{s,p}$	Không gian Triebel thuần nhất.

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Các phương trình đạo hàm riêng cổ điển được xây dựng và nghiên cứu chuyên sâu từ đầu thế kỷ XIX và đại diện cho nền tảng kiến thức về sóng, sự truyền nhiệt, thủy động lực học và các bài toán vật lý khác. Việc nghiên cứu các bài toán thực tế đó đã thúc đẩy các nhà toán học tìm tòi và áp dụng các phương pháp mới trong nghiên cứu toán học thuần túy để giải các bài toán phương trình đạo hàm riêng. Đây là một đề tài lớn có liên quan mật thiết với các ngành khoa học khác như vật lý, cơ học, hóa học, khoa học kỹ thuật và có rất nhiều ứng dụng cho các bài toán công nghiệp. Mặc dù lý thuyết về phương trình đạo hàm riêng đã trải qua một sự phát triển lớn trong thế kỷ XX nhưng vẫn còn một số bài toán đến nay vẫn chưa thể giải quyết, chủ yếu liên quan đến sự tồn tại toàn cục, tính duy nhất nghiệm, độ trơn cũng như dáng điệu tiệm cận của nghiệm.

Một trong những dạng phương trình đạo hàm riêng nổi tiếng và rất được sự quan tâm của các nhà toán học là phương trình Parabolic phi tuyến. Nhắc đến các dạng phương trình Parabolic phi tuyến, chúng ta không thể không nhắc đến một trong bảy bài toán thiên niên kỷ nổi tiếng, đó là hệ phương trình Navier-Stokes. Nó là phương trình mô tả một chuyển động của một chất lỏng, ví dụ như dòng chảy của đại dương, hoặc việc tạo ra một xoáy nước nhỏ bên trong các dòng chảy.

Từ quan điểm toán học, vẫn còn rất nhiều câu hỏi đối với hệ phương trình Navier-Stokes chưa có lời giải như sự tồn tại của nghiệm mạnh toàn cục, tính duy nhất của nghiệm yếu, tính chính quy hay tốc độ hội tụ của nghiệm trong không gian ba chiều... Chính xác hơn, khi cho trước một giá trị trơn ở thời điểm ban đầu, liệu nghiệm của phương trình Navier-Stokes có tiếp tục trơn

và duy nhất cho mọi khoảng thời gian về sau hay không? Câu hỏi này được đặt ra vào năm 1934 bởi J. Leray [56, 57] và cho tới giờ vẫn chưa có câu trả lời. Vào thế kỷ XIX, các bài toán tồn tại nghiệm xuất phát từ vật lý toán học đã được nghiên cứu với mục đích tìm ra các nghiệm chính xác cho các phương trình đạo hàm riêng. Tuy nhiên, bài toán chỉ tồn tại nghiệm chính xác trong các trường hợp cụ thể, ví dụ rất ít nghiệm chính xác của phương trình Navier-Stokes được tìm thấy ngoại trừ một số nghiệm dừng và các nghiệm của bài toán tuyến tính.

Câu hỏi về tính duy nhất và chính quy cho các phương trình Navier-Stokes cũng vẫn là một trong 18 bài toán mở của thế kỷ này, xem [67]. Cho đến nay vẫn chưa có lời giải về tính duy nhất nghiệm ngoại trừ trong các khoảng thời gian nhỏ và người ta đã đặt câu hỏi liệu các phương trình Navier-Stokes có thực sự mô tả các dòng chảy chung hay không? Tuy nhiên, họ cũng không chứng minh được chúng không duy nhất. Có thể các phương pháp được sử dụng cho đến nay chưa phù hợp và hệ phương trình Navier-Stokes cần một cách tiếp cận khác.

Tính duy nhất nghiệm của các phương trình là nền tảng của việc nghiên cứu các bài toán chuyển động trong phương trình đạo hàm riêng [19]. Nếu có nhiều hơn một nghiệm cùng thỏa mãn một điều kiện ban đầu thì người ta nói rằng không gian của các nghiệm quá lớn. Tính duy nhất nghiệm có thể được khôi phục nếu loại trừ các nghiệm phi vật lý. Chính xác hơn, một kết quả không duy nhất sẽ mâu thuẫn với việc nghiên cứu các bài toán cơ học chất lỏng và việc đưa ra một mô hình phức tạp hơn để nghiên cứu chuyển động của chất lỏng nhớt là thực sự cần thiết [14, 15, 31, 70]. Nếu bài toán về tính duy nhất liên quan đến khía cạnh dự đoán của lý thuyết thì vấn đề tồn tại nghiệm chạm đến câu hỏi về tính tự nhất quán của mô hình vật lý liên quan đến các phương trình Navier-Stokes, nếu không có sự tồn tại nghiệm thì lý thuyết là không có ý nghĩa.

Trong thế kỷ XX, thay vì các công thức tường minh trong các trường hợp đặc biệt, bài toán về nghiệm của phương trình Navier-Stokes đã được nghiên cứu dưới dạng tổng quát của chúng. Điều này dẫn đến khái niệm về nghiệm yếu. Tuy nhiên, với bài toán nghiệm yếu, chỉ có sự tồn tại của các nghiệm có

thể được đảm bảo. Một câu hỏi nữa liên quan mật thiết đến tính duy nhất của bài toán cơ học chất lỏng này là tính chính quy của nghiệm. Các nghiệm của các phương trình Navier-Stokes liệu có "bùng nổ" trong thời gian hữu hạn? Nghiệm ở khoảng thời gian ban đầu là chính quy và duy nhất, nhưng tại thời điểm T khi nó không còn là duy nhất thì tính chính quy cũng có thể bị mất. Người ta có thể khẳng định rằng sự bùng nổ của các nghiệm ở khoảng thời gian ban đầu không bao giờ xảy ra hoặc nó sẽ có khả năng xảy ra hơn khi chuẩn của giá trị ban đầu tăng lên, hoặc nó bùng nổ nhưng chỉ trên một tập hợp nhỏ với xác suất rất thấp. Không ai biết câu trả lời và Viện toán học Clay vẫn đang trao giải thưởng cho việc giải bài toán đó. Như C.L. Fefferman [29] nhận xét, sự bùng nổ hữu hạn trong phương trình Euler của một chất lỏng lý tưởng là một vấn đề toán học mở và đầy thách thức. P. Constantin [18] đề xuất rằng việc bùng nổ ở thời gian hữu hạn trong các phương trình Euler là bài toán vật lý quan trọng vì nó đòi hỏi gradient lớn trong trường hợp độ nhớt bằng không. Kết quả tốt nhất theo hướng này đối với các phương trình Navier-Stokes nhưng mất đi độ trơn đã thu được bởi L. Caffarelli, R. Kohn và L. Nirenberg [10, 58] - người đã chứng minh rằng số đo Hausdorff một chiều của tập hợp các điểm kỳ dị là bằng không.

Một bài toán khác liên quan đến hệ phương trình Navier-Stokes cũng thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học trong những năm gần đây là bài toán về dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian dần đến vô cùng. Bởi vì khi biết dáng điệu tiệm cận của nghiệm, ta có thể dự đoán được xu thế phát triển của hệ trong tương lai và từ đó có những đánh giá, điều chỉnh thích hợp.

Nói một cách đơn giản, chúng ta có thể tóm tắt lịch sử nghiên cứu rằng có rất ít các trường hợp phương trình Navier-Stokes được đặt ra theo nghĩa của Hadamard (tồn tại, duy nhất và có tính ổn định nghiệm). Chẳng hạn, hệ phương trình Navier-Stokes tồn tại một nghiệm toàn cục duy nhất khi giá trị ban đầu và ngoại lực đủ nhỏ và độ trơn của nghiệm tùy thuộc vào độ trơn của dữ liệu ban đầu. Một số trường hợp khác liên quan đến số chiều của miền xác định. Nếu số chiều $n = 2$ thì bài toán sẽ trở nên dễ dàng hơn nhiều so với số chiều $n = 3$ và đã hoàn toàn giải được, xem [59, 69]. Với $n = 3$, những kết quả đạt được về tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm vẫn

còn nhiều hạn chế và là vấn đề mang tính thời sự, thu hút sự quan tâm của các nhà toán trên thế giới trong những năm gần đây.

Chính vì những lý do nêu trên, chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: "*Tính chính quy và đáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes*".

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

• Mục đích nghiên cứu:

a. Nghiên cứu bài toán biên ban đầu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát với các nội dung sau:

- Tính chính quy của nghiệm yếu.
- Đáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu.

b. Nghiên cứu bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes trong cả không gian ba chiều với nội dung sau:

- Đáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh.

• Đối tượng nghiên cứu:

- Đối tượng nghiên cứu của luận án là bài toán biên ban đầu và bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát và trong cả không gian ba chiều.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Để nghiên cứu tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát chúng tôi sử dụng lý thuyết về sự tồn tại của nghiệm mạnh địa phương và tính duy nhất của nghiệm mạnh trong miền tổng quát cùng một số ước lượng nửa nhóm.

- Để nghiên cứu đáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát chúng tôi sử dụng lý thuyết về tính duy nhất và tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh trong miền tổng quát, định lý nhúng cùng một số ước lượng nửa nhóm.

- Để nghiên cứu đáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều chúng tôi sử dụng định lý về sự tồn tại của nghiệm mạnh địa phương, tính duy nhất của nghiệm mạnh trong $\mathbb{R}^3$, tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh toàn cục khi giá trị ban đầu đủ nhỏ cùng một số công cụ của giải tích điều hòa.

4. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án tập trung vào việc nghiên cứu tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát không bị chặn và trong cả không gian ba chiều. Cụ thể luận án trình bày các kết quả chính sau:

- Kết quả về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát trong không gian ba chiều chứng minh rằng nghiệm yếu u là chính quy tại thời điểm $t \in (0, T)$ nếu u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh và động năng liên tục Hölder trái tại $t \in (0, T)$ với số mũ Hölder $\frac{1}{2}$ và nửa chuẩn Hölder đủ nhỏ.

- Kết quả về dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát chứng minh rằng nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với cùng giá trị ban đầu và số mũ hội tụ nhỏ hơn $\frac{3}{4}$. Hơn nữa, ta cũng chỉ ra rằng, khi thêm một số điều kiện của giá trị ban đầu thì nghiệm yếu u trùng với nghiệm của hệ Stokes thuần nhất khi thời gian t dần tới vô cùng.

- Kết quả về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều chứng minh rằng nghiệm mạnh u của hệ phương trình Navier-Stokes có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm phương trình truyền nhiệt với giá trị ban đầu $|u_0|$.

5. Cấu trúc luận án

Về bố cục, luận án của chúng tôi gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày về một số kiến thức cơ sở, bao gồm: Các không gian hàm cần sử dụng trong luận án, một số toán tử cơ bản trong hệ phương trình Navier-Stokes, một số bất đẳng thức trong các không gian hàm, giới thiệu về hệ phương trình Navier-Stokes và các loại nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes và một số bổ đề bổ trợ.

Chương 2 trình bày hai kết quả về tính chất của nghiệm cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát. Kết quả đầu tiên về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát. Kết

quả thứ hai trình bày về đáng điều tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát.

Chương 3 trình bày về đáng điều tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều.

Các kết quả của chính của luận án đã được công bố trên ba bài báo và được báo cáo tại:

- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.
- Seminar của phòng Giải tích, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- Hội nghị Quốc tế về Giải tích phức, Phương trình đạo hàm riêng và ứng dụng, 02-09/06/2019 tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Tổng quan luận án

Các kết quả về tính chất của nghiệm như sự tồn tại, tính duy nhất, tính chính quy và đáng điều kiện cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes đã được đề cập khá nhiều trong các công trình toán học trong và ngoài nước những năm gần đây, xem [3, 4, 5, 22, 24, 25, 28, 46, 47, 48, 49, 50].... Tuy nhiên việc phát triển các kết quả trên cho trường hợp miền không bị chặn vẫn còn là một hướng nghiên cứu mới đòi hỏi những cách tiếp cận và công cụ kỹ thuật mới trong chứng minh. Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu hai tính chất của nghiệm là tính chính quy và đáng điều kiện cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes trong một miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Giả sử rằng chuyển động của dòng chảy được mô tả bởi hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

với $t \in [0, T]$, $0 < T \leq \infty$, $x \in \Omega$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát. Hệ phương trình trên được gọi là hệ phương trình Navier-Stokes. Phương trình đầu tiên mô tả sự cân bằng của các lực theo định luật II Newton. Điều kiện $\operatorname{div} u = 0$ thể hiện dòng chảy là đồng nhất và không nén được.

Số hạng $u_t = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t}$ là đạo hàm theo hướng thời gian.

Số hạng $u_t + u \cdot \nabla u = u_t + \left(u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u$ mô tả gia tốc của các hạt nhỏ trong dòng chảy.

Số hạng $-\Delta u = -(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) u$ mô tả lực ma sát giữa các hạt nhỏ của dòng chảy.

$\nabla p = (D_1, D_2, D_3) p$ là gradient của áp suất p .

Để nghiên cứu hệ phương trình ta thêm điều kiện biên

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (0.2)$$

nếu $\partial\Omega \neq \emptyset$. Điều này có nghĩa là $u(t, x) = 0$ với $t \in [0, T)$ và $x \in \partial\Omega$.

Ta có điều kiện ban đầu

$$u(0) = u_0 \quad (0.3)$$

là vận tốc ban đầu tại thời điểm $t = 0$. Điều này nghĩa là $u(0, x) = u_0(x)$ với $x \in \Omega$. Trong luận án, ta cũng dùng ký hiệu $u(t, \cdot) = u(t)$, $t \in [0, T)$.

Hệ phương trình (0.1) cùng với điều kiện (0.2), (0.3) được gọi là bài toán biên ban đầu cho hệ phương trình Navier- Stokes trong đó các đại lượng chưa biết là vận tốc $u(t, x)$ của chất lỏng tại thời điểm t , vị trí x và đại lượng áp suất $p(t, x)$.

Bài toán về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes đã thu được các kết quả đầu tiên từ năm 1982 bởi nhóm các tác giả L. Caffarelli, R. Kohn và L. Nirenberg và được mở rộng trong rất nhiều công trình của các nhà toán học trên thế giới trong những năm gần đây như các tác giả H. Sohr, H. Kozono, R. Farwig, W. Varnhorn, P. F. Riechwald Tuy nhiên hầu hết các kết quả mới chỉ thu được cho các miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Năm 2008 và 2009, nhóm các tác giả R. Farwig, H. Kozono và H. Sohr [22, 24] đã thu được kết quả về tính chính quy của nghiệm yếu nhưng với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ và biên $\partial\Omega$ thuộc lớp $C^{2,1}$. Xét nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0, x) = u_0, \end{cases} \quad (0.4)$$

với $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và nghiệm yếu u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 + \int_{t'}^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u(t')\|_2^2 \quad (0.5)$$

với hầu hết $t' \in [0, T)$ và với mọi $t \in [t', T)$.

Các tác giả đã chứng minh được nghiệm yếu u là chính quy trong khoảng (a, b) nếu động năng liên tục Hölder trái với số mũ $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, nghĩa là

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t_0 - \delta)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \right|}{\delta^\alpha} < \infty. \quad (0.6)$$

Năm 2010, các tác giả R. Farwig, H. Kozono và H. Sohr [25] đã tiếp tục phát triển kết quả của họ, trong đó điều kiện (0.6) trên được thay bởi điều kiện yếu hơn

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t_0 - \delta)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \right|}{\delta^{\frac{1}{2}}} < C$$

với số mũ Hölder $\alpha = \frac{1}{2}$ và miền Ω bị chặn.

Năm 2016, R. Farwig và P. F. Riechwald [28] đã tiếp tục mở rộng kết quả của các tác giả trước từ miền bị chặn sang miền tổng quát. Họ đã chứng minh được tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes với Ω là miền tổng quát trong không gian ba chiều nhưng cần thêm điều kiện trên biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 .

Giả sử u là nghiệm yếu (theo nghĩa Leray) của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát, $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 và u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh (0.5). Cho $u_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ và $0 < T < \infty$. Khi đó, tồn tại hằng số dương $\eta = \eta(\Omega, T)$ sao cho: Nếu tại thời điểm $t \in (0, T)$ và với $\mu > 0$, động năng liên tục Hölder trái với số mũ $\frac{1}{2}$ theo nghĩa

$$\sup_{0 < \delta \leq \mu} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t - \delta)\|_2^2 \right|}{\delta^{\frac{1}{2}}} \leq \eta$$

thì t là điểm chính quy của nghiệm yếu u hay $u \in L^4(t - \delta, t + \delta; \tilde{L}^6(\Omega))$.

Từ kết quả trên, ta luôn chứng minh được rằng động năng liên tục Hölder trái với số mũ $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ theo nghĩa

$$\sup_{0 < \delta \leq \mu} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t - \delta)\|_2^2 \right|}{\delta^\alpha} < \infty$$

với $\eta > 0$ đủ nhỏ, trong đó

$$\bar{L}^q(\Omega) := \begin{cases} L^q(\Omega) + L^2(\Omega) & \text{nếu } 1 \leq q < 2 \\ L^q(\Omega) \cap L^2(\Omega) & \text{nếu } 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Do toán tử Stokes thông thường A_q không xác định trên tất cả các miền không bị chặn nên R. Farwig và P. F. Riechwald phải thay thế không gian $L^q(\Omega)$, $q \geq 2$ bằng không gian $\tilde{L}^q(\Omega) = L^q(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ để đảm bảo cho các đánh giá của toán tử Stokes trong miền tổng quát, xem [20, 21, 24, 26].

Chuẩn tương ứng trong không gian $\bar{L}^q$ được xác định bởi

$$\|u\|_{\bar{L}^q} := \max \{\|u\|_q, \|u\|_2\} \quad \text{nếu } q \geq 2$$

và

$$\|u\|_{\bar{L}^q} := \inf \left\{ \|u_1\|_q + \|u_2\|_2 : u = u_1 + u_2 \right\} \quad \text{nếu } 1 \leq q < 2$$

trong đó $u_1 \in L^q(\Omega)$, $u_2 \in L^2(\Omega)$.

Năm 2012, các tác giả R. Farwig, H. Sohr và W. Varnhorn [27] đã thu được kết quả về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes bằng cách phát triển thêm điều kiện mới dựa trên những tính chất của nửa nhóm Stokes. Giả sử $u \in L_{\text{loc}}^\infty([0, \infty), D(A^{\frac{1}{4}}))$ là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (0.4) trong miền $[0, T) \times \Omega$ với $u_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ và u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh (0.5). Khi đó:

- a) Nghiệm yếu u là duy nhất, nghĩa là nếu tồn tại một nghiệm yếu khác $v \in L_{\text{loc}}^\infty([0, T); D(A^{1/4}))$ với $v(0) = u_0$ thì $u = v$.
- b) Nghiệm yếu u thỏa mãn điều kiện Serrin địa phương phải $L^s(L^q)$ trong khoảng $[0, T)$ với $s = 8$ và $q = 4$ nghĩa là $u \in L_{\text{loc}}^8(t_0, t_0 + \delta; L^4(\Omega))$ với mọi $(t_0, t_0 + \delta) \subset [0, T)$ và $\delta = \delta(t_0) > 0$.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi xin giới thiệu một số kết quả đã đạt được với các bài toán về dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes. Xét bài toán biên ban đầu cho hệ phương trình Navier-Stokes (0.4) trong miền Ω với $u_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$ là giá trị ban đầu tại thời điểm $t = 0$.

Bài toán về dáng điệu tiệm cận của nghiệm trong $L^2(\Omega)$ cho hệ phương trình Navier-Stokes được đưa ra lần đầu tiên năm 1934 bởi J. Leray [57] trong không gian $\mathbb{R}^3$. Khẳng định đầu tiên về tốc độ hội tụ nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes được chứng minh bởi T. Kato [44] năm 1984 trong trường

hợp $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d = 3, 4$. Từ nghiên cứu của ông đã phát triển các nghiên cứu cho nghiệm mạnh trong không gian L^p tổng quát, xem [41, 64, 73]. Kết quả của M. E. Schonbek [64] đã áp dụng trong [3, 4] cho trường hợp Ω là nửa không gian trong $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ hoặc một miền của $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$.

Năm 1986, các tác giả R. Kajikiya, T. Miyakawa [41] đã tiếp tục phát triển kết quả về dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong $\mathbb{R}^d$, $d = 3, 4$. Với giá trị ban đầu $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^d)$, các tác giả đã chứng minh rằng tồn tại nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes thỏa mãn các tính chất sau:

- (i) $\|u(t)\|_2 \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$.
- (ii) Nếu $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^d) \cap L^r_\sigma(\mathbb{R}^d)$ với $1 \leq r < 2$ thì

$$\|u(t)\|_2 \leq Ct^{-\frac{\frac{d}{r} - \frac{d}{2}}{2}} \quad \text{với mọi } t > 0,$$

trong đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào d, r và u_0 .

Năm 1992, W. Borchers và T. Miyakawa [5] đã cải tiến kết quả trong [3, 4, 41] cho trường hợp miền không bị chặn bất kỳ, họ đã chỉ ra rằng nếu $\|e^{-tA}u_0\|_2 = O(t^{-\alpha})$ với $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ thì $\|u(t)\|_2 = O(t^{-\alpha})$. Xét hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 & (x \in \Omega, t > 0) \\ \operatorname{div} u = 0 & (x \in \Omega, t \geq 0) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

trong đó $u = (u_1, u_2, u_3)$ và áp suất p là các đại lượng chưa biết. Ta có kết quả chính của W. Borchers và T. Miyakawa như sau.

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ là một miền không bị chặn bất kỳ và $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$. Khi đó, tồn tại một nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes sao cho

- (i) $\|u(t)\|_2 \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$.
- (ii) Nếu $\|e^{-tA}u_0\|_2 = O(t^{-\alpha})$ với $\alpha > 0$ thì

$$\|u(t)\|_2 = \begin{cases} O(t^{-\alpha}) & \text{nếu } \alpha < \frac{1}{2}, \\ O\left(t^{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}}\right) & \text{nếu } \alpha \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

trong đó $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Bài toán thứ hai nghiên cứu trong luận án là bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier- Stokes trong không gian ba chiều. Trước hết, ta biến đổi hệ (0.1) thành phương trình toán tử [8, 42, 43] với $\Omega = \mathbb{R}^3$ như sau

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au + \mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u) = 0, \\ u(0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0, \end{cases} \quad (0.7)$$

trong đó A là toán tử Stokes được định nghĩa một cách hình thức $A = -\mathbb{P}\Delta$ và $\mathbb{P}$ là phép chiếu Helmholtz-Leray được xác định như sau: Đặt

$$D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3 \quad \text{với } i^2 = -1$$

và định nghĩa biến đổi Riesz bởi

$$R_j = D_j(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Khi đó, toán tử $\mathbb{P}$ được định nghĩa bởi

$$(\mathbb{P}u)_j(x) = \sum_{k=1}^3 (\delta_{jk} - R_j R_k) u_k, \quad j = 1, 2, 3.$$

Một cách tương đương khác, sử dụng tính chất của biến đổi Fourier ta có thể định nghĩa toán tử $\mathbb{P}$ như sau:

$$(\widehat{\mathbb{P}u})_j(\xi) = \sum_{k=1}^3 \left(\delta_{jk} - \frac{\xi_j \xi_k}{|\xi|^2} \right) \widehat{u}_k(\xi), \quad j = 1, 2, 3.$$

Như vậy, $\mathbb{P}$ là một toán tử giả vi phân bậc không và là phép chiếu lên hạch của toán tử div . Mặt khác, áp suất p trong (0.1) đảm bảo rằng điều kiện không nén được $\text{div } u = 0$ được thoả mãn. Ta sử dụng nửa nhóm Stokes $S(t) = e^{-tA}$ để đưa phương trình toán tử (0.7) về phương trình tích phân sau

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s) \mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(s) ds.$$

Do bài toán xét trên cả không gian $\mathbb{R}^3$ nên nửa nhóm $S(t)$ trở thành nửa nhóm của phương trình truyền nhiệt $e^{t\Delta}$. Nghiệm của bài toán là hiệu của số

hạng tuyến tính chứa giá trị ban đầu $e^{t\Delta}u_0$ và toán tử song tuyến tính biểu thị thành phần phi tuyến của phương trình

$$B(u, v)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u(s) \otimes v(s)) ds.$$

Sự tồn tại toàn cục của nghiệm yếu đã được nghiên cứu bởi J. Leray [57] từ năm 1934 và E. Hopf [40] năm 1951. Năm 1964, bài toán về sự tồn tại nghiệm mạnh toàn cục của hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu nhỏ trong không gian Sobolev $\dot{H}^{1/2}$ được nghiên cứu bởi H. Fujita và T. Kato [43], sau đó được phát triển bởi J. Y. Chemin năm 2009, xem [16]. J. Y. Chemin đã chứng minh được cho trường hợp $\dot{H}^s$, $s > \frac{1}{2}$. Năm 1984, trong [44], T. Kato đã chứng minh được bài toán trong trường hợp không gian Lebesgue $L^3(\mathbb{R}^3)$. Năm 2001, H. Koch và D. Tataru đã chứng minh trong trường hợp không gian BMO^{-1} , xem [51].

Những năm gần đây, bài toán về sự tồn tại nghiệm toàn cục tiếp tục được phát triển trong một số không gian khác như không gian Sobolev-Lorentz, không gian Sobolev-Fourier-Lorentz, không gian Sobolev-Lorentz thuần nhất và không gian Besov bởi nhóm các tác giả N. M. Trí và Đ. Q. Khải trong thời gian từ năm 2014 đến năm 2017, xem [46, 47, 48, 49, 50].

Năm 1984, T. Kato [44] đã nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận của nghiệm trong không gian $L^q(\mathbb{R}^d)$ bằng cách áp dụng ước lượng $L^q - L^p$ cho nửa nhóm được sinh bởi toán tử Stokes. Tác giả đã chỉ ra rằng tồn tại $T > 0$ và một nghiệm duy nhất u thỏa mãn

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{q})} u &\in BC([0, T]; L^q) \text{ với } d \leq q \leq \infty, \\ t^{\frac{1}{2}(2-\frac{d}{q})} \nabla u &\in BC([0, T]; L^q) \text{ với } d \leq q \leq \infty, \end{aligned}$$

khi $u_0 \in L^d(\mathbb{R}^d)$. Hơn nữa, khẳng định trên vẫn đúng với $T = \infty$ nếu $\|u_0\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}$ đủ nhỏ.

Năm 1987, M. Wiegner [73] đã chỉ ra rằng nếu nghiệm $e^{t\Delta}u_0$ của phương trình truyền nhiệt với giá trị ban đầu $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ thỏa mãn

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_2 \leq C(1+t)^{-\alpha}$$

với $C > 0$ và $\alpha > 0$ thì tồn tại một nghiệm yếu u sao cho

$$\|u(t)\|_2 \leq C(1+t)^{-\min\{\alpha, (d+2)/2\}}.$$

Sau đó, năm 1991, Zhi-Min Chen [17] đã chỉ ra rằng nếu

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d), (d \leq p < \infty)$$

và $\|u_0\|_1 + \|u_0\|_p$ là đủ nhỏ thì tồn tại duy nhất nghiệm $u \in BC([0, \infty); L^1 \cap L^p)$ thỏa mãn tính chất tiệm cận

$$\sup_{t>0} t^{\frac{d}{2}} \left(\|u\|_\infty + t^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{|\alpha|=1} D_x^\alpha u \right\|_\infty + t^{\frac{1}{2}} \left\| \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha u \right\|_d \right) < \infty.$$

Năm 1995, trong [65], M. Schonbek đã xây dựng được bài toán về dáng điệu tiệm cận của nghiệm trong hệ phương trình Navier-Stokes với chuẩn trong không gian thuần nhất hai chiều H^m . Tác giả đã chỉ ra rằng nếu u là nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu

$$u_0 \in H^m \cap L^1(\mathbb{R}^d), d=2, m \geq 3$$

thì $\|D_x^\alpha u\|_2^2 \leq C_\alpha (t+1)^{-(|\alpha|+1)}$ và

$$\|D_x^\alpha u\|_\infty \leq C_\alpha (t+1)^{-(|\alpha|+\frac{1}{2})} \text{ với } t \geq 1, |\alpha| \leq m,$$

trong đó $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ và

$$D_x^\alpha = \partial_x^{|\alpha|} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}}.$$

Năm 1997, M. Cannone [12] đã tổng quát hóa kết quả của T. Kato. Tác giả đã chỉ ra rằng nếu $u_0 \in L^d$ và $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{d}{q}-1, \infty}} (q > d)$ đủ nhỏ thì tồn tại duy nhất nghiệm u thỏa mãn

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{q})} u \in BC([0, \infty); L^q) \text{ với } q \geq d.$$

Năm 2002, Cheng He và Ling Hsiao [39] đã mở rộng kết quả của T. Kato. Họ chỉ ra rằng với số nguyên l bất kỳ tồn tại hằng số dương $C_{l,d}$ chỉ phụ thuộc vào l, d sao cho nếu $\|u_0\|_{L^d(\mathbb{R}^d)} \leq C_{l,d}$ thì hệ phương trình Navier-Stokes có nghiệm mềm duy nhất u thỏa mãn

$$t^{\frac{1}{2}(1+|\alpha|+2\alpha_0-\frac{d}{q})} D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u \in BC([0, \infty); L^q) \text{ với } q \geq d, |\alpha| + 2\alpha_0 \leq l,$$

$$t^{\frac{1}{2}(2+|\alpha|-\frac{d}{q})} D_x^\alpha p \in BC([0, \infty); L^q) \text{ với } q \geq d, |\alpha| + 1 \leq l,$$

trong đó $D_t^{\alpha_0}$ là ký hiệu của $\partial_t^{\alpha_0} = \frac{\partial^{\alpha_0}}{\partial t^{\alpha_0}}$.

Năm 2005, O. Sawada [63] đã thu được kết quả về đáng điệu tiệm cận của nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu thuộc $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)$. Tác giả đã chỉ ra rằng mọi nghiệm mềm

$$u \in BC([0, T]; \dot{H}^{\frac{d}{2}-1}) \text{ và } t^{\frac{1}{2}(\frac{d}{2}-\frac{d}{p})}u \in BC([0, T]; \dot{H}_p^{\frac{d}{2}-1}),$$

với $T > 0$ và $p \in (2, \infty]$ thỏa mãn

$$\|u(t)\|_{\dot{H}_q^\alpha} \leq K_1(K_2\tilde{\alpha})^{\tilde{\alpha}}t^{-\frac{\tilde{\alpha}}{2}} \text{ với } q \geq 2, \alpha > \frac{d}{2} - 1, t \in (0, T]$$

và $\tilde{\alpha} := \alpha + 1 - \frac{d}{q}$, trong đó K_1 và K_2 là các hằng số dương chỉ phụ thuộc vào d, p, M_1 và M_2 với

$$M_1 = \sup_{0 < t < T} \|u(t)\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}} \text{ và } M_2 = \sup_{0 < t < T} t^{\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|u(t)\|_{\dot{H}_p^{\frac{d}{2}-1}}.$$

Đối với bài toán đáng điệu của nghiệm mạnh trong một khoảng thời gian lớn, nếu $u \in C([0, \infty), X)$ là nghiệm toàn cục với $u_0 \in X$, trong đó X là $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ hoặc $L^3(\mathbb{R}^3)$ thì ta luôn có $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_X = 0$. Những kết quả này đã được chứng minh bởi I. Gallagher với $X = \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ trong [33] và với $L^3(\mathbb{R}^3)$ trong [34]. Đối với trường hợp $X = L^3(\mathbb{R}^3)$, I. Gallagher [34] đã chứng minh được kết quả như sau: Giả sử $u \in C_t(L^3(\mathbb{R}^3))$ là một nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes. Xét bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian $\mathbb{R}^3$ sau đây

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(0, x) = u_0. \end{cases}$$

Khi đó, nghiệm toàn cục u của hệ phương trình Navier-Stokes dần đến 0 khi thời gian t dần đến vô cùng trong $L^3(\mathbb{R}^3)$, nghĩa là

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_3 = 0$$

và nghiệm này ổn định, nghĩa là tồn tại hằng số dương $\varepsilon(u)$ sao cho nếu $\|v_0 - u_0\|_3 < \varepsilon(u)$ thì nghiệm địa phương $v \in C_t(L^3(\mathbb{R}^3))$ của hệ phương trình Navier-Stokes là nghiệm toàn cục với

$$\sup_{t \geq 0} \|v(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_3 < C(u) \|v_0 - u_0\|_3.$$

Năm 2015, J. Benameur [2] đã chứng minh rằng nếu $u \in C([0, \infty), \chi^{-1})$ là nghiệm toàn cục thì $\|u(t)\|_{\chi^{-1}}$ dần đến 0 khi thời gian dần đến vô cùng, trong đó

$$\chi^{-1} := \left\{ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{f}(\xi)|}{|\xi|} d\xi < \infty \right\}.$$

Từ các kết quả nghiên cứu trên, chúng ta thấy rằng vẫn còn nhiều vấn đề mở liên quan đến tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát và trong không gian ba chiều. Vì vậy, trong luận án này, chúng tôi sẽ trình bày các vấn đề mở sau:

- Nghiên cứu tính chính quy nghiệm cho bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát trong không gian ba chiều.
- Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm cho bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát trong không gian ba chiều.
- Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm cho bài toán Cauchy của hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số không gian hàm cần dùng để nghiên cứu, các bất đẳng thức, các đánh giá cần thiết để ước lượng một số toán tử trong hệ phương trình Navier-Stokes. Chúng tôi cũng trình bày các toán tử cơ bản sẽ sử dụng, giới thiệu các loại nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes và một số kết quả bổ trợ được dùng trong các chương sau.

1.1. Một số không gian hàm

1.1.1 Không gian các hàm trơn

Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ là một miền bất kỳ với $d \geq 1$. Khi đó, không gian $C^k(\Omega)$ với $k \in \mathbb{N}_0$ là không gian của tất cả các hàm

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto u(x)$$

thỏa mãn $D^\alpha u$ tồn tại và liên tục trong Ω với $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $0 \leq |\alpha| \leq k$.

Không gian $C^0(\Omega)$ là không gian các hàm liên tục $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

gọi là không gian của các hàm trơn trong Ω .

Cho $d \geq 2$ và $0 < T \leq \infty$, ta định nghĩa không gian tuyến tính $C_0^\infty(\Omega)$ là không gian của các hàm trơn có giá compact, không gian $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ là không

gian xác định bởi

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega) := \{u \in C_0^\infty(\Omega)^d; \operatorname{div} u = 0\}$$

và không gian các hàm thử

$$C_0^\infty((0, T); C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)) := \{u \in C_0^\infty((0, T) \times \Omega)^d; \operatorname{div} u = 0\}.$$

1.1.2 Không gian các hàm khả tích

Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ là miền bất kỳ, $1 \leq q < \infty$. Khi đó $L^q(\Omega)$ là không gian Banach của tất cả các hàm (các lớp hàm tương đương) thực đo được Lebesgue u xác định trên Ω có chuẩn hữu hạn

$$\|u\|_q = \|u\|_{L^q} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Khi $q = 2$, không gian $L^2(\Omega)$ trở thành một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_{\Omega} := \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

trong đó $u, v \in L^2(\Omega)$.

Khi $q = \infty$, không gian $L^\infty(\Omega)$ là một không gian Banach thông thường của các hàm đo được u với chuẩn hữu hạn

$$\|u\|_{\infty} = \|u\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Cho $q' = \frac{q}{q-1}$ là số mũ liên hợp của q . Đặt $q' = \infty$ nếu $q = 1$; $q' = 1$ nếu $q = \infty$, khi đó

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Nếu $u \in L^q(\Omega)$, $v \in L^{q'}(\Omega)$ thì $uv \in L^1(\Omega)$ và bất đẳng thức Hölder sau thỏa mãn

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_q \|v\|_{q'}.$$

Tổng quát hơn, giả sử $1 \leq r, p, q \leq \infty$ thỏa mãn đẳng thức $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Khi đó, nếu $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, thì $uv \in L^r(\Omega)$ và

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q. \quad (1.1)$$

Một hệ quả của (1.1) là bất đẳng thức nội suy đối với chuẩn trong $L^q(\Omega)$. Giả sử $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty, 0 \leq \theta \leq 1$ thỏa mãn $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$ và $u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$. Khi đó $u \in L^r(\Omega)$ và ta có bất đẳng thức nội suy

$$\|u\|_r \leq \|u\|_s^\theta \cdot \|u\|_t^{1-\theta}. \quad (1.2)$$

Trong trường hợp $\Omega = \mathbb{R}^d$, luận án cũng cần sử dụng khai triển Fourier và khai triển Fourier ngược trong không gian Lebesgue dưới đây.

Nếu $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ thì biến đổi Fourier của f được xác định bởi

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} dx,$$

ở đây $x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_d\xi_d$. Nếu $\hat{f}$ cũng là hàm khả tích thì chúng ta có thể biểu diễn $f(x)$ theo $\hat{f}(x)$ bằng công thức phép biến đổi Fourier ngược

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

1.1.3 Không gian các hàm suy rộng

Ta định nghĩa không gian các hàm cơ bản là không gian các hàm trơn $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ với khái niệm hội tụ như sau: dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ của các hàm trong $C_0^\infty(\Omega)$ được gọi là hội tụ đến hàm $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ nếu tồn tại một tập compact $K \subset \Omega$ thỏa mãn $\text{supp } \varphi_j \subset K, j = 1, 2, \dots$ và

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Dãy $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ được gọi là một dãy Cauchy trong không gian các hàm cơ bản nếu tồn tại một tập compact $K \subset \mathbb{R}^d$ thỏa mãn $\text{supp } \varphi_j \subset K, j = 1, 2, \dots$ và

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_j(x) - D^\alpha \varphi_k(x)| = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d.$$

Do đó, không gian các hàm cơ bản là không gian đủ.

Cho $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ là miền bất kỳ với $d \geq 1$. Khi đó không gian đối ngẫu $C_0^\infty(\Omega)'$ gồm tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục

$$\begin{aligned} F &: C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto F(\varphi) \end{aligned}$$

được gọi là không gian các hàm suy rộng trong Ω .

Ta ký hiệu

$$F(\varphi) = [F, \varphi] = [F, \varphi]_\Omega$$

là giá trị của F tại φ . Mỗi hàm $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ có một hàm suy rộng theo định nghĩa

$$\varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle_\Omega := \int_\Omega f \varphi \, dx.$$

Ta viết $\langle f, \cdot \rangle = \langle f, \cdot \rangle_\Omega$ hoặc đơn giản là f để ký hiệu hàm suy rộng. Ta có phép nhúng

$$L^1_{loc}(\Omega) \subseteq C_0^\infty(\Omega)'.$$

Mỗi hàm $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ được gọi là một hàm suy rộng chính quy.

Xét toán tử vi phân $D^\alpha = D^{\alpha_1} \dots D^{\alpha_d}$ với $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Khi đó, với mỗi $F \in C_0^\infty(\Omega)$, hàm suy rộng $D^\alpha F \in C_0^\infty(\Omega)'$ xác định bởi

$$[D^\alpha F, \varphi] := (-1)^{|\alpha|} [F, D^\alpha \varphi], \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Với mỗi $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, hàm suy rộng $D^\alpha f = [D^\alpha f, \cdot] \in C_0^\infty(\Omega)'$ xác định bởi

$$[D^\alpha f, \varphi] := (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle_\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(D^\alpha \varphi) \, dx.$$

Cho $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ là một đa chỉ số. Nếu $D^\alpha f$ là chính quy nghĩa là $D^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$ thì ta gọi $D^\alpha f$ là đạo hàm yếu cấp α của f (hoặc đạo hàm suy rộng cấp α của f). Nếu $1 \leq q \leq \infty$ ta ký hiệu $D^\alpha f \in L^q(\Omega)$ nghĩa là $D^\alpha f$ là chính quy và là một hàm trong $L^q(\Omega)$.

Cho không gian Hilbert $L^2(\Omega)^d$ với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle_\Omega := \int_\Omega u v \, dx$$

và không gian con $L^2_\sigma(\Omega) := \overline{C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_2} \subseteq L^2(\Omega)^d$.

Khi đó, với mỗi $u \in L^2(\Omega)^d$,

$$\langle u, \cdot \rangle : \varphi \longmapsto \langle u, \varphi \rangle; \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^d$$

ta có phép nhúng $L^2(\Omega)^d \subseteq C_0^\infty(\Omega)^{d'}$. Tương tự, với $u \in L^2_\sigma(\Omega)$,

$$\langle u, \cdot \rangle : \varphi \longmapsto \langle u, \varphi \rangle; \quad \varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$$

ta thu được phép nhúng $L^2_\sigma(\Omega) \subseteq C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)'$.

1.1.4 Không gian Besov, không gian Triebel

Định nghĩa 1.1. *Không gian các hàm giảm nhanh Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ là tập hợp xác định bởi*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < C, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d\}$$

trong đó $C = C_{\alpha, \beta}$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào α, β .

Khái niệm hội tụ trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ được định nghĩa như sau: Một dãy $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ trong không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ được gọi là hội tụ đến $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nếu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \varphi_k(x) - x^\alpha D^\beta \varphi(x)| = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d.$$

Khi đó, ta viết

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi.$$

Định nghĩa 1.2. Hàm suy rộng f được gọi là *hàm suy rộng tăng chậm* nếu tồn tại một số tự nhiên m và một hằng số dương C sao cho

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^m \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi(x)|, \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Không gian các hàm suy rộng tăng chậm $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ là tập hợp tất cả các hàm suy rộng tăng chậm.

Giả sử φ là một hàm bất kỳ thuộc không gian $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ và khai triển Fourier của nó $\hat{\varphi}$ thỏa mãn

$$0 \leq \hat{\varphi}(\xi) \leq 1, \quad \hat{\varphi}(\xi) = 1 \text{ nếu } |\xi| \leq \frac{3}{4}, \quad \hat{\varphi}(\xi) = 0 \text{ nếu } |\xi| \geq \frac{3}{2},$$

và

$$\begin{aligned} \psi(x) &= 2^d \varphi(2x) - \varphi(x), \\ \varphi_j(x) &= 2^{dj} \varphi(2^j x), \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \psi_j(x) &= 2^{dj} \psi(2^j x), \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ký hiệu S_j và Δ_j là các toán tử tích chập tương ứng của φ_j và ψ_j . Tập $\{S_j, \Delta_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ được gọi là phép phân tích Littlewood-Paley và

$$I = S_0 + \sum_{j \geq 0} \Delta_j.$$

Sau đây, ta nhắc lại định nghĩa không gian Besov thuần nhất và chuẩn tương đương của nó, xem [30, 62]. Nếu $m \in \mathbb{Z}$, ta ký hiệu $\mathcal{P}_m$ là tập các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng m và quy ước rằng $\mathcal{P}_m = \emptyset$ nếu $m < 0$. Nếu $q = 1$ và $s - \frac{3}{p} \in \mathbb{Z}$, ta đặt $m = s - \frac{3}{p} - 1$. Nếu $s - \frac{3}{p}$ không nguyên ta đặt $m = \left[s - \frac{3}{p} \right]$ là phần nguyên của nó.

Định nghĩa 1.3. Giả sử $0 < p, q \leq \infty$ và $s \in \mathbb{R}$. Khi đó, một hàm suy rộng tăng chậm f được gọi là thuộc *không gian Besov* $B_q^{s,p}$ nếu và chỉ nếu

$$\|S_0 f\|_q + \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_q)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Trong luận án này, ta cũng cần sử dụng không gian Besov thuần nhất $\dot{B}_q^{s,p}$, xem [6, 7].

Định nghĩa 1.4. Giả sử $0 < p, q \leq \infty$ và $s \in \mathbb{R}$. Khi đó, một hàm suy rộng tăng chậm f được gọi là thuộc *không gian Besov thuần nhất* $\dot{B}_q^{s,p}$ nếu và chỉ nếu

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_q)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

và $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j f$ trong $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_m$.

Bổ đề sau sẽ cho ta công thức của chuẩn tương đương trong không gian Besov thuần nhất $\dot{B}_q^{s,p}$.

Bổ đề 1.1. [55] Cho $1 \leq p, q \leq \infty$ và $s < 0$. Khi đó hai chuẩn

$$\left(\int_0^\infty (t^{-\frac{s}{2}} \|e^{t\Delta} f\|_q)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ và } \|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}} \quad (1.3)$$

là tương đương nhau.

Ta cũng sẽ sử dụng định nghĩa không gian Triebel thuần nhất và công thức chuẩn tương đương của không gian Triebel thuần nhất $\dot{F}_q^{s,p}$, xem [6, 7, 30, 62].

Định nghĩa 1.5. Giả sử $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$ và $s \in \mathbb{R}$. Khi đó, một hàm suy rộng tăng chậm f được gọi là thuộc *không gian Triebel-Lizorkin* $F_q^{s,p}$ nếu và chỉ nếu

$$\|S_0 f\|_q + \left\| \left(\sum_{j \geq 0} (2^{sj} |\Delta_j f|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_q < \infty.$$

Định nghĩa 1.6. Giả sử $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$ và $s \in \mathbb{R}$. Khi đó, một hàm suy rộng tăng chậm f được gọi là thuộc *không gian Triebel-Lizorkin thuần nhất* $\dot{F}_q^{s,p}$ nếu và chỉ nếu

$$\left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} |\Delta_j f|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_q < \infty$$

và $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j f$ trong $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_m$.

Bổ đề 1.2. [13] *Giả sử $1 \leq p, q \leq \infty$ và $s < 0$. Khi đó, hai đại lượng*

$$\left\| \left(\int_0^\infty (t^{-\frac{s}{2}} |e^{t\Delta} f|)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_q \text{ và } \|f\|_{\dot{F}_q^{s,p}} \text{ là tương đương.}$$

1.1.5 Không gian Sobolev

Giả sử $s \in \mathbb{N}$ và $1 \leq p \leq \infty$. Khi đó, không gian Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ là không gian gồm tất cả các hàm $u \in L^p(\Omega)$ thỏa mãn $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ với mọi $|\alpha| \leq s$. Chuẩn trên không gian $W^{s,p}(\Omega)$ được định nghĩa bởi

$$\|u\|_{s,p} := \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

nếu $1 \leq p < \infty$, và

$$\|u\|_{s,\infty} := \max_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_\infty$$

nếu $p = \infty$.

Đặt $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$. Trong trường hợp $s = 1, s = 2$, ký hiệu

$$\nabla u := (D_j u)_{j=1}^d, \quad \nabla^2 u := (D_j D_l u)_{j,l=1}^d$$

$$\|\nabla u\|_p := \left(\sum_{j=1}^d \|D_j u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|\nabla^2 u\|_p := \left(\sum_{j,l=1}^d \|D_j D_l u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

nếu $1 \leq p < \infty$, và

$$\|\nabla u\|_\infty := \max_{j=1,\dots,d} \|D_j u\|_\infty, \quad \|\nabla^2 u\|_\infty := \max_{j,l=1,\dots,d} \|D_j D_l u\|_\infty$$

nếu $p = \infty$.

Do chuẩn $\|u\| + \|\nabla u\|_p$ tương đương với chuẩn $\|u\|_{1,p}$ và chuẩn $\|u\|_p + \|\nabla u\|_p + \|\nabla^2 u\|_p$ tương đương với chuẩn $\|u\|_{2,p}$ nên để thuận tiện ta có thể sử dụng chung trong luận án các ký hiệu $\|u\|_{1,p}$ hoặc $\|u\|_{2,p}$.

Với $p = 2$, không gian Sobolev $W^{s,2}(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\sum_{|\alpha| \leq s} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle; \quad u, v \in W^{2,s}(\Omega).$$

Trong luận án này, ta chủ yếu sử dụng không gian Hilbert $W^{1,2}(\Omega)$ với tích vô hướng

$$\langle u, v \rangle + \langle \nabla u, \nabla v \rangle := \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

trong đó $\nabla u \cdot \nabla v = (D_1 u)(D_1 v) + \dots + (D_d u)(D_d v)$.

Không gian con $W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ của không gian $W^{1,2}(\Omega)$ được định nghĩa như bao đóng của không gian các hàm trơn $u \in C_0^\infty(\Omega)$ với chuẩn $\|\cdot\|_{1,2}$ và $\operatorname{div} u = 0$.

Cho $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, và đặt $p' = \frac{p}{p-1}$, ta có $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Khi đó, không gian Sobolev $W^{-s,p}(\Omega)$ được gọi là không gian đối ngẫu của không gian $W_0^{s,p'}(\Omega)$, ta viết

$$W^{-s,p}(\Omega) := W_0^{s,p'}(\Omega)'$$

nghĩa là $W^{-s,p}(\Omega)$ là không gian của tất cả các phiếm hàm tuyến tính

$$F : \varphi \mapsto [F, \varphi], \quad \varphi \in W_0^{s,p'}(\Omega).$$

Phiếm hàm tuyến tính F gọi là liên tục với chuẩn $\|\varphi\|_{s,p'}$ nếu và chỉ nếu tồn tại một hằng số $C = C(F) > 0$ sao cho $|[F, \varphi]| \leq C \|\varphi\|_{s,p'}$ với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Chuẩn trong không gian $W^{-s,p}(\Omega)$ được xác định bởi

$$\|F\|_{-s,p} := \sup_{0 \neq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \frac{|[F, \varphi]|}{\|\varphi\|_{s,p'}}.$$

Nếu $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, không gian $W^{s,p}(\Omega)$ và không gian $W^{-s,p}(\Omega)$ là hai không gian phản xạ. Do đó

$$W_0^{1,p'}(\Omega) = W^{-1,p}(\Omega)'.$$

Ở đây ta đồng nhất mỗi hàm $u \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ với một hàm

$$[\cdot, u] : F \mapsto [F, u], \quad F \in W^{-1,p}(\Omega).$$

Xét một miền bị chặn $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ và $1 < p < \infty$. Phép nhúng tự nhiên

$$u \longmapsto u, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

xác định một toán tử tuyến tính bị chặn từ $W_0^{1,p}(\Omega)$ vào $L^p(\Omega)$, do

$$\|u\|_p \leq \|u\|_{1,p}; \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Do đó phép nhúng $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ là liên tục. Hơn nữa, phép nhúng trên là compact, nghĩa là mọi dãy $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ trong $W_0^{1,p}(\Omega)$, bị chặn với chuẩn trong $W^{1,p}(\Omega)$, chứa một dãy con hội tụ với chuẩn trong $L^p(\Omega)$ đến phần tử $u \in L^p(\Omega)$. Từ $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{1,p} < \infty$ suy ra $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Khi $\Omega = \mathbb{R}^d$, không gian Sobolev cấp phân $H_p^s(\mathbb{R}^d)$ ($s \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$) được định nghĩa bởi

$$H_p^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^d) : \exists g \in L^p(\mathbb{R}^d) \text{ sao cho } (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\cdot) = \hat{g}(\cdot) \right\}$$

với chuẩn $\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^d)} = \|(I - \Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_p$.

Trong trường hợp s là số tự nhiên thì ta có chỉ ra rằng hai chuẩn sau là tương đương

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \sim \|(I - \Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_p,$$

và ta có $W^{s,p}(\mathbb{R}^d) = H_p^s(\mathbb{R}^d)$.

Khi $p = 2$ thì không gian $H^s(\mathbb{R}^d) := H_p^s(\mathbb{R}^d)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} (1 + |\xi|^2)^s d\xi.$$

Với Ω là miền tròn trong $\mathbb{R}^d$, $s > 0$, $m = [s] + 1$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn s , không gian Sobolev cấp phân $H_p^s(\Omega)$ được xác định bằng phép nội suy

$$H_p^s(\Omega) := [L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)]_{s/m}.$$

Trong luận án cũng sử dụng không gian Sobolev thuần nhất được xác định như sau: Ký hiệu $\mathcal{P}_k$ là tập hợp của tất cả các đa thức biến số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng k với $k \in \mathbb{N}_0$. Ta đặt $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{k=0}^\infty \mathcal{P}_k$ là tập hợp của tất cả các đa thức. Ký hiệu $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$, với $k \in \overline{\mathbb{N}}$, ta xét quan hệ tương đương trong $\mathcal{S}'$

$$f \sim_k g \iff f - g \in \mathcal{P}_k$$

và ký hiệu $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_k$ là không gian của các lớp tương đương đối với quan hệ tương đương $\sim_k$. Nếu $u \in \mathcal{S}'$, ta ký hiệu $[u]_k$ là lớp tương đương của nó trong $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_k$. Với $k \in \mathbb{N}_0$, ký hiệu $\mathcal{S}_k$ là không gian của tất cả các hàm Schwartz φ sao cho

$$\int x^\gamma \varphi(x) dx = 0$$

với $\gamma \in \mathbb{N}^d$ bất kỳ, $|\gamma| \leq k$ và đặt $\mathcal{S}_\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k$. Mỗi không gian $\mathcal{S}_k, k \in \overline{\mathbb{N}}$ là một không gian con của $\mathcal{S}$ cảm sinh bởi tô pô trong $\mathcal{S}$. Hơn nữa, ta thấy rằng

$$(\mathcal{S}_k)' = \mathcal{S}'/\mathcal{P}_k.$$

Để xác định không gian Sobolev thuần nhất ta cần một số định nghĩa toán tử Laplace và bổ đề sau.

Định nghĩa 1.7. Cho $s > 0$, với $\varphi \in \mathcal{S}_\infty$ bất kỳ, ta xác định toán tử Laplace cấp phân của φ bởi công thức:

$$\dot{\Delta}^{s/2} \varphi = \mathcal{F}^{-1} (|\cdot|^s \hat{\varphi}).$$

Bổ đề 1.3. [37, 71] *Toán tử*

$$\dot{\Delta}^{s/2} : \mathcal{S}_\infty \rightarrow \mathcal{S}_\infty$$

là một phép đẳng cấu với ánh xạ đồng nhất

$$\mathcal{I}_s \varphi = \mathcal{F}^{-1} (|\xi|^{-s} \hat{\varphi}).$$

Tiếp theo, với $[u] \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$ cho trước, ta xác định một hàm suy rộng khác trong $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$ bằng cách đặt với mọi $\varphi \in \mathcal{S}_\infty$

$$\langle \mathcal{F}^{-1} (|\cdot|^s \hat{u}), \varphi \rangle := \langle u, \mathcal{F} (|\cdot|^s \hat{\varphi}) \rangle$$

trong đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng giữa $\mathcal{S}_\infty$ và $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$. Khi đó, ta mở rộng toán tử $\dot{\Delta}^{s/2}$ trên không gian $(\mathcal{S}_\infty)' = \mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$ như sau.

Định nghĩa 1.8. Ta xác định toán tử

$$\dot{\Delta}^{s/2} : \mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty \rightarrow \mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$$

với $[u] \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$ ta đặt

$$\dot{\Delta}^{s/2} [u] = \mathcal{F}^{-1} (|\cdot|^s \hat{u})$$

và gọi nó là toán tử Laplace cấp s của $[u]$.

Do số hạng bên vế phải không phụ thuộc vào sự biểu diễn trong $[u]$ nên ta có thể viết đơn giản $[\dot{\Delta}^{s/2}u]$ thay cho $[\dot{\Delta}^{s/2}[u]]$.

Với $1 < p < \infty$, ta xác định $\dot{L}^p$ là không gian gồm tất cả các phần tử trong $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$ sao cho mọi lớp tương đương đều có phần tử đại diện thuộc L^p , nghĩa là

$$\dot{L}^p = \left\{ [u] \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty : \|[u]\|_{\dot{L}^p}^p := \inf_{P \in \mathcal{P}_\infty} \|u + P\|_{L^p}^p < \infty \right\}.$$

Rõ ràng, nếu $[u] \in \dot{L}^p$, thì đại diện của $[u]$ trong L^p là duy nhất. Do $\mathcal{S}_\infty$ là trù mật trong L^p với mọi $p \in [1, \infty)$, ta thu được $\dot{\Delta}^{s/2}u \in \dot{L}^p, p \in (1, \infty)$ nếu và chỉ nếu ánh xạ

$$\mathcal{S}_\infty \ni \psi \mapsto \langle u, \dot{\Delta}^{s/2}\psi \rangle$$

là bị chặn trong $L^{p'}$. Trong trường hợp này, tồn tại duy nhất $g \in L^p$ sao cho $\langle u, \dot{\Delta}^{s/2}\psi \rangle = \langle g, \psi \rangle$ với mọi $\psi \in \mathcal{S}_\infty$ và đặt

$$\dot{\Delta}^{s/2}u = [g].$$

Không gian Sobolev thuần nhất $\dot{H}_s^p$ được xác định như sau.

Định nghĩa 1.9. Cho $s > 0$ và $1 < p < \infty$. Khi đó, *không gian Sobolev thuần nhất $\dot{H}_s^p$* được xác định bởi

$$\dot{H}_s^p = \left\{ [f] \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty : \dot{\Delta}^{s/2}f \in \dot{L}^p \right\}$$

và ta đặt

$$\|f\|_{\dot{H}_s^p}^p = \left\| \dot{\Delta}^{s/2}f \right\|_{\dot{L}^p}^p.$$

Do đó, không gian Sobolev thuần nhất $\dot{H}_s^p$ là không gian của các lớp tương đương trong $\mathcal{S}'/\mathcal{P}_\infty$, xem [37, 61].

Bổ đề 1.4. (Bất đẳng thức Sobolev). *Nếu $s_1 > s_2$, $1 < q_1, q_2 < \infty$ và $s_1 - \frac{d}{q_1} = s_2 - \frac{d}{q_2}$ thì ta có ánh xạ nhúng sau*

$$\dot{H}_{q_1}^{s_1} \hookrightarrow \dot{H}_{q_2}^{s_2}.$$

1.1.6 Không gian Lorentz

Ta sẽ sử dụng không gian Lorentz dưới đây và một số bất đẳng thức quan trọng trong không gian này.

Định nghĩa 1.10. [1] Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $1 \leq p, r \leq \infty$. Không gian Lorentz $L^{p,r}(\Omega)$ được xác định như sau: Một hàm đo được $f \in L^{p,r}(\Omega)$ nếu và chỉ nếu

$$\|f\|_{L^{p,r}(\Omega)} := \left(\frac{r}{p} \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

khi $1 \leq r < \infty$ và

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} := \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) < \infty$$

khi $r = \infty$ trong đó

$$f^*(t) = \inf \{ \tau : \mathcal{M}^d(\{x \in \Omega : |f(x)| > \tau\}) \leq t \},$$

với $\mathcal{M}^d$ là độ đo Lebesgue trong $\mathbb{R}^d$.

Bổ đề 1.5. [55] (Bất đẳng thức Hölder trong không gian Lorentz).

Cho $1 < r, p, q < \infty$ và $1 \leq \bar{r}, \bar{p}, \bar{q} \leq \infty$ thỏa mãn

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{và} \quad \frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}}.$$

Giả sử rằng $f \in L^{p,\bar{p}}(\Omega)$ và $g \in L^{q,\bar{q}}(\Omega)$. Khi đó, $fg \in L^{r,\bar{r}}(\Omega)$ và ta có bất đẳng thức sau

$$\|fg\|_{L^{r,\bar{r}}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^{p,\bar{p}}(\Omega)} \|g\|_{L^{q,\bar{q}}(\Omega)}. \quad (1.4)$$

Bổ đề 1.6. [55] (Bất đẳng thức Young cho tích chập trong không gian Lorentz).

Cho $1 < r, p, q < \infty$ và $1 \leq \bar{r}, \bar{p}, \bar{q} \leq \infty$ thỏa mãn mỗi quan hệ

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{và} \quad \frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{\bar{p}} + \frac{1}{\bar{q}}.$$

Giả sử rằng $f \in L^{p,\bar{p}}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$ và $g \in L^{q,\bar{q}}(\mathbb{R}^d)$. Khi đó, $f * g \in L^{r,\bar{r}}(\mathbb{R}^d)$ và ta có bất đẳng thức sau

$$\|f * g\|_{L^{r,\bar{r}}} \lesssim \|f\|_{L^{p,\bar{p}}} \|g\|_{L^{q,\bar{q}}}. \quad (1.5)$$

Bổ đề 1.7. [55] (Tích chập của các không gian Lorentz).

Giả sử $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1/p' + 1/p = 1$ và $1/q' + 1/q = 1$. Khi đó, toán tử tích chập là toán tử song tuyến tính bị chặn:

- a) Từ $L^{p,q} \times L^1$ vào $L^{p,q}$,
- b) Từ $L^{p,q} \times L^{p',q'}$ vào L^∞ ,

c) Từ $L^{p,q} \times L^{p_1,q_1}$ vào L^{p_2,q_2} , với $1 < p, p_1, p_2 < \infty, 1 \leq q, q_1, q_2 \leq \infty$ thỏa mãn $\frac{1}{p_2} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p_1}$ và $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q_1}$.

1.2. Một số toán tử cơ bản trong hệ phương trình Navier-Stokes

1.2.1 Toán tử Helmholtz-Leray

Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ là một miền bất kỳ với $d \geq 2$. Đặt không gian

$$G(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega)^d, \text{ tồn tại } p \in L^2_{loc}(\Omega) : f = \nabla p\}.$$

Bổ đề sau chỉ ra rằng $G(\Omega)$ là trực giao với $L^2_\sigma(\Omega)$, ta viết

$$G(\Omega) = L^2_\sigma(\Omega)^\perp.$$

Bổ đề 1.8. [68] *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 2$ là một miền bất kỳ. Khi đó*

$$G(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega)^d, \langle f, v \rangle_\Omega = 0 \text{ với mọi } v \in L^2_\sigma(\Omega)\}$$

và mỗi $f \in L^2(\Omega)^d$ có một sự phân tích duy nhất

$$f = f_0 + \nabla p \tag{1.6}$$

với $f_0 \in L^2_\sigma(\Omega), \nabla p \in G(\Omega), \langle f_0, \nabla p \rangle_\Omega = 0$ và

$$\|f\|_2^2 = \|f_0\|_2^2 + \|\nabla p\|_2^2.$$

Từ bổ đề suy ra $\mathbb{P}$ là toán tử tuyến tính bị chặn từ $L^2(\Omega)^d$ vào $L^2_\sigma(\Omega)$ xác định bởi $\mathbb{P}f := f_0$ với f_0 trong (1.6). Khi đó, $\mathbb{P}$ được gọi là phép chiếu Helmholtz-Leray (gọi tắt là phép chiếu Helmholtz) từ không gian $L^2(\Omega)^d$ vào không gian $L^2_\sigma(\Omega)$.

Bổ đề 1.9. [68] *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 2$ là một miền bất kỳ và $f = f_0 + \nabla p$ là phép phân tích Helmholtz của $f \in L^2(\Omega)^d$. Khi đó*

$$\mathbb{P} : L^2(\Omega)^d \longrightarrow L^2_\sigma(\Omega) \tag{1.7}$$

xác định bởi $\mathbb{P}g := f_0$ với mọi $f \in L^2(\Omega)^d$ là một toán tử tuyến tính bị chặn với chuẩn $\|\mathbb{P}\| \leq 1$. Do đó

$$\|\mathbb{P}f\|_2 \leq \|f\|_2, f \in L^2(\Omega)^d. \tag{1.8}$$

Với mọi $f, g \in L^2(\Omega)^d$, toán tử $\mathbb{P}$ có các tính chất sau:

1. $\mathbb{P}(\nabla p) = 0$,
2. $(I - \mathbb{P})f = \nabla p$,
3. $\mathbb{P}^2 f = \mathbb{P}f$,
4. $(I - \mathbb{P})^2 f = (I - \mathbb{P})f$,
5. $\langle \mathbb{P}f, g \rangle = \langle f, \mathbb{P}g \rangle$,
6. $\|f\|_2^2 = \|\mathbb{P}f\|_2^2 + \|(I - \mathbb{P})f\|_2^2$.

1.2.2 Toán tử Stokes

Giả sử H là không gian Hilbert thực với tích vô hướng xác định bởi $\langle u, v \rangle_H = \langle u, v \rangle$ và chuẩn $\|u\|_H = \|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$, $u, v \in H$.

Ta xác định toán tử $B : D(B) \rightarrow H$ là một toán tử tuyến tính đóng với miền trù mật $D(B) \subseteq H$ và toán tử đối ngẫu của nó B' với miền trù mật $D(B') \subseteq H$ sao cho

$$\langle u, Bv \rangle = \langle B'u, v \rangle \text{ với mọi } v \in D(B), u \in D(B').$$

Không gian $D(B')$ gồm tất cả các hàm $u \in H$ sao cho hàm $v \mapsto \langle u, Bv \rangle$, $v \in D(B)$ liên tục với chuẩn $\|v\|_H$. Nếu $B = B'$, nghĩa là $D(B) = D(B')$ và $Bv = B'v$ với mọi $v \in D(B)$ thì B được gọi là toán tử tự liên hợp. Một toán tử tự liên hợp B được gọi là dương nếu $\langle v, Bv \rangle \geq 0$ với mọi $v \in D(B)$.

Với mỗi $\lambda \in [0, \infty)$, giả sử E_λ là toán tử chiếu từ H vào không gian con $D_\lambda \subseteq H$. Ta gọi $\{E_\lambda, \lambda \geq 0\}$ là họ các phép chiếu. Khi đó, ta viết

$$E_{\lambda_0} = s - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E_\lambda$$

nếu và chỉ nếu $E_{\lambda_0}v = s - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} E_\lambda v$ với mọi $v \in H$ (hội tụ mạnh trong H).

Giả sử họ $\{E_\lambda, \lambda \geq 0\}$ thỏa mãn các tính chất sau:

- a) $E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda = E_\lambda$ với mọi $0 \leq \lambda \leq \mu < \infty$.
- b) $E_\lambda = s - \lim_{\mu \rightarrow \lambda} E_\mu$ với mọi $0 < \mu < \lambda < \infty$.
- c) $E_0 = 0$, $s - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda = I$.

Khi đó, $\{E_\lambda, \lambda \geq 0\}$ được gọi là phổ của toán tử đồng nhất I trong $[0, \infty)$.

Giả sử $B : D(B) \rightarrow H$ là một toán tử dương tự liên hợp bất kỳ với miền $D(B) \subseteq H$. Khi đó, tồn tại duy nhất một phổ xác định $\{E_\lambda, \lambda \geq 0\}$ sao cho

$$B = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda, \quad D(B) = \left\{ v \in H; \int_0^\infty \lambda^2 d\|E_\lambda v\|^2 < \infty \right\}.$$

Với mỗi hàm thực liên tục $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ta xác định toán tử tự liên hợp

$$g(B) := \int_0^\infty g(\lambda) dE_\lambda$$

với miền xác định

$$D(g(B)) = \left\{ v \in H; \int_0^\infty g^2(\lambda) d\|E_\lambda v\|^2 < \infty \right\}.$$

Ta xác định toán tử mũ

$$B^\alpha := \int_0^\infty \lambda^\alpha dE_\lambda, \quad D(B^\alpha) := \left\{ v \in H; \int_0^\infty \lambda^{2\alpha} d\|E_\lambda v\|^2 < \infty \right\}$$

với mọi $\alpha \geq 0$.

Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 2$ là một miền bất kỳ, ta xác định không gian

$$W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega) \subseteq L_\sigma^2(\Omega).$$

Trong luận án, ta cũng cần sử dụng toán tử $A : D(A) \rightarrow L_\sigma^2(\Omega)$ với miền xác định $D(A) \subseteq L_\sigma^2(\Omega)$ như sau: Cho $D(A) \subseteq W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ là không gian của tất cả các hàm $u \in W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ sao cho tồn tại $f \in L_\sigma^2(\Omega)$ thỏa mãn

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Vậy $D(A)$ là không gian của tất cả các hàm $u \in W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)$ sao cho

$$v \longmapsto \langle \nabla u, \nabla v \rangle, \quad v \in C_0^\infty(\Omega)$$

liên tục với chuẩn $\|v\|_2$. Với mọi $u \in D(A)$ ta có $Au \in L_\sigma^2(\Omega)$ xác định bởi

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \langle Au, v \rangle, \quad v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Toán tử A được gọi là toán tử Stokes của miền Ω . Do A là toán tử tự liên hợp dương nên tồn tại duy nhất một phổ xác định $\{E_\lambda, \lambda \geq 0\}$ trong không gian Hilbert $L_\sigma^2(\Omega)$ và

$$A = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda, \quad D(A) = \left\{ v \in L_\sigma^2(\Omega); \|Av\|_2^2 = \int_0^\infty \lambda^2 d\|E_\lambda v\|_2^2 < \infty \right\}.$$

Tổng quát hơn, ta xác định toán tử mũ $A^\alpha : D(A^\alpha) \rightarrow L_\sigma^2(\Omega)$ trong đó $-1 \leq \alpha \leq 1$, theo [68] như sau: A^α là toán tử tự liên hợp dương xác định bởi

$$A^\alpha := \int_0^\infty \lambda^\alpha dE_\lambda,$$

trong đó miền xác định

$$D(A^\alpha) := \left\{ v \in L_\sigma^2(\Omega); \|Av\|_2^2 = \int_0^\infty \lambda^{2\alpha} d\|E_\lambda v\|_2^2 < \infty \right\}.$$

Ta có tính chất nhúng của miền $D(A^\alpha)$ vào không gian $L^q(\Omega)^d$ trong trường hợp Ω là miền tổng quát như sau: Cho $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, d \geq 2$ là một miền bất kỳ, $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, 2 \leq q < \infty$ với $\frac{3}{2} = \frac{3}{q} + 2\alpha$ và A là toán tử Stokes trong miền Ω . Khi đó, nếu $u \in D(A^\alpha)$ thì $u \in L^q(\Omega)^d$ và

$$\|u\|_q \leq C \|A^\alpha u\|_2 \quad (1.9)$$

trong đó $C = C(\alpha, q) > 0$ là hằng số.

Ký hiệu $\hat{D}(A^{-\alpha}) \subseteq C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)', 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ là không gian của tất cả các hàm $[u, \cdot] : v \mapsto [u, v]$ xác định trên $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ và liên tục với chuẩn $\|A^\alpha v\|_2$. Khi đó, toán tử $A^{-\alpha} : \hat{D}(A^{-\alpha}) \rightarrow L_\sigma^2(\Omega)$ là thác triển đóng từ $D(A^{-\alpha})$ vào miền $\hat{D}(A^{-\alpha})$ và xác định bởi

$$[u, v] = \langle A^{-\alpha} u, A^\alpha v \rangle, \quad v \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega).$$

Do đó, toán tử $A^{-\alpha} \mathbb{P}$ là toán tử bị chặn từ $L^q(\Omega)^d$ vào $L_\sigma^2(\Omega)$, nghĩa là với mỗi hàm $f \in L^q(\Omega)^d$, ta có $\mathbb{P}f \in \hat{D}(A^{-\alpha})$ và

$$\|A^{-\alpha} \mathbb{P}f\|_2 \leq C \|f\|_q, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad 1 < q \leq 2, \quad 2\alpha + \frac{3}{2} = \frac{3}{q}. \quad (1.10)$$

Ta có

$$\|A^{\frac{1}{2}} u\|_2 = \|\nabla u\|_2, \quad u \in W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega) = D(A^{\frac{1}{2}}). \quad (1.11)$$

1.2.3 Nửa nhóm Stokes e^{-tA}

Với mỗi $t \geq 0$, ta xác định toán tử

$$S(t) := e^{-tA} := \int_0^\infty e^{-t\lambda} dE_\lambda.$$

Do $\lambda \mapsto e^{-t\lambda}, \lambda \geq 0$ là hàm bị chặn dương xác định trên $[0, \infty)$ nên $S(t)$ là toán tử bị chặn và tự liên hợp dương trong không gian Hilbert $L_\sigma^2(\Omega)$. Toán tử chuẩn $\|S(t)\|$ của $S(t)$ thỏa mãn ước lượng sau

$$\|S(t)\| \leq \sup_{\lambda \geq 0} e^{-t\lambda} \leq 1$$

với mọi $t \geq 0$. Từ công thức biểu diễn của $S(t)$ ta có

$$S(t)S(\tau) = \int_0^\infty e^{-t\lambda} e^{-\tau\lambda} dE_\lambda = \int_0^\infty e^{-(t+\tau)\lambda} dE_\lambda$$

hay ta còn có thể viết

$$S(t)S(\tau) = S(t + \tau)$$

với mọi $t, \tau \geq 0$. Đặc biệt, với $t = 0$, ta có

$$S(0) = \int_0^\infty dE_\lambda = I,$$

trong đó I là toán tử đồng nhất.

Khi đó, họ các toán tử $\{S(t); t \geq 0\}$ được gọi là nửa nhóm Stokes của Ω , xem [9, 35, 36, 74].

Với $0 \leq \alpha \leq 1$ và $t \geq 0$, ta có $\sup_{\lambda \geq 0} \lambda^\alpha e^{-t\lambda} \leq t^{-\alpha}$. Khi đó

$$A^\alpha e^{-tA} = A^\alpha S(t) = \int_0^\infty \lambda^\alpha e^{-t\lambda} dE_\lambda$$

là toán tử bị chặn với chuẩn toán tử

$$\|A^\alpha e^{-tA}\| \leq t^{-\alpha}.$$

Ta có $e^{-tA}v \in D(A^\alpha)$ với mọi $v \in L_\sigma^2(\Omega)$ và

$$A^\alpha e^{-tA}v = e^{-tA}A^\alpha v$$

với mọi $v \in D(A^\alpha)$ và $t > 0$, nghĩa là e^{-tA} có tính giao hoán với A^α . Từ công thức chuẩn của toán tử, ta có $A^\alpha e^{-tA}$ thỏa mãn ước lượng nửa nhóm sau

$$\|A^\alpha e^{-tA}u\|_2 \leq t^{-\alpha} \|u\|_2, \quad u \in L_\sigma^2(\Omega), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (1.12)$$

Trong luận án ta cũng cần ước lượng về nửa nhóm Stokes sau:

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ là một miền bất kỳ, $\{S(t); t \geq 0\}$ là nửa nhóm Stokes của miền Ω , $0 < T \leq \infty$. Khi đó $A^{\frac{1}{s}} e^{-tA}u \in L^s(0, T; L_\sigma^2(\Omega))$ và

$$\|A^{\frac{1}{s}} e^{-tA}u\|_{2,s;T} \leq \|u\|_2, \quad u \in L_\sigma^2(\Omega), \quad 2 \leq s < \infty. \quad (1.13)$$

1.3. Nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes

Xét hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0, x) = u_0 \end{cases} \quad (1.14)$$

trong đó $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát, $\partial\Omega$ là biên của miền Ω , $[0, T)$, $0 < T \leq \infty$ là khoảng thời gian và u_0 là giá trị ban đầu tại thời điểm $t = 0$. Các đại lượng chưa biết là vận tốc $u(t, x)$ của chất lỏng tại thời điểm t , vị trí x và đại lượng áp suất $p(t, x)$.

Trong luận án, ta cần sử dụng nghiệm yếu và nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ như sau:

Định nghĩa 1.11. [68] Giả sử $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$.

1. Một trường vectơ

$$u \in L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2_{\text{loc}}([0, T); W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)) \quad (1.15)$$

được gọi là *nghiệm yếu* (theo nghĩa Leray) của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) với giá trị ban đầu $u(0, x) = u_0$ nếu thỏa mãn hệ thức

$$-\langle u, w_t \rangle_{\Omega, T} + \langle \nabla u, \nabla w \rangle_{\Omega, T} - \langle u \otimes u, \nabla w \rangle_{\Omega, T} = \langle u_0, w \rangle_\Omega \quad (1.16)$$

với mọi $w \in C_0^\infty([0, T); C_{0,\sigma}^\infty(\Omega))$ và u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 \quad (1.17)$$

với mọi $t \in [0, T)$.

2. Một nghiệm yếu u được gọi là *nghiệm mạnh* của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) nếu thỏa mãn *điều kiện Serrin địa phương*

$$u \in L^s_{\text{loc}}([0, T); L^q(\Omega)) \quad (1.18)$$

với mọi $2 < s < \infty$, $3 < q < \infty$, trong đó $\frac{2}{s} + \frac{3}{q} \leq 1$.

Trong trường hợp $\Omega = \mathbb{R}^3$, ta xét bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes trong cả không gian $\mathbb{R}^3$ như sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(0, x) = u_0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Định nghĩa 1.12. [11] Cho $T > 0$, một trường vectơ u được gọi là *nghiệm mềm* của hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) trên $[0, T]$ với điều kiện ban đầu u_0 nếu u thỏa mãn phương trình tích phân

$$u = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u(s) \otimes u(s)) ds.$$

Nhân của toán tử truyền nhiệt $e^{t\Delta}$ được xác định bởi

$$e^{t\Delta}u(x) = ((4\pi t)^{-3/2} e^{-|\cdot|^2/4t} * u)(x).$$

Chương 2

Tính chính quy và dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát. Ở đây, chúng tôi thu được kết quả là các định lý về tính chính quy, dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Phương pháp chứng minh các định lý dựa trên lý thuyết về sự tồn tại của nghiệm mạnh địa phương và nghiệm mạnh toàn cục, một số tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u, v)$, định lý nhúng và một số ước lượng nửa nhóm Stokes.

Chương này gồm hai phần: Phần thứ nhất trình bày về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát. Phần thứ hai trình bày về dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [1], [2] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

2.1. Tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

2.1.1 Đặt bài toán

Trong phần này, ta nghiên cứu bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) trong miền tổng quát như sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0, x) = u_0 \end{cases}$$

trong đó $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát, nghĩa là một tập con mở, liên thông và không bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ là biên của miền Ω , $[0, T)$, $0 < T \leq \infty$ là khoảng thời gian và u_0 là giá trị ban đầu tại thời điểm $t = 0$.

Định nghĩa 2.1. [25] Một nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) được gọi là *chính quy* trong khoảng $(a, b) \subseteq (0, T)$ nếu thỏa mãn điều kiện Serrin

$$u \in L^s_{\text{loc}}(a, b; L^q(\Omega)) \quad (2.1)$$

với $2 < s < \infty$, $3 < q < \infty$, $\frac{2}{s} + \frac{3}{q} = 1$.

Một thời điểm $t \in (0, T)$ được gọi là một *điểm chính quy* của nghiệm yếu u nếu tồn tại một khoảng $(a, b) \subseteq (0, T)$ sao cho u chính quy trong khoảng (a, b) với $a < t < b$.

Xét công thức nghiệm thỏa mãn phương trình tích phân sau

$$u(t) = e^{-tA}u_0 - A^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) d\tau. \quad (2.2)$$

Ta biết rằng

$$u \in L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2_{\text{loc}}([0, T]; W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega))$$

là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) với giá trị ban đầu u_0 nếu và chỉ nếu u là nghiệm của phương trình tích phân (2.2), xem Định lý 1.3.1 trong [68], trang 270.

Nếu Ω là miền bị chặn thì luôn tồn tại nghiệm yếu u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_{t'}^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2}\|u(t')\|_2^2 \quad (2.3)$$

với hầu hết $t' \in [0, T)$ và với mọi $t \in [t', T)$, xem [68]. Kết quả tương tự trong miền không bị chặn cũng được chứng minh bởi nhóm các tác giả R. Farwig, H. Kozono và H. Sohr [20] năm 2005. Kết quả thu được trong miền không bị chặn này sẽ được áp dụng để chứng minh các kết quả chính dưới đây.

2.1.2 Các tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u, v)$ và nửa nhóm Stokes e^{-tA}

Đầu tiên, để nghiên cứu các tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u, v)$ ta xác định không gian bổ trợ $\mathcal{K}_{\bar{s}, T}^{\bar{s}}$ gồm tất cả các hàm u sao cho

$$t^{\frac{\alpha}{2}}u \in BC([0, T]; D(A^{\frac{\bar{s}}{2}}))$$

và

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|A^{\frac{\bar{s}}{2}}u(t)\|_2 = 0 \quad (2.4)$$

với $-1 < \tilde{s} \leq \bar{s} < \infty$, $\alpha = \bar{s} - \tilde{s}$. Không gian bổ trợ $\mathcal{K}_{\bar{s}, T}^{\bar{s}}$ được xác định bởi chuẩn

$$\|u\|_{\mathcal{K}_{\bar{s}, T}^{\bar{s}}} := \sup_{0 < t < T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|A^{\frac{\bar{s}}{2}}u(t)\|_2. \quad (2.5)$$

Trong trường hợp $\bar{s} = \tilde{s}$, để thuận tiện ta định nghĩa không gian $\mathcal{K}_{\bar{s}, T}^{\bar{s}}$ như một không gian con $BC([0, T]; D(A^{\frac{\bar{s}}{2}}))$ với điều kiện $u(t, x)$ thỏa mãn

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|A^{\frac{\bar{s}}{2}}u(t)\|_2 = 0.$$

Ta xác định

$$\mathcal{G}_{\bar{s}, T}^{\bar{s}} := \mathcal{K}_{\bar{s}, T}^{\bar{s}} \cap L^\infty(0, T; L_\sigma^2(\Omega)) \cap L^4([0, T]; W_{0, \sigma}^{1, 2}(\Omega)).$$

Bổ đề 2.1.

a) Nếu $\theta < 1, \gamma < 1$ và $t > 0$ thì

$$\int_0^t (t - \tau)^{-\gamma} \tau^{-\theta} d\tau = C_1 t^{1-\gamma-\theta}, \text{ trong đó } C_1 = \int_0^1 (1 - \tau)^{-\gamma} \tau^{-\theta} d\tau < \infty.$$

b) Nếu $\theta < 1$ thì

$$\int_0^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-\gamma} \tau^{-\theta} d\tau = C_2 t^{1-\gamma-\theta}, \text{ trong đó } C_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - \tau)^{-\gamma} \tau^{-\theta} d\tau < \infty.$$

c) Nếu $\gamma < 1$ thì

$$\int_{\frac{t}{2}}^t (t - \tau)^{-\gamma} \tau^{-\theta} d\tau = C_3 t^{1-\gamma-\theta}, \text{ trong đó } C_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - \tau)^{-\gamma} \tau^{-\theta} d\tau < \infty.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể đổi biến $\tau = ts$. Áp dụng vào các biểu thức tích phân trên ta thu được các kết quả của Bổ đề 2.1. $\square$

Ta chứng minh kết quả sau đây về nghiệm của phương trình bậc hai trong không gian Banach, bổ đề dưới đây là sự khái quát hóa của Định lý 22.4 trong [55], trang 227.

Bổ đề 2.2. Cho E và F là hai không gian định chuẩn sao cho $E \cap F$ là không gian Banach với chuẩn $\|x\|_{E \cap F} := \|x\|_E + \|x\|_F$. Giả sử rằng B là toán tử song tuyến tính từ $(E \cap F) \times (E \cap F)$ vào $E \cap F$ sao cho tồn tại một hằng số dương $\gamma > 0$ thỏa mãn

$$\|B(x, y)\|_E \leq \gamma \|x\|_E \|y\|_E, \text{ với mọi } x, y \in E \cap F,$$

$$\|B(x, y)\|_F \leq \gamma \|x\|_E \|y\|_F, \text{ với mọi } x, y \in E \cap F,$$

$$\|B(x, y)\|_F \leq \gamma \|x\|_F \|y\|_E, \text{ với mọi } x, y \in E \cap F.$$

Khi đó, cố định $y \in E \cap F$ bất kỳ sao cho $\|y\|_E < \frac{1}{4\gamma}$, phương trình $x = y - B(x, x)$ có duy nhất nghiệm $\bar{x} \in E \cap F$ thỏa mãn $\|\bar{x}\|_E < \frac{1}{2\gamma}$.

Chứng minh. Tính duy nhất của $\bar{x}$ trong $E \cap F$ là rõ ràng, hơn nữa $\bar{x}$ là duy nhất trong E . Do đó, ta chỉ cần chứng minh sự tồn tại của $\bar{x}$ trong $E \cap F$.

Lấy dãy $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ xác định bởi

$$x_0 = y \text{ và } x_{n+1} = y - B(x_n, x_n).$$

Từ cách xác định dãy $\{x_n\}_{n=0}^\infty$, ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng $\|x_n\|_E < 2\|y\|_E$ với mọi n . Thật vậy, giả sử $\|x_n\|_E < 2\|y\|_E$. Khi đó

$$\|x_{n+1}\|_E = \|y - B(x_n, x_n)\|_E \leq \|y\|_E + \gamma \|x_n\|_E \|x_n\|_E.$$

Theo giả thiết ta có $\|x_{n+1}\|_E \leq \|y\|_E + 4\gamma\|y\|_E^2 \leq 2\|y\|_E$ vì $4\gamma\|y\|_E < 1$.
 Vậy $\|x_n\|_E < 2\|y\|_E$ với mọi n . Ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\|_E &= \|B(x_n, x_n) - B(x_{n-1}, x_{n-1})\|_E \\ &\leq \|B(x_n, x_n) - B(x_n, x_{n-1})\|_E + \|B(x_n, x_{n-1}) - B(x_{n-1}, x_{n-1})\|_E \\ &\leq \gamma\|x_n\|_E\|x_n - x_{n-1}\|_E + \gamma\|x_{n-1}\|_E\|x_n - x_{n-1}\|_E \\ &= \gamma\|x_n - x_{n-1}\|_E(\|x_n\|_E + \|x_{n-1}\|_E). \end{aligned}$$

Theo chứng minh quy nạp trên ta thu được

$$\|x_n - x_{n-1}\|_E \leq 4\gamma\|y\|_E\|x_{n-1} - x_{n-2}\|_E.$$

Đặt $4\gamma\|y\|_E = k$, suy ra

$$\|x_n - x_{n-1}\|_E \leq k^n\|y\|_E.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_E &\leq \|x_n - x_{n-1}\|_E + \cdots + \|x_{m+1} - x_m\|_E \\ &\leq (k^n + k^{n-1} + \cdots + k^m)\|y\|_E \\ &\leq \frac{k^m}{1-k} \|y\|_E \longrightarrow 0 \text{ khi } m, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do đó $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ là một dãy Cauchy trong E . Ta sẽ chỉ ra rằng $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ cũng là dãy Cauchy trong F . Thật vậy, ta có

$$\|x_1 - x_0\|_F = \|B(y, y)\|_F \leq \gamma\|y\|_E\|y\|_F.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\|_F &= \|B(x_n, x_n - x_{n-1}) + B(x_n - x_{n-1}, x_{n-1})\|_F \\ &\leq \gamma\|x_n\|_E\|x_n - x_{n-1}\|_F + \gamma\|x_{n-1}\|_E\|x_n - x_{n-1}\|_F \\ &< 4\gamma\|y\|_E\|x_n - x_{n-1}\|_F, \text{ với } 4\gamma\|y\|_E < 1. \end{aligned}$$

Chúng minh tương tự như trên, ta có

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_F = 0.$$

Điều này chứng minh rằng $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ là một dãy Cauchy trong F .

Vì vậy, $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ là một dãy Cauchy trong $E \cap F$, nên dãy $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ hội tụ trong $E \cap F$ đến một phần tử $\bar{x} \in E \cap F$. Từ $\|x_n\|_E < 2\|y\|_E$ với mọi n , ta suy ra rằng $\|\bar{x}\|_E \leq 2\|y\|_E < \frac{1}{2\gamma}$.

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Các bổ đề dưới đây sẽ nghiên cứu về toán tử song tuyến tính $B(u, v)$ được xác định bởi

$$B(u, v) = A^{\frac{1}{2}} \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla v) d\tau.$$

Bổ đề 2.3. Cho $s_1, s_2, s_3, \bar{s}$ và $T \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned} -1 < s_1, s_2 \leq 1, \quad s_1 + s_2 > 0, \quad -1 < s_3 \leq s_1 + s_2 - \frac{1}{2}, \\ \max\{s_3, -\frac{1}{2}\} \leq \bar{s} < \frac{3}{2}, \quad T > 0. \end{aligned}$$

Khi đó, toán tử B là song tuyến tính từ $\mathcal{G}_{s_1, T}^1 \times \mathcal{G}_{s_2, T}^1$ vào $\mathcal{K}_{s_3, T}^{\bar{s}}$ và thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$\left\| B(u, v) \right\|_{\mathcal{K}_{s_3, T}^{\bar{s}}} \lesssim T^{\frac{s_1 + s_2 - s_3 - 1/2}{2}} \|u\|_{\mathcal{K}_{s_1, T}^1} \|v\|_{\mathcal{K}_{s_2, T}^1}. \quad (2.6)$$

Chứng minh. Cho $u \in \mathcal{K}_{s_1, T}^1$, $v \in \mathcal{K}_{s_2, T}^1$.

$$\begin{aligned} I &= \left\| A^{\frac{\bar{s}}{2}} B(u, v) \right\|_2 = \left\| \int_0^t e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla v) d\tau \right\|_{D(A^{\frac{\bar{s}+1}{2}})} \\ &\leq \int_0^t \left\| e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla v) \right\|_{D(A^{\frac{\bar{s}+1}{2}})} d\tau \\ &= \int_0^t \left\| A^{\frac{\bar{s}+1}{2}} e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla v) \right\|_2 d\tau \\ &= \int_0^t \left\| A^{\frac{\bar{s}+1/2}{2}} e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{4}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla v) \right\|_2 d\tau. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức (1.12) với $\alpha = \frac{\bar{s} + 1/2}{2}$ ta được

$$I \leq \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{\bar{s}+1/2}{2}} \left\| A^{-\frac{1}{4}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla v) \right\|_2 d\tau.$$

Áp dụng bất đẳng thức (1.10) với $\alpha = \frac{1}{4}$ và bất đẳng thức Hölder, ta được

$$I \lesssim \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{\bar{s}+1/2}{2}} \left\| u \cdot \nabla v \right\|_{\frac{3}{2}} d\tau$$

$$\leq \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\bar{s}+1/2}{2}} \|u\|_6 \|\nabla v\|_2 d\tau.$$

Từ bất đẳng thức (1.9), bất đẳng thức (1.11) và Bổ đề 2.1, ta có

$$I \lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\bar{s}+1/2}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}u\|_2 \|A^{\frac{1}{2}}v\|_2 d\tau \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{0<\xi<t} \xi^{\frac{1-s_1}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}u(\xi)\|_2 \sup_{0<\xi<t} \xi^{\frac{1-s_2}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}v(\xi)\|_2 \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{\bar{s}+1/2}{2}} \tau^{\frac{s_1+s_2}{2}-1} d\tau \\ &\lesssim t^{\frac{s_1+s_2-\bar{s}-1/2}{2}} \sup_{0<\xi<t} \xi^{\frac{1-s_1}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}u(\xi)\|_2 \sup_{0<\xi<t} \xi^{\frac{1-s_2}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}v(\xi)\|_2. \end{aligned}$$

Do đó

$$t^{\frac{\bar{s}-s_3}{2}} \left\| A^{\frac{\bar{s}}{2}} B(u, v) \right\|_2 \lesssim t^{\frac{s_1+s_2-s_3-1/2}{2}} \sup_{0<\xi<t} \xi^{\frac{1-s_1}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}u(\xi)\|_2 \sup_{0<\xi<t} \xi^{\frac{1-s_2}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}v(\xi)\|_2.$$

Đánh giá (2.6) được suy trực tiếp từ bất đẳng thức trên. Giờ ta sẽ kiểm tra điều kiện (2.4) cho toán tử song tuyến tính B . Thật vậy, ta có

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{\bar{s}-s_3}{2}} \left\| A^{\frac{\bar{s}}{2}} B(u, v) \right\|_2 = 0,$$

trong đó

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1-s_1}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|_2 = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1-s_2}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}v(t)\|_2 = 0.$$

Vậy, $t^{\frac{\bar{s}-s_3}{2}} A^{\frac{\bar{s}}{2}} B(u, v)$ liên tục tại $t = 0$. Tính liên tục tại các điểm còn lại được suy ra một cách tương tự bằng cách viết lại biểu thức $\int_0^{t+\varepsilon} - \int_0^t$. $\square$

Bổ đề 2.4. Cho p và $s \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2} \leq s < 1, \quad \frac{2}{1+s} < p < \infty.$$

Khi đó, toán tử B là toán tử song tuyến tính từ

$$\left(\mathcal{G}_{s,T}^1 \cap L^p([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}})) \right) \times \left(\mathcal{G}_{s,T}^1 \cap L^p([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}})) \right) \text{ đến } L^p([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}}))$$

và thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$\left\| B(u, v) \right\|_{L^p([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}}))} \lesssim T^{\frac{s-1/2}{2}} \|u\|_{\mathcal{K}_{s,T}^1} \|v\|_{L^p([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}}))}$$

và

$$\left\| B(u, v) \right\|_{L^p([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}}))} \lesssim T^{\frac{s-1/2}{2}} \|v\|_{\mathcal{K}_{s,T}^1} \|u\|_{L^p([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}}))}.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức (2.7) với $\bar{s} = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \left\| A^{\frac{1}{2}} B(u, v) \right\|_2 &\lesssim \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{3}{4}} \|A^{\frac{1}{2}} u(\tau)\|_2 \|A^{\frac{1}{2}} v(\tau)\|_2 d\tau \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{K}_{s,T}^1} \int_0^t (t - \tau)^{-\frac{3}{4}} \tau^{-\frac{1-s}{2}} \|A^{\frac{1}{2}} v(\tau)\|_2 d\tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Từ bất đẳng thức (2.8), áp dụng các bất đẳng thức (1.5) và (1.4), ta thu được

$$\begin{aligned} \left\| \left\| A^{\frac{1}{2}} B(u, v) \right\|_2 \right\|_{L^p([0,T])} &= \left\| \left\| A^{\frac{1}{2}} B(u, v) \right\|_2 \right\|_{L^{p,p}([0,T])} \\ &\lesssim \|u\|_{\mathcal{K}_{s,T}^1} \left\| | \cdot |^{-\frac{3}{4}} \right\|_{L^{\frac{2}{1+s}, \infty}} \left\| | \cdot |^{-\frac{1-s}{2}} \|A^{\frac{1}{2}} v(\cdot)\|_2 \right\|_{L^{\frac{1}{\frac{1-s}{2} + \frac{1}{p}}}, p}([0,T]) \\ &\lesssim T^{\frac{s-1/2}{2}} \|u\|_{\mathcal{K}_{s,T}^1} \left\| | \cdot |^{-\frac{1-s}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{1-s}, \infty}} \left\| \|A^{\frac{1}{2}} v(\cdot)\|_2 \right\|_{L^{p,p}([0,T])} \\ &\lesssim T^{\frac{s-1/2}{2}} \|u\|_{\mathcal{K}_{s,T}^1} \|v\|_{L^p([0,T]; D(A^{\frac{1}{2}}))}, \end{aligned}$$

trong đó $1_{[0,T]}$ là hàm chỉ thị của tập $[0, T]$ trên $\mathbb{R}$ và chú ý rằng

$$\left\| 1_{[0,T]} | \cdot |^{-\alpha} \right\|_{L^{p,\infty}} = CT^{\frac{1}{p}-\alpha}$$

với $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p \leq \frac{1}{\alpha}$ và C là hằng số dương không phụ thuộc vào T .

Bằng lập luận tương tự, ta có ước lượng sau

$$\left\| \left\| A^{\frac{1}{2}} B(u, v) \right\|_2 \right\|_{L^p([0,T])} \lesssim T^{\frac{s-1/2}{2}} \|v\|_{\mathcal{K}_{s,T}^1} \|u\|_{L^p([0,T]; D(A^{\frac{1}{2}}))}.$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 2.5. *Cho*

$$E = \mathcal{K}_{\frac{1}{2},T}^1, \quad F = \mathcal{G}_{\frac{1}{2},T}^1 \cap \mathcal{G}_{0,T}^1,$$

trong đó $0 < T \leq \infty$. Không gian F được xác định bởi chuẩn

$$\|u\|_F := \|u\|_{\mathcal{K}_{\frac{1}{2},T}^1} + \|u\|_{\mathcal{K}_{0,T}^1} + \|u\|_{L^4([0,T]; D(A^{\frac{1}{2}}))} + \|u\|_{L^\infty([0,T]; L_\sigma^2(\Omega))}.$$

Khi đó, toán tử B là song tuyến tính từ $F \times F$ vào F thỏa mãn

$$\|B(u, v)\|_E \leq \eta \|u\|_E \|v\|_E, \quad \forall u, v \in F, \quad (2.9)$$

$$\|B(u, v)\|_F \leq \eta \|u\|_E \|v\|_F, \quad \forall u, v \in F, \quad (2.10)$$

$$\|B(u, v)\|_F \leq \eta \|u\|_F \|v\|_E, \quad \forall u, v \in F, \quad (2.11)$$

trong đó η là hằng số dương không phụ thuộc vào T .

Chứng minh. Ước lượng (2.9) được suy trực tiếp từ việc áp dụng Bổ đề 2.3 với $s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{2}$, $\bar{s} = 1$.

Áp dụng Bổ đề 2.3 với $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = s_3 = \bar{s} = 0$, ta có

$$\|B(u, v)\|_{L^\infty([0, T]; L^2_\sigma(\Omega))} = \|B(u, v)\|_{\mathcal{K}_{0, T}^0} \lesssim \|u\|_E \|v\|_{\mathcal{K}_{0, T}^1}. \quad (2.12)$$

Từ Bổ đề 2.3 với $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = s_3 = 0$ và $\bar{s} = 1$, ta có

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{K}_{0, T}^1} \lesssim \|u\|_{\mathcal{K}_{\frac{1}{2}, T}^1} \|v\|_{\mathcal{K}_{0, T}^1} = \|u\|_E \|v\|_{\mathcal{K}_{0, T}^1}. \quad (2.13)$$

Cuối cùng, áp dụng Bổ đề 2.4 với $p = 4$, $s = \frac{1}{2}$, ta có

$$\|B(u, v)\|_{L^4([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}}))} \lesssim \|u\|_E \|v\|_{L^4([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}}))}. \quad (2.14)$$

Ước lượng (2.10) được suy ra từ các bất đẳng thức (2.9), (2.12), (2.13) và (2.14). Bằng lập luận chứng minh tương tự, ta được (2.11). $\square$

Bổ đề 2.6.

- a) Nếu $u_0 \in D(A^{\frac{s}{2}})$, $0 \leq s < 1$ thì $e^{-tA}u_0 \in \mathcal{K}_{s, \infty}^1$.
- b) Nếu $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ thì $e^{-tA}u_0 \in F$.

Chứng minh. a) Áp dụng bất đẳng thức (1.12), ta có

$$\begin{aligned} t^{\frac{1-s}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u_0 \right\|_2 &= t^{\frac{1-s}{2}} \left\| A^{\frac{1-s}{2}} e^{-tA} A^{\frac{s}{2}} u_0 \right\|_2 \\ &\leq t^{\frac{1-s}{2}} t^{\frac{s-1}{2}} \left\| A^{\frac{s}{2}} u_0 \right\|_2 = \left\| A^{\frac{s}{2}} u_0 \right\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh điều kiện (2.4). Do $C_{0, \sigma}^\infty(\Omega)$ trù mật trong $D(A^{\frac{s}{2}})$, nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một hàm $u_\varepsilon \in C_{0, \sigma}^\infty(\Omega) \subseteq D(A^{\frac{1}{2}})$ sao cho

$$\left\| A^{\frac{s}{2}} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} t^{\frac{1-s}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u_0 \right\|_2 &\leq t^{\frac{1-s}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_2 + t^{\frac{1-s}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u_\varepsilon \right\|_2 \\ &\leq \left\| A^{\frac{s}{2}} (u_\varepsilon - u_0) \right\|_2 + t^{\frac{1-s}{2}} \left\| e^{-tA} A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \right\|_2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + t^{\frac{1-s}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \right\|_2. \end{aligned}$$

Ta có thể chọn $t_0(\varepsilon) = t_0(u_\varepsilon)$ đủ nhỏ sao cho

$$t^{\frac{1-s}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \right\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{với mọi } t < t_0(\varepsilon).$$

Do đó,

$$t^{\frac{1-s}{2}} \left\| A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u_0 \right\|_2 < \varepsilon \quad \text{với mọi } t < t_0(\varepsilon).$$

b) Từ bất đẳng thức (1.12), suy ra

$$\|e^{-tA} u_0\|_2 \leq \|u_0\|_2.$$

Vì vậy, $e^{-tA} u_0 \in L^\infty([0, T]; L^2(\Omega))$. Từ bất đẳng thức (1.13), ta có

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u_0 \right\|_{2,4,\infty} = \left\| A^{\frac{1}{4}} e^{-tA} A^{\frac{1}{4}} u_0 \right\|_{2,4,\infty} \leq \|A^{\frac{1}{4}} u_0\|_2 < \infty.$$

Do đó, $e^{-tA} u_0 \in L^4([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}}))$. Áp dụng phần a) của Bổ đề này cho $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}}) \subset L^2_\sigma(\Omega)$, ta được $e^{-tA} u_0 \in \mathcal{K}_{\frac{1}{2},T}^1 \cap \mathcal{K}_{0,T}^1$, vậy $e^{-tA} u_0 \in F$.

Bổ đề được chứng minh. $\square$

2.1.3 Tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

Trong phần này, chúng tôi trình bày hai kết quả về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Kết quả đầu tiên mở rộng kết quả của nhóm các tác giả R. Farwig, H. Kozono, H. Sohr [25] năm 2010 với Ω là miền bị chặn và mở rộng kết quả của R. Farwig, P. F. Riechwald [28] năm 2016 với miền tổng quát nhưng biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 . Để chứng minh kết quả chính ta cần định lý về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương và nghiệm mạnh toàn cục trong miền tổng quát sau đây.

Định lý 2.1. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát.*

a) *Khi đó, tồn tại hằng số dương D sao cho với mọi giá trị $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $0 < T \leq \infty$ thỏa mãn*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{4}} \left\| A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u_0 \right\|_2 < D \quad (2.15)$$

hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) có nghiệm mạnh u trong khoảng $[0, T)$ với các tính chất sau:

$$u \in L^4([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}})) \quad (2.16)$$

và

$$(1+t)^{\frac{1}{4}}u \in BC([0, T]; D(A^{\frac{1}{4}})). \quad (2.17)$$

Đặc biệt, với $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ bất kỳ, luôn tồn tại $T = T(u_0)$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức (2.15) đúng.

b) Cho $u_0 \in D(A^{\frac{s}{2}})$, $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$. Khi đó, bất đẳng thức (2.15) đúng nếu

$$T^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \|A^{\frac{s}{2}}u_0\|_2 < D. \quad (2.18)$$

Chứng minh. a) Từ Bổ đề 2.2, Bổ đề 2.5 và Bổ đề 2.6 b), ta suy ra tồn tại hằng số $D > 0$ sao cho nếu

$$\|e^{-tA}u_0\|_E = \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{2}}e^{-tA}u_0\|_2 < D,$$

thì phương trình tích phân (2.2) có nghiệm duy nhất u trong khoảng $(0, T)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} u &\in F \subseteq L^\infty([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^4([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}})) \\ &\subseteq L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L_{\text{loc}}^2([0, T]; W_{0,\sigma}^{1,2}(\Omega)) \end{aligned}$$

và u là nghiệm phương trình tích phân (2.2), nghĩa là u là nghiệm yếu của hệ (1.14). Do

$$u \in L^4([0, T]; D(A^{\frac{1}{2}})) \subseteq L^4([0, T]; L^6(\Omega)),$$

suy ra nghiệm yếu u thỏa mãn điều kiện Serrin, do đó u là nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14).

Áp dụng Bổ đề 2.3 với $s_1 = s_2 = s_3 = \bar{s} = \frac{1}{2}$, ta có

$$\sup_{0 < t < T} \|A^{\frac{1}{4}}B(u, u)\|_2 = \|B(u, u)\|_{\mathcal{K}_{\frac{1}{2}, T}^{\frac{1}{2}}} \lesssim \|u\|_{\mathcal{K}_{\frac{1}{2}, T}^1}^2 < \infty,$$

và

$$\sup_{0 < t < \infty} \|A^{\frac{1}{4}}e^{-tA}u_0\|_2 = \sup_{0 \leq t < \infty} \|e^{-tA}A^{\frac{1}{4}}u_0\|_2 \leq \|A^{\frac{1}{4}}u_0\|_2 < \infty.$$

Từ các ước lượng trên, suy ra

$$\sup_{0 < t < T} \|A^{\frac{1}{4}}u(t)\|_2 = \sup_{0 < t < T} \|A^{\frac{1}{4}}(e^{-tA}u_0 - B(u, u))\|_2$$

$$\leq \sup_{0 < t < T} \|A^{\frac{1}{4}} e^{-tA} u_0\|_2 + \sup_{0 < t < T} \|A^{\frac{1}{4}} B(u, u)\|_2 < \infty. \quad (2.19)$$

Áp dụng Bổ đề 2.3 với $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = s_3 = 0$ và $\bar{s} = \frac{1}{2}$, ta được

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{4}} B(u, u)\|_2 = \|B(u, v)\|_{\mathcal{K}_{0,T}^{\frac{1}{2}}} \lesssim \|u\|_{\mathcal{K}_{\frac{1}{2},T}^1} \|u\|_{\mathcal{K}_{0,T}^1} < \infty.$$

Từ ước lượng (1.12), suy ra

$$\sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{4}} e^{-tA} u_0\|_2 \leq \|u_0\|_2 < \infty.$$

Từ các ước lượng trên, ta thu được

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{4}} u(t)\|_2 &= \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{4}} (e^{-tA} u_0 - B(u, u))\|_2 \\ &\leq \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{4}} e^{-tA} u_0\|_2 + \sup_{0 < t < T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{4}} B(u, u)\|_2 < \infty. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Tính chất (2.17) được suy ra từ các bất đẳng thức (2.19) và (2.20). Giờ ta sẽ chứng minh điều kiện (2.15) đúng khi T đủ nhỏ. Thật vậy, từ định nghĩa của không gian $\mathcal{K}_{\bar{s},T}^{\bar{s}}$, ta suy ra rằng vế trái của bất đẳng thức (2.15) hội tụ về 0 khi T dần đến 0. Vì vậy, điều kiện (2.15) luôn đúng với $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ bất kỳ khi $T = T(u_0)$ đủ nhỏ.

b) Ta sẽ đánh giá vế trái của bất đẳng thức (2.15). Từ ước lượng (1.12), với $u_0 \in D(A^{\frac{s}{2}})$, ta có

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u_0\|_2 &= \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1-s}{2}} e^{-tA} A^{\frac{s}{2}} u_0\|_2 \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \|A^{\frac{s}{2}} u_0\|_2 = T^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \|A^{\frac{s}{2}} u_0\|_2. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Từ điều kiện về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương và nghiệm mạnh toàn cục của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát trên ta thu được kết quả chính như sau.

Định lý 2.2. *Giả sử Ω là miền tổng quát trong $\mathbb{R}^3$ và u là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh*

(2.3) trong khoảng $(0, T)$. Khi đó, nếu tồn tại hằng số dương C sao cho tại $t_0 \in (0, T)$ động năng thỏa mãn bất đẳng thức

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t_0 - \delta)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \right|}{\delta^{\frac{1}{2}}} < C, \quad (2.21)$$

thì u chính quy tại t_0 .

Nhận xét 2.1. Trong những năm gần đây, các tác giả trong và ngoài nước đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm mạnh toàn cục và nghiệm mạnh địa phương của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền không bị chặn. Cụ thể, với Ω là cả không gian $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, xem [12, 44, 45, 46, 47, 48, 50]; với Ω là nửa không gian n chiều $\mathbb{R}_+^d$, $d \geq 2$, xem [32, 38, 72]; với Ω là một miền không bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ với biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^3 , xem [52]; và với Ω là miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, xem [53]. H. Sohr [68] đã chỉ ra rằng tồn tại hằng số dương D sao cho với mọi giá trị $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $0 < T \leq \infty$ thỏa mãn ước lượng

$$\left\| (I - e^{-2TA}) A^{\frac{1}{4}} u_0 \right\|_2^{\frac{1}{8}} \left\| A^{\frac{1}{4}} u_0 \right\|_2^{\frac{7}{8}} < D, \quad (2.22)$$

hệ phương trình Navier-Stokes có một nghiệm mạnh $u \in L^8(0, T; L^4(\Omega))$. R. Farwig và H. Sohr [26] đã cải tiến kết quả trong [68], trong đó điều kiện (2.22) được thay bởi điều kiện yếu hơn

$$\left(\int_0^T \|e^{-tA} u_0\|_4^8 d\tau \right)^{\frac{1}{8}} < D.$$

Nếu $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ thì ta có thể ước lượng vế trái của điều kiện trên bởi các bất đẳng thức (1.9), (1.12) và bất đẳng thức nội suy

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T \|e^{-tA} u_0\|_4^8 d\tau \right)^{\frac{1}{8}} &\lesssim \left(\int_0^T \|A^{\frac{3}{8}} e^{-tA} u_0\|_2^8 d\tau \right)^{\frac{1}{8}} = \left(\int_0^T \|e^{-tA} A^{\frac{3}{8}} u_0\|_2^8 d\tau \right)^{\frac{1}{8}} \\ &\leq \left(\int_0^T \|A^{\frac{3}{8}} u_0\|_2^8 d\tau \right)^{\frac{1}{8}} = T^{\frac{1}{8}} \|A^{\frac{3}{8}} u_0\|_2 \leq T^{\frac{1}{8}} \|A^{\frac{1}{2}} u_0\|_2^{\frac{3}{4}} \|u_0\|_2^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Suy ra hệ phương trình Navier-Stokes có nghiệm mạnh $u \in L^8(0, T; L^4(\Omega))$ với giá trị ban đầu $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ sao cho

$$T^{\frac{1}{8}} \left\| A^{\frac{1}{2}} u_0 \right\|_2^{\frac{3}{4}} \|u_0\|_2^{\frac{1}{4}} < D.$$

Nếu sử dụng tính chất trên để chứng minh Định lý 2.2 thì ta phải thay điều kiện (2.21) bởi điều kiện mạnh hơn sau đây

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t_0 - \delta)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \right|}{\delta^{\frac{2}{3}}} < C.$$

Điều kiện trên rõ ràng chưa phải điều kiện tối ưu. Vì vậy, để chứng minh Định lý 2.2 với điều kiện tối ưu (2.21) ta cần chứng minh tồn tại hằng số dương D sao cho với mọi giá trị $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ và $T > 0$ thỏa mãn

$$T^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{2}} u_0\|_2 < D,$$

hệ phương trình Navier-Stokes có một nghiệm mạnh trong khoảng $[0, T)$. Điều này được suy ra từ Định lý 2.1 b) khi $s = 1$.

Cụ thể, ta có phần chứng minh kết quả chính trong Định lý 2.2 dưới đây.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể chọn $C = D^2$, trong đó D là hằng số trong Định lý 2.1. Do u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh (2.3) và bất đẳng thức (2.21), suy ra tồn tại $\delta_0 > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\delta_0^{-\frac{1}{2}} \int_{t_0 - \delta_0}^{t_0} \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t_0 - \delta_0)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \right|}{\delta_0^{\frac{1}{2}}} < D^2$$

và tồn tại tập $N \subset (0, T)$ có độ đo không sao cho với mỗi $t' \in (0, T) \setminus N$ bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 + \int_{t'}^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u(t')\|_2^2, \text{ với mọi } t \geq t'. \quad (2.23)$$

Mặt khác, tồn tại $t' \in (t_0 - \delta_0, t_0) \setminus N$ sao cho

$$\delta_0^{\frac{1}{2}} \|\nabla u(t')\|_2^2 \leq \delta_0^{-\frac{1}{2}} \int_{t_0 - \delta_0}^{t_0} \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau < D^2.$$

Do đó,

$$\delta_0^{\frac{1}{4}} \left\| A^{\frac{1}{2}} u(t') \right\|_2 = \delta_0^{\frac{1}{4}} \|\nabla u(t')\|_2 < D. \quad (2.24)$$

Từ bất đẳng thức (2.24), áp dụng Định lý 2.1 b) với $s = 1$ ta được nghiệm mạnh v của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) với giá trị ban đầu $u(t')$ trong khoảng $[0, \delta_0]$ thỏa mãn điều kiện Serrin $v \in L^4([0, \delta_0); L^6(\Omega))$. Từ

bất đẳng thức (2.23), suy ra $u(t + t')$ là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) với giá trị ban đầu $u(t')$ trong khoảng $[0, \delta_0]$. Sử dụng tiêu chuẩn duy nhất của Serrin, xem [66, 68], ta thu được $u(t) = v(t - t')$ trên $[t', t' + \delta_0)$, vì vậy u thuộc lớp Serrin $L^4([t', t' + \delta_0); L^6(\Omega))$, hay u chính quy tại $t_0 \in (t', t' + \delta_0)$. $\square$

Kết quả thứ hai trong phần này của chúng tôi chứng minh rằng nếu $u(t) \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|A^{\frac{1}{4}}(u(t - \delta) - u(t))\|_2 < C$ với mọi $t \in [0, T)$, với C là hằng số dương đủ nhỏ thì u là chính quy trong $[0, T)$. Phần chứng minh sử dụng lý thuyết về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương và tính duy nhất nghiệm trong miền tổng quát.

Định lý 2.3. *Cho $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát. Khi đó, tồn tại hằng số dương C sao cho nếu u là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) trong $(0, T)$ thỏa mãn $u(t) \in D(A^{\frac{1}{4}})$ với mọi $t \in [0, T)$ và*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|A^{\frac{1}{4}}(u(t - \delta) - u(t))\|_2 < C \quad \text{với mọi } t \in (0, T) \quad (2.25)$$

thì $u \in L^4_{\text{loc}}([0, T); L^6(\Omega))$.

Nhận xét 2.2. Trong Định lý 2.3, nếu hàm u liên tục trái từ $[0, T)$ đến $D(A^{\frac{1}{4}})$ thì $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|A^{\frac{1}{4}}(u(t - \delta) - u(t))\|_2 = 0$ với mọi $t \in [0, T)$. Vì vậy, điều kiện (2.25) là đúng.

Với Ω là miền tổng quát thì khẳng định trong Định lý 2.3 là mạnh hơn khẳng định của R. Farwig, H. Sohr và W. Varnhorn [27] nhưng điều kiện ban đầu (2.25) không yếu hơn điều kiện trong [27]. Thật vậy, giả sử $u(t, x) = f(t)a(x)$, trong đó $a \in D(A^{\frac{1}{4}})$, $\|a\|_{D(A^{\frac{1}{4}})} > 0$ và $f(t) = 0$ với $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = \frac{1}{t-1}$ với $1 < t < \infty$. Khi đó, u liên tục trái từ $[0, \infty)$ đến $D(A^{\frac{1}{4}})$, vì vậy u thỏa mãn điều kiện (2.25) nhưng u không thuộc không gian $L^\infty_{\text{loc}}([0, \infty), D(A^{\frac{1}{4}}))$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể chọn $C = D$, trong đó D là hằng số trong Định lý 2.1. Áp dụng Định lý 2.1, tồn tại nghiệm mạnh v của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) với giá trị ban đầu u_0 trong khoảng $(0, T')$, trong đó $0 < T' < T$ sao cho $v \in L^4([0, T'); L^6(\Omega))$. Sử dụng tiêu

chuẩn duy nhất của Serrin, ta được $u = v$ trong $[0, T']$, vì vậy u thuộc lớp Serrin $L^4([0, T']; L^6(\Omega))$. Đặt

$$T^* = \sup\{T' > 0 : u \in L^4([0, T']; L^6(\Omega))\}.$$

Khi đó, $0 < T^* \leq T$ và $u \in L^4_{\text{loc}}([0, T^*]; L^6(\Omega))$, ta chỉ cần chứng minh rằng $T^* = T$. Giả sử rằng $T^* < T$, do $u \in L^4_{\text{loc}}([0, T^*]; L^6(\Omega))$, suy ra đẳng thức

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 + \int_{t_0}^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau = \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2$$

đúng với $0 \leq t_0 < T^*$, $t_0 \leq t < T^*$.

Từ bất đẳng thức (1.17) và đẳng thức trên, ta suy ra bất đẳng thức

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 + \int_{t_0}^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \quad (2.26)$$

thỏa mãn với mọi $0 \leq t_0 < T^*$, $t_0 \leq t \leq T$. Từ Bổ đề 2.6 a), suy ra $u(T^*) \in \mathcal{K}_{1/2, \infty}^1$ và tồn tại $\delta_1 > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\sup_{0 < t < \delta_1} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u(T^*)\|_2 < \frac{1}{2} \left(D - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|A^{\frac{1}{4}}(u(T^* - \delta) - u(T^*))\|_2 \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức (2.25) với $C = D$, suy ra tồn tại một số dương $\delta_2 \leq \frac{\delta_1}{2}$ đủ nhỏ sao cho

$$\|A^{\frac{1}{4}}(u(T^* - \delta_2) - u(T^*))\|_2 < \frac{1}{2} \left(\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|A^{\frac{1}{4}}(u(T^* - \delta) - u(T^*))\|_2 + D \right).$$

Từ hai bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t < 2\delta_2} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u(T^* - \delta_2)\|_2 \\ & \leq \sup_{0 < t < 2\delta_2} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} (u(T^* - \delta_2) - u(T^*))\|_2 + \sup_{0 < t < 2\delta_2} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u(T^*)\|_2 \\ & \leq \|A^{\frac{1}{4}}(u(T^* - \delta_2) - u(T^*))\|_2 + \sup_{0 < t < \delta_1} t^{\frac{1}{4}} \|A^{\frac{1}{2}} e^{-tA} u(T^*)\|_2 < D. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 2.1, suy ra tồn tại nghiệm mạnh v của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) với giá trị ban đầu $u(T^* - \delta_2)$ trong khoảng $[0, 2\delta_2]$ sao cho nghiệm v thỏa mãn điều kiện

$$v \in L^4([0, 2\delta_2]; D(A^{\frac{1}{2}})) \subset L^4([0, 2\delta_2]; L^6(\Omega)).$$

Từ bất đẳng thức (2.26), ta được $u(t+T^*-\delta_2)$ là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) trong $[0, T-T^*+\delta_2)$ với giá trị ban đầu $u(T^*-\delta_2)$. Sử dụng tiêu chuẩn duy nhất của Serrin, ta thu được $u(t) = v(t-T^*+\delta_2)$ với $t \in [T^*-\delta_2, T^*+\delta_2]$, và $u \in L^4([0, T^*+\delta_2]; L^6(\Omega))$, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó, u thuộc không gian $L^4_{\text{loc}}([0, T]; L^6(\Omega))$. $\square$

2.2. Dạng điều kiện cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

Phần thứ hai của chương, chúng tôi nghiên cứu về dạng điều kiện cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ với chuẩn trong $L^2(\Omega)$.

2.2.1 Các tính chất của toán tử Stokes trong miền tổng quát

Xét bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) trong miền tổng quát như sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0, x) = u_0. \end{cases}$$

Ta xây dựng công thức của nghiệm yếu dưới dạng phương trình tích phân

$$u(t) = e^{-tA}u_0 - \int_0^t A^{\frac{1}{2}}e^{-(t-\tau)A}A^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}(u \cdot \nabla u)d\tau. \quad (2.27)$$

Ta thấy

$$u \in L^\infty(0, T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2_{\text{loc}}([0, T]; W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega))$$

là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) nếu và chỉ nếu u thỏa mãn phương trình tích phân (2.27), xem [68]. Để chứng minh các định lý chính ta cần các bổ đề sau.

Bổ đề 2.7. *Giả sử $u \in L^2(\Omega)$ và $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Khi đó*

$$\left\| e^{-tA}\mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \right\|_2 \lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \|u\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{5}{2}-\beta}$$

trong đó β là hằng số dương sao cho $\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{2}$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức (1.12) với $\alpha = \frac{\beta}{2}$, ta được

$$\left\| e^{-tA} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \right\|_2 = \left\| A^{\frac{\beta}{2}} e^{-tA} A^{-\frac{\beta}{2}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \right\|_2 \leq t^{-\frac{\beta}{2}} \left\| A^{-\frac{\beta}{2}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \right\|_2.$$

Do tồn tại $1 < q \leq 2$ thỏa mãn $\beta + \frac{3}{2} = \frac{3}{q}$ nên áp dụng bất đẳng thức (1.10) với $\alpha = \frac{\beta}{2}$ ta suy ra

$$\left\| e^{-tA} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \right\|_2 \lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \|u \cdot \nabla u\|_q.$$

Xét bất đẳng thức Hölder ta có: $\|u \cdot \nabla u\|_q \leq \|u\|_r \|\nabla u\|_2$ trong đó q, r thỏa mãn $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}$. Mà $\frac{1}{q} = \frac{\beta}{3} + \frac{1}{2}$ nên suy ra $r = \frac{3}{\beta}$, nghĩa là

$$t^{-\frac{\beta}{2}} \|u \cdot \nabla u\|_q \lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \|u\|_{\frac{3}{\beta}} \|\nabla u\|_2.$$

Áp dụng bất đẳng thức nội suy, ta thu được

$$\left\| e^{-tA} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \right\|_2 \lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \|u\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{3}{2}-\beta} \|\nabla u\|_2 \lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \|u\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{5}{2}-\beta}.$$

Bỏ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.8. [52] *Tồn tại một hằng số dương δ sao cho nếu $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $\|A^{\frac{1}{4}} u_0\|_2 \leq \delta$ thì hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) có một nghiệm mạnh với giá trị ban đầu u_0 thỏa mãn $\|\nabla u(t)\|_2 \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$ với mọi $t \geq 0$.*

Bổ đề 2.9. *Giả sử u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) với giá trị ban đầu $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$. Khi đó, tồn tại giá trị t_0 đủ lớn sao cho $\|\nabla u(t)\|_2 \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$ với mọi $t \geq t_0$.*

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} \left\| A^{\frac{1}{4}} u \right\|_2^2 &= \int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{2}} d\|E_\lambda u\|_2^2 \\ &\leq \left(\int_0^\infty \lambda d\|E_\lambda u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty d\|E_\lambda u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|A^{\frac{1}{2}} u\|_2 \|u\|_2. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Xét nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes(1.14) thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2 + \int_{t_0}^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \quad (2.29)$$

với mọi $t \in [0, \infty) \setminus N$ với N là một tập có độ đo không.

Lấy δ là một hằng số dương trong Bổ đề 2.8. Từ (2.28) và (2.29), suy ra tồn tại $t_0 \in [0, \infty) \setminus N$ đủ lớn sao cho

$$\|u(t_0)\|_{D(A^{\frac{1}{4}})} \leq \delta.$$

Kết hợp Bổ đề 2.8, bất đẳng thức (2.29) và điều kiện duy nhất của Serrin [66, 68], ta thu được

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \lesssim t^{-\frac{1}{2}} \text{ với mọi } t \geq t_0.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.10. *Giả sử $u_0 \in L_\sigma^2(\Omega)$. Khi đó*

a) $\|e^{-tA}u_0\|_2 \rightarrow 0$ khi $t \rightarrow \infty$.

b) Nếu $u_0 \in L_\sigma^2(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ với $1 < q \leq 2$ thì

$$\|e^{-tA}u_0\|_2 = o\left(t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\right) \text{ khi } t \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Chứng minh.

a) Xem Bổ đề 1.5.1 trong [68], trang 204.

b) Áp dụng bất đẳng thức (1.12), ta được

$$\begin{aligned} \|e^{-tA}u_0\|_2 &= \|e^{\frac{-tA}{2}}e^{\frac{-tA}{2}}u_0\|_2 \\ &= \left\| A^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} e^{\frac{-tA}{2}} e^{\frac{-tA}{2}} A^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} u_0 \right\|_2 \\ &\lesssim t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} \|e^{\frac{-tA}{2}} A^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} u_0\|_2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Mặt khác, từ bất đẳng thức (1.10), ta có

$$A^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)} u_0 \in L_\sigma^2(\Omega) \quad (2.32)$$

Từ Bổ đề 2.10 a), (2.31) và (2.32) ta suy ra

$$\|e^{-tA}u_0\|_2 = o\left(t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\right) \text{ khi } t \rightarrow \infty.$$

Bổ đề được chứng minh. □

2.2.2 Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

Kết quả đầu tiên của chúng tôi chứng minh rằng nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) với chuẩn trong $L^2(\Omega)$ có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với cùng giá trị ban đầu và số mũ hội tụ nhỏ hơn $\frac{3}{4}$. Kết quả này mở rộng kết quả của W. Borchers và T. Miyakawa với số mũ hội tụ $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ trong [5]. Nội dung kết quả chính như sau.

Định lý 2.4. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát, $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh (2.3). Khi đó*

- a) *Nếu $\|e^{-tA}u_0\|_2 = O(t^{-\alpha})$ với $0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$ thì $\|u(t)\|_2 = O(t^{-\alpha})$ khi $t \rightarrow \infty$.*
- b) *Nếu $\|e^{-tA}u_0\|_2 = o(t^{-\alpha})$ với $0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$ thì $\|u(t)\|_2 = o(t^{-\alpha})$ khi $t \rightarrow \infty$.*

Chứng minh. a) Xét nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14), khi đó u thỏa mãn phương trình tích phân

$$u(t) = e^{-tA}u_0 - \int_0^t e^{-(t-s)A} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) ds. \quad (2.33)$$

Từ Bổ đề 2.7, ta có

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 &\lesssim \|e^{-tA}u_0\|_2 \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta}{2}} \|u(s)\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^{\frac{5}{2}-\beta} ds \end{aligned}$$

với mọi $\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{2}$. Ta chia tích phân trên thành hai phần như sau

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t (t-s)^{-\frac{\beta}{2}} \|u(s)\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^{\frac{5}{2}-\beta} ds \\ &= \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{\beta}{2}} \|u(s)\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^{\frac{5}{2}-\beta} ds \\ &\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{\beta}{2}} \|u(s)\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^{\frac{5}{2}-\beta} ds \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Ta xét ba trường hợp:

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2}, \text{ và } \frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4}.$$

Trường hợp 1: $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$.

Áp dụng bất đẳng thức năng lượng và bất đẳng thức Hölder, ta được

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim \|u_0\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\beta}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^{\frac{5}{2}-\beta} ds \\ &\lesssim \|u_0\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\beta}{2}} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} ds \right)^{\frac{2\beta-1}{4}} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{5-2\beta}{4}} \\ &\lesssim \|u_0\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\beta}{2}} \left(\frac{t}{2} \right)^{\frac{2\beta-1}{4}} \|u_0\|_2^{\frac{5-2\beta}{4}} = O(t^{-\frac{1}{4}}). \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 2.9 và Bổ đề 2.1 b), ta có

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \|u_0\|_2^{\beta-\frac{1}{2}} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{\beta}{2}} s^{-\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-\beta)} ds \\ &= O(t^{-\frac{1}{4}}) \text{ với } t \geq 2t_0 \end{aligned}$$

trong đó t_0 là hằng số trong Bổ đề 2.9. Ta suy ra

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 &\lesssim \|e^{-tA}u_0\|_2 + I \leq O(t^{-\alpha}) + O(t^{-\frac{1}{4}}) \\ &= O(t^{-\alpha}) \text{ khi } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $\frac{1}{4} \leq \alpha < \frac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức trên với $\alpha = -\frac{1}{4}$ và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (s^{-\frac{1}{4}})^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^{\frac{5}{2}-\beta} ds \\ &\lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \right)^{\frac{2\beta-1}{4}} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{5-2\beta}{4}} \\ &\lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \left(t^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{2\beta-1}{4}} = O(t^{-\frac{\beta}{4}-\frac{1}{8}}). \end{aligned}$$

Mặt khác, từ Bổ đề 2.9 và Bổ đề 2.1 b), ta có

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{\beta}{2}} (s^{-\frac{1}{4}})^{\beta-\frac{1}{2}} (s^{-\frac{1}{2}})^{\frac{5}{2}-\beta} ds \\ &\lesssim \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{\beta}{2}} s^{\frac{1}{8}-\frac{\beta}{4}} s^{\frac{\beta}{2}-\frac{5}{4}} ds \\ &= O(t^{-\frac{\beta}{4}-\frac{1}{8}}) \text{ với } t \geq 2t_0. \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 &\lesssim \|e^{-tA}u_0\|_2 + I \\ &\leq O(t^{-\alpha}) + O(t^{-\frac{\beta}{4}-\frac{1}{8}}) \text{ với } t \geq 2t_0. \end{aligned}$$

Ta thấy rằng, luôn tồn tại số β sao cho

$$\frac{\beta}{4} + \frac{1}{8} \geq \alpha \text{ và } \frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{2}.$$

Vì vậy, chọn một số β như trên, ta được

$$\|u(t)\|_2 = O(t^{-\alpha}) \text{ khi } t \rightarrow \infty.$$

Trường hợp 3: $\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{3}{4}$.

Áp dụng trường hợp 2 phần a), ta có

$$\|u(t)\|_2 \lesssim t^{-\gamma} \text{ với } t \geq 0, \quad (2.34)$$

trong đó γ là một hằng số thỏa mãn $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức (2.34) và bất đẳng thức Hölder, ta được

$$\begin{aligned} I_1 &\lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (s^{-\gamma})^{\beta-\frac{1}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^{\frac{5}{2}-\beta} ds \\ &\lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} s^{-2\gamma} ds \right)^{\frac{2\beta-1}{4}} \left(\int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla u(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{5-2\beta}{4}} \\ &\lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} (t^{-2\gamma+1})^{\frac{2\beta-1}{4}} = O(t^{\frac{\gamma}{2}-\gamma\beta-\frac{1}{4}}). \end{aligned}$$

Hơn nữa, từ Bổ đề 2.9 và Bổ đề 2.1 b), ta có

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{\beta}{2}} (s^{-\gamma})^{\beta-\frac{1}{2}} (s^{-\frac{1}{2}})^{\frac{5}{2}-\beta} ds \\ &\lesssim t^{-\frac{\beta}{2}-\gamma(\beta-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(\frac{5}{2}-\beta)+1} \int_{\frac{t}{2}}^t (1-s)^{-\frac{\beta}{2}} s^{-\gamma(\beta-\frac{1}{2})} ds \\ &= O(t^{\frac{\gamma}{2}-\gamma\beta-\frac{1}{4}}) \text{ với } t \geq 2t_0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\|u(t)\|_2 \lesssim \|e^{-tA}u_0\|_2 + I \leq O(t^{-\alpha}) + O(t^{\frac{\gamma}{2}-\gamma\beta-\frac{1}{4}})$$

với $t \geq 2t_0$. Tương tự trường hợp trên, ta thấy rằng luôn tồn tại các số γ và β sao cho

$$\frac{\gamma}{2} - \gamma\beta - \frac{1}{4} \leq -\alpha, \quad \frac{1}{2} \leq \beta < \frac{3}{2}, \quad \text{và} \quad 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}.$$

Chọn các số γ và β như trên, ta kết luận rằng $\|u(t)\|_2 = O(t^{-\alpha})$ khi $t \rightarrow \infty$.

b) Điều này được suy trực tiếp từ chứng minh của phần a). $\square$

Hệ quả 2.1. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là một miền tổng quát, u_0 và u như trong Định lý 2.4. Khi đó, nếu $\|u(t)\|_2 = o(t^{-\gamma})$ với $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ thì*

$$\|u(t) - e^{-tA}u_0\|_2 = o(t^{-(\gamma+\theta)})$$

với mọi $\theta \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$.

Chứng minh. Phần chứng minh của hệ quả này được suy trực tiếp từ chứng minh trường hợp 3 của Định lý 2.4. $\square$

Kết quả thứ hai chỉ ra rằng, khi thêm một số điều kiện của giá trị ban đầu thì nghiệm yếu u dần đến nghiệm của hệ Stokes thuần nhất khi thời gian t dần đến vô cùng. Kết quả trong các Định lý 2.5 và Định lý 2.6 mạnh hơn kết quả của W. Borchers và T. Miyakawa [5] khi thêm vào điều kiện của giá trị ban đầu. Phần chứng minh sẽ sử dụng lý thuyết về tính duy nhất và tốc độ hội tụ theo thời gian của nghiệm mạnh trong hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát khi giá trị ban đầu đủ nhỏ.

Định lý 2.5. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là một miền tổng quát, $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh (2.3). Khi đó, nếu $u_0 \in L^q(\Omega) \cap L^2_\sigma(\Omega)$, $1 < q \leq 2$ thì*

$$\|u(t)\|_2 = o\left(t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\right) \quad \text{khi } t \rightarrow \infty.$$

Chứng minh. Định lý 2.5 là hệ quả trực tiếp của Định lý 2.4 phần b) và Bổ đề 2.10. $\square$

Định lý 2.6. Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là một miền tổng quát, $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh (2.3). Cho các hằng số t_0, C_1 và C_2 sao cho

$$C_1 t^{-\alpha_1} \leq \|e^{-tA} u_0\|_2 \leq C_2 t^{-\alpha_2} \quad \text{với } t \geq t_0,$$

trong đó α_1 và α_2 là các hằng số dương thỏa mãn

$$0 \leq \alpha_2 < \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \alpha_2 \leq \alpha_1 < \alpha_2 + \frac{1}{4}.$$

Khi đó, nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes dần đến nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với giá trị ban đầu u_0 khi thời gian dần đến vô cùng, theo nghĩa là

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|u(t) - e^{-tA} u_0\|_2}{\|u(t)\|_2} = 0. \quad (2.35)$$

Chứng minh. Áp dụng hệ quả 2.1 với $\gamma = \alpha_2$, $\theta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{1}{8}$, ta suy ra tồn tại M_1 sao cho

$$\begin{aligned} \|u(t) - e^{-tA} u_0\|_2 &\leq M_1 t^{-(\alpha_2 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{1}{8})} \\ &= M_1 t^{-(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{1}{8})} \quad \text{với } t \geq t_0. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên, suy ra

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 &\geq \|u(t)\|_2 - \|u(t) - e^{-tA} u_0\|_2 \\ &\geq C_1 t^{-\alpha_1} - M_1 t^{-(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{1}{8})} \\ &\geq \left(C_1 - M_1 t^{-(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + \frac{1}{8})} \right) t^{-\alpha_1} \\ &\geq \frac{C_1}{2} t^{-\alpha_1} \quad \text{với } t \geq t_1, \end{aligned}$$

trong đó

$$t_1 = \max \left\{ t_0, \left(\frac{2M_1}{C_1} \right)^{\frac{8}{4(\alpha_2 - \alpha_1) + 1}} \right\}.$$

Từ hai ước lượng trên, ta được

$$\begin{aligned} \frac{\|u(t) - e^{-tA} u_0\|_2}{\|u(t)\|_2} &\leq \frac{M_1 t^{-(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \frac{1}{8})}}{\frac{C_1}{2} t^{-\alpha_1}} \\ &= \frac{2M_1}{C_1} t^{-(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + \frac{1}{8})} \rightarrow 0 \quad \text{khi } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh. □

KẾT LUẬN CHƯƠNG 2

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu hai kết quả chính. Kết quả đầu tiên về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) trong miền tổng quát. Giả sử u là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (1.14) trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ và u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh. Khi đó, ta chứng minh được rằng nghiệm yếu u là chính quy nếu động năng $\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2$ liên tục Hölder trái với số mũ Hölder $\frac{1}{2}$ và nửa chuẩn Hölder đủ nhỏ. Kết quả này mở rộng các kết quả trước trong [22, 24, 25, 28] với Ω là miền bị chặn hoặc $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 . Phương pháp chứng minh dựa trên các tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u, v)$ và lý thuyết về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương, nghiệm mạnh toàn cục đã khắc phục được những khó khăn trong việc chứng minh với miền hoàn toàn tổng quát.

Kết quả thứ hai của chương, ta chứng minh rằng nghiệm yếu u có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm của hệ Stokes thuần nhất có giá trị ban đầu u_0 và số mũ hội tụ nhỏ hơn $\frac{3}{4}$. Mặt khác, khi thêm một số điều kiện của giá trị ban đầu thì nghiệm u dần đến nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với giá trị ban đầu u_0 khi thời gian t dần tới vô cùng. Phần chứng minh sẽ sử dụng lý thuyết về tính duy nhất và tốc độ hội tụ theo thời gian của nghiệm mạnh trong hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát khi giá trị ban đầu đủ nhỏ.

Chương 3

Dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho bài toán Cauchy của hệ phương trình Navier-Stokes. Ở đây, chúng tôi thu được kết quả là định lý về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều. Phương pháp chứng minh dựa trên lý thuyết về sự tồn tại của nghiệm mạnh địa phương, tính duy nhất nghiệm, tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh toàn cục khi giá trị ban đầu đủ nhỏ và một số công cụ của giải tích điều hòa.

Chương này gồm hai phần: Phần thứ nhất giới thiệu bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes trong $\mathbb{R}^3$ và trình bày một số tính chất của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong $\mathbb{R}^3$. Phần thứ hai trình bày định lý về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong $\mathbb{R}^3$.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [3] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

3.1. Một số tính chất của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều

Trong chương này, ta nghiên cứu bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) trong cả không gian $\mathbb{R}^3$ như sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(0, x) = u_0. \end{cases}$$

Trong phần này, ta sẽ thiết lập các ước lượng trong $L^p - L^q$ cho nửa nhóm truyền nhiệt với vi phân như sau.

Bổ đề 3.1. Cho $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3, t > 0$ và $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Khi đó, với mọi $f \in L^p$ ta có

$$t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{|\alpha|}{2}} D^\alpha e^{t\Delta} f \in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)).$$

Điều này tương đương với

$$\|D^\alpha e^{t\Delta} f\|_q \leq C_{p,q,\alpha} t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_p$$

trong đó $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ và $C_{p,q,\alpha}$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào p, q và α .

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh

$$t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{|\alpha|}{2}} \|D^\alpha e^{t\Delta} f\|_q < \infty.$$

Ta có

$$D^\alpha e^{t\Delta} f = D^\alpha (e^{t\Delta} * f) = D^\alpha \left(\left(\frac{1}{4\pi t} \right)^{3/2} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \right).$$

Đặt $K(x) = e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$. Khi đó, ta có

$$D^\alpha e^{t\Delta} f = t^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{|\alpha|}{2}} D^\alpha K \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) * f.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|D^\alpha e^{t\Delta} f\|_q &= t^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} \left\| D^\alpha K \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) * f \right\|_q \\ &\lesssim t^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} \left\| D^\alpha K \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) \right\|_m \|f\|_p \end{aligned}$$

trong đó

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p} \implies \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Đặt $s = \frac{x}{\sqrt{t}} \Rightarrow x = \sqrt{t}s$, ta có

$$\begin{aligned} \|D^\alpha e^{t\Delta} f\|_q &\lesssim t^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} \left(t^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha K^m(s) ds \right)^{\frac{1}{m}} \|f\|_p \\ &\lesssim t^{\frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right) - \frac{3+|\alpha|}{2}} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Do đó

$$\|D^\alpha e^{t\Delta} f\|_q \leq C_{p,q,\alpha} t^{-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) - \frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_p.$$

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề dưới đây chỉ ra tính rằng toán tử $e^{t\Delta} \mathbb{P}$ là một toán tử chập với nhân khả tích bị chặn.

Bổ đề 3.2. [54, 63] Cho $t > 0$, toán tử $O_t = e^{t\Delta} \mathbb{P}$ là toán tử chập $O_t f = K_t * f$ trong đó nhân K_t thỏa mãn $K_t(x) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ với mọi hàm trơn K mà

$$(1 + |x|)^{3+|\alpha|} D^\alpha K \in L^\infty(\mathbb{R}^3),$$

với $x = (x_1, x_2, x_3)$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ và $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_3}^{\alpha_3}$.

Bổ đề 3.3. Giả sử rằng $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, $t > 0$ và $1 \leq p < q \leq \infty$. Khi đó, với mọi $f \in L^p$, ta có

$$t^\beta D^\alpha e^{t\Delta} \mathbb{P} f \in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)) \text{ và } \|D^\alpha e^{t\Delta} \mathbb{P} f\|_q \leq C_{p,q,\alpha} t^{-\beta} \|f\|_p,$$

trong đó $\beta = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) + \frac{|\alpha|}{2}$ và $C_{p,q,\alpha}$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào p, q và α .

Chứng minh. Ta có

$$D^\alpha e^{t\Delta} \mathbb{P} f = D^\alpha O_t f = D^\alpha K_t * f.$$

Áp dụng Bổ đề 3.2, ta có $K_t(x) = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ suy ra

$$\|D^\alpha e^{t\Delta} \mathbb{P} f\|_q = \|D^\alpha K_t * f\|_q = \frac{1}{t^{\frac{3+|\alpha|}{2}}} \left\| \partial^\alpha K\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) * f \right\|_q.$$

Áp dụng bất đẳng thức Young, ta thu được

$$\|D^\alpha e^{t\Delta} \mathbb{P}f\|_q \leq t^{-\frac{3+|\alpha|}{2}} \left\| \partial^\alpha K\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) \right\|_m \|f\|_p,$$

trong đó $\frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Tiếp theo, ta sẽ đánh giá thành phần $\left\| \partial^\alpha K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right\|_m$, ta có

$$\left\| \partial^\alpha K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right\|_m = \left(\int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha K^m\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Đặt $s = \frac{x}{\sqrt{t}}$ suy ra $dx = \sqrt{t}ds$. Khi đó, ta có

$$\left\| \partial^\alpha K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right\|_m = \left(t^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha K^m(s) ds \right)^{\frac{1}{m}}.$$

Do tích phân

$$\int_{\mathbb{R}^3} D^\alpha K^m(s) ds$$

bị chặn nên suy ra

$$\|D^\alpha e^{t\Delta} \mathbb{P}f\|_q \lesssim t^{\frac{3}{2m} - \frac{3+|\alpha|}{2}} \|f\|_p$$

hay

$$\|D^\alpha e^{t\Delta} \mathbb{P}f\|_q \leq Ct^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - \frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_p.$$

Bỏ đề được chứng minh. □

Để chứng minh kết quả chính, ta cần một số kết quả đã biết sau.

Định lý 3.1. [54, 55] *Giả sử $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ và $\operatorname{div} u_0 = 0$. Khi đó, với $T > 0$ tồn tại nhiều nhất một nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) sao cho $u \in C([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$.*

Định lý 3.2. [33] *Giả sử $u \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$ là nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes (1.19). Khi đó $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_3 = 0$.*

Định lý 3.3. [39] *Giả sử $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ và $\operatorname{div} u_0 = 0$. Khi đó, tồn tại một hằng số dương δ sao cho nếu $\|u_0\|_3 \leq \delta$ thì hệ phương trình Navier-Stokes có nghiệm duy nhất u thỏa mãn*

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})}u \in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3)) \text{ và } t^{1-\frac{3}{2q}}\nabla u \in BC([0, \infty); L^q(\mathbb{R}^3))$$

với mọi $q \geq 3$.

Các bổ đề dưới đây sẽ nghiên cứu tính bị chặn của toán tử $B(u, v)(t)$ xác định bởi

$$B(u, v)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u(s) \otimes v(s)) ds$$

trên các không gian bổ trợ $\mathcal{K}_T^q$, $3 \leq q \leq \infty$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(t, x)$ sao cho

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} u(t) \in BC([0, T]; L^q(\mathbb{R}^3))$$

và

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|u(t)\|_q = 0. \quad (3.1)$$

Trong trường hợp $q = 3$, không gian $\mathcal{K}_T^3$ được xác định như không gian con của $C([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$. Không gian $\mathcal{K}_T^q$ được xác định bởi chuẩn

$$\|u\|_{\mathcal{K}_T^q} := \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|u(t, x)\|_q < \infty. \quad (3.2)$$

Không gian $\mathcal{K}_T^q$ được đưa ra bởi Weissler và được sử dụng bởi T. Kato [44] và M. Cannone [12]. Bổ đề 3.4 dưới đây chỉ ra tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u, v)$ trong không gian $\mathcal{K}_T^q$ trên.

Bổ đề 3.4. *Toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $\mathcal{K}_T^q \times \mathcal{K}_T^q$ đến $\mathcal{K}_T^p$ với $3 \leq p < \frac{3q}{6-q}$ nếu $3 < q < 6$; với $3 \leq p < \infty$ nếu $q = 6$; $\frac{q}{2} \leq p \leq \infty$ nếu $6 < q < \infty$ và bất đẳng thức sau đúng*

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{K}_T^p} \leq C \|u\|_{\mathcal{K}_T^q} \|v\|_{\mathcal{K}_T^q} \quad \text{với mọi } u, v \in \mathcal{K}_T^q,$$

trong đó C là hằng số dương không phụ thuộc vào T .

Chứng minh. Xét toán tử song tuyến tính

$$B(u, v)(t) = \int_0^t \frac{1}{(t-s)^2} \nabla K\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (u(s) \otimes v(s)) ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, cách xác định các không gian $\mathcal{K}_T^q$ và

Bổ đề 2.1 a), ta được

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)(t)\|_p &\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_q \|v(s)\|_q ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} s^{-\alpha} s^{\frac{\alpha}{2}} \|u(s)\|_q s^{\frac{\alpha}{2}} \|v(s)\|_q ds \\
&\leq C \|u\|_{\mathcal{K}_T^q} \|v\|_{\mathcal{K}_T^q} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} s^{-\alpha} ds \\
&\leq C t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{p}\right)} \|u\|_{\mathcal{K}_T^q} \|v\|_{\mathcal{K}_T^q}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\max \left\{ 0; \frac{2}{q} - \frac{1}{3} \right\} \leq \frac{1}{p} \leq \min \left\{ \frac{2}{q}; \frac{1}{3} \right\}.$$

Suy ra với $3 < q < 6$ thì $3 \leq p < \frac{3q}{6-q}$; với $q = 6$ thì $3 \leq p < \infty$ và với $6 < q < \infty$ thì $\frac{q}{2} \leq p \leq \infty$.

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bổ đề 3.5. [11, 15] Nếu $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ thì $e^{t\Delta}u_0 \in \mathcal{K}_\infty^q$ và $\|e^{t\Delta}u_0\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \leq \|u_0\|_3$ với mọi $q \in (3, \infty]$.

Ký hiệu $E_T^q := \mathcal{K}_T^q \cap \mathcal{K}_T^\infty$ với $3 < q < \infty$, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.6. Giả sử $6 < q < \infty$, $T > 0$. Khi đó, toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $E_T^q \times E_T^q$ vào E_T^q và bất đẳng thức sau đúng

$$\|B(u, v)\|_{E_T^q} \leq C \|u\|_{E_T^q} \|v\|_{E_T^q} \text{ với mọi } u, v \in E_T^q, \quad (3.3)$$

trong đó C là một hằng số không phụ thuộc vào T .

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.4 suy ra toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $\mathcal{K}_T^q \times \mathcal{K}_T^q$ đến $\mathcal{K}_T^q$, từ $\mathcal{K}_T^q \times \mathcal{K}_T^q$ đến $\mathcal{K}_T^\infty$ và bất đẳng thức sau đúng

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{K}_T^q} \leq C_1 \|u\|_{\mathcal{K}_T^q} \|v\|_{\mathcal{K}_T^q} \leq C_1 \|u\|_{E_T^q} \|v\|_{E_T^q} \text{ với mọi } u, v \in E_T^q \quad (3.4)$$

và

$$\|B(u, v)\|_{\mathcal{K}_T^\infty} \leq C_2 \|v\|_{\mathcal{K}_T^q} \|u\|_{\mathcal{K}_T^q} \leq C_2 \|v\|_{E_T^q} \|u\|_{E_T^q} \text{ với mọi } u, v \in E_T^q, \quad (3.5)$$

trong đó C_1 và C_2 là hai hằng số dương không phụ thuộc vào T . Khi đó, ước lượng (3.3) được suy trực tiếp từ các bất đẳng thức (3.4) và (3.5).

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Ta thiết lập không gian bổ trợ G^α , $0 \leq \alpha \leq 1$ gồm tất cả các hàm $w(x) = (w_1(x), w_2(x), w_3(x)) \in L^3(\mathbb{R}^3)$ sao cho

$$\sup_{t \geq 0} t^\alpha \|e^{t\Delta}|w|\|_3 < \infty$$

và

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|e^{t\Delta}|w|\|_3 = 0, \quad (3.6)$$

trong đó

$$|w(x)| = \left(\sum_{i=1}^3 w_i^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chuẩn trong không gian G^α được xác định bởi

$$\|w\|_{G^\alpha} := \|w\|_3 + \sup_{t \geq 0} t^\alpha \|e^{t\Delta}|w|\|_3.$$

Sau đây, ta sẽ phát biểu một số tính chất của không gian G^α .

Bổ đề 3.7. *Không gian G^α là một không gian Banach bất biến với phép tịnh tiến, nghĩa là*

$$\|w(\cdot - x_0)\|_{G^\alpha} = \|w\|_{G^\alpha} \quad \text{với mọi } x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Chứng minh. Đầu tiên, ta sẽ chỉ ra rằng G^α là một không gian Banach.

Thật vậy, lấy $\{w_n\}_{n \geq 1}$ là một dãy Cauchy trong G^α , với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại số dương N đủ lớn sao cho

$$\|w_n - w_m\|_3 + \sup_{t \geq 0} t^\alpha \|e^{t\Delta}|w_n - w_m|\|_3 \leq \varepsilon \quad \text{với mọi } n \geq N, m \geq N.$$

Suy ra $\{w_n\}_{n \geq 1}$ là một dãy Cauchy trong không gian Banach $L^3(\mathbb{R}^3)$, do đó tồn tại $w_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_0\|_3 = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \left| t^\alpha \|e^{t\Delta}|w_n - w_m|\|_3 - t^\alpha \|e^{t\Delta}|w_n - w_0|\|_3 \right| \\ & \leq t^\alpha \|e^{t\Delta}|w_n - w_m| - e^{t\Delta}|w_n - w_0|\|_3 \\ & \leq t^\alpha \|e^{t\Delta}|w_m - w_0|\|_3 \leq t^\alpha \|w_m - w_0\|_3, \end{aligned}$$

với mọi $m \geq N, n \geq N$ và $t \geq 0$. Từ các ước lượng trên, suy ra

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t^\alpha \|e^{t\Delta} |w_n - w_m|\|_3 = t^\alpha \|e^{t\Delta} |w_n - w_0|\|_3 \leq \varepsilon$$

với mọi $n \geq N, t \geq 0$. Do đó:

$$\sup_{t \geq 0} t^\alpha \|e^{t\Delta} |w_n - w_0|\|_3 \leq \varepsilon \text{ với mọi } n \geq N.$$

Từ bất đẳng thức trên, ta có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w_n - w_0\|_{G^\alpha} = 0.$$

Giờ ta sẽ kiểm tra điều kiện (3.3) cho w_0 . Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số dương N đủ lớn sao cho

$$t^\alpha \|e^{t\Delta} |w_n - w_0|\|_3 \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } n \geq N, t \geq 0.$$

Mặt khác, tồn tại số dương $t_0 = t_0(N)$ đủ lớn sao cho

$$t^\alpha \|e^{t\Delta} |w_N|\|_3 \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ với mọi } t \geq t_0.$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$t^\alpha \|e^{t\Delta} |w_0|\|_3 \leq t^\alpha \|e^{t\Delta} |w_N - w_0|\|_3 + t^\alpha \|e^{t\Delta} |w_N|\|_3 \leq \varepsilon \text{ với mọi } t \geq t_0.$$

Cuối cùng, tính chất $\|w(\cdot - x_0)\|_{G^\alpha} = \|w\|_{G^\alpha}$ được suy ra từ

$$\begin{aligned} e^{t\Delta} |w(\cdot - x_0)|(x) &= (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} * |w(\cdot - x_0)|(x) \\ &= (4\pi t)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} * |w(\cdot)|(x - x_0) \end{aligned}$$

và $\|u(\cdot - x_0)\|_q = \|u\|_q$ với $u \in L^q(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq q \leq \infty$. □

Bổ đề 3.8. Giả sử $h \in L^1(\mathbb{R}^3)$ và $w \in G^\alpha$. Khi đó, $h * w \in G^\alpha$ và

$$\|h * w\|_{G^\alpha} \leq \|h\|_1 \|w\|_{G^\alpha}.$$

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 3.7, ta suy ra

$$\begin{aligned} \|h * w\|_{G^\alpha} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^3} h(y) w(\cdot - y) dy \right\|_{G^\alpha} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |h(y)| \|w(\cdot - y)\|_{G^\alpha} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^3} |h(y)| \|w\|_{G^\alpha} dy = \|h\|_1 \|w\|_{G^\alpha}. \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 3.9. Giả sử $h \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ và $w \in G^\alpha$. Khi đó, $hw \in G^\alpha$ và

$$\|hw\|_{G^\alpha} \leq \|h\|_\infty \|w\|_{G^\alpha}.$$

Chứng minh. Phần chứng minh của Bổ đề 3.9 được suy trực tiếp từ định nghĩa không gian G^α . $\square$

Các tính chất trên được sử dụng để chứng minh bổ đề sau về bị chặn của toán tử B trên không gian F_T^α , trong đó F_T^α với $0 \leq \alpha < 1$ là không gian gồm tất cả các hàm đo được $u(t, x)$ sao cho

$$u(t) \in G^\alpha \text{ với mọi } t \in [0, T] \text{ và } \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{G^\alpha} < \infty.$$

Bổ đề 3.10. Giả sử $p, \alpha, T \in \mathbb{R}$ sao cho

$$0 \leq \alpha \leq 1, 3 < q < \infty, T > 0.$$

Khi đó, toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $E_T^q \times F_T^\alpha$ đến F_T^α và từ $F_T^\alpha \times E_T^q$ đến F_T^α và các bất đẳng thức sau đúng

$$\|B(u, v)(t)\|_{F_T^\alpha} \lesssim \|u\|_{E_T^q} \|v\|_{F_T^\alpha} \text{ với mọi } u \in E_T^q, v \in F_T^\alpha \quad (3.7)$$

và

$$\|B(u, v)(t)\|_{F_T^\alpha} \lesssim \|u\|_{F_T^\alpha} \|v\|_{E_T^q} \text{ với mọi } u \in F_T^\alpha, v \in E_T^q. \quad (3.8)$$

Chứng minh. Đặt

$$I = \|B(u, v)(t)\|_{G^\alpha} = \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u(s) \otimes v(s)) ds \right\|_{G^\alpha}$$

Áp dụng Bổ đề 3.2, ta có

$$\begin{aligned} I &= \left\| \int_0^t \frac{1}{(t-s)^2} \nabla K\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (u(s) \otimes v(s)) ds \right\|_{G^\alpha} \\ &\leq \int_0^t \frac{1}{(t-s)^2} \left\| \nabla K\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (u(s) \otimes v(s)) \right\|_{G^\alpha} ds. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 3.8 và Bổ đề 3.9, ta có:

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^t \frac{1}{(t-s)^2} \left\| \nabla K\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) \right\|_1 \|u(s) \otimes v(s)\|_{G^\alpha} ds \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\nabla K\|_1 \|u(s) \otimes v(s)\|_{G^\alpha} ds \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|\nabla K\|_1 \|u(s)\|_\infty \|v(s)\|_{G^\alpha} ds.$$

Từ cách xác định các không gian F_T^α và không gian $\mathcal{K}_T^\infty$, ta có

$$\begin{aligned} I &\lesssim \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_\infty \|v(s)\|_{F_T^\alpha} ds \\ &\leq \|v\|_{F_T^\alpha} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{\mathcal{K}_T^\infty} ds \\ &= \|u\|_{\mathcal{K}_T^\infty} \|v\|_{F_T^\alpha} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds. \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.1 a), suy ra

$$I = C_1 \|u\|_{\mathcal{K}_T^\infty} \|v\|_{F_T^\alpha} \leq C_1 \|u\|_{E_T^q} \|v\|_{F_T^\alpha}.$$

Ước lượng (3.7) được chứng minh.

Bằng lập luận tương tự, ta có ước lượng (3.8). $\square$

Bổ đề sau thiết lập các đánh giá của nửa nhóm $e^{t\Delta}$ trên các không gian bổ trợ E_T^q và F_T^α đã được định nghĩa ở trên.

Bổ đề 3.11. *Giả sử $3 \leq q < \infty$, $T > 0$ và $0 \leq \alpha \leq 1$. Khi đó*

- a) *Nếu $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ thì $e^{t\Delta}u_0 \in E_T^q$ và $\|e^{t\Delta}u_0\|_{E_T^q} \lesssim \|e^{t\Delta}u_0\|_{K_T^q}$.*
- b) *Nếu $u_0 \in G^\alpha$ thì $e^{t\Delta}u_0 \in F_T^\alpha$ và $\|e^{t\Delta}u_0\|_{F_T^\alpha} \leq \|u_0\|_{G^\alpha}$.*

Chứng minh.

- a) Từ Bổ đề 3.5 suy ra $e^{t\Delta}u_0 \in E_\infty^q$. Từ Bổ đề 3.2 ta có

$$\begin{aligned} \|e^{t\Delta}u_0\|_{E_T^q} &= \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}} \|e^{t\Delta}u_0\|_\infty + \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta}u_0\|_q \\ &= \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}} \|e^{\frac{t}{2}\Delta} e^{\frac{t}{2}\Delta} u_0\|_\infty + \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta}u_0\|_q \\ &\leq C_0 \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{\frac{t}{2}\Delta} u_0\|_q + \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta}u_0\|_q \\ &\leq C_1 \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta}u_0\|_q + \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta}u_0\|_q \\ &= C_2 \|e^{t\Delta}u_0\|_{K_T^q}. \end{aligned}$$

- b) Từ Bổ đề 3.8, ta có

$$\|e^{t\Delta}u_0\|_{G^\alpha} = \left\| \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} * u_0 \right\|_{G^\alpha}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} \right\|_1 \|u_0\|_{G^\alpha} \\
&= \|u_0\|_{G^\alpha}.
\end{aligned}$$

Phần b) được chứng minh. $\square$

Bổ đề sau chỉ ra sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương của hệ phương trình Navier-Stokes khi giá trị ban đầu thuộc $L^3(\mathbb{R}^3)$.

Bổ đề 3.12. *Giả sử $p, \alpha, T \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$6 < q < 12, 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ và } T > 0.$$

Khi đó, tồn tại một số dương $C = C(q, \alpha)$ sao cho với mọi $u_0 \in G^\alpha$ với $\operatorname{div} u_0 = 0$ thỏa mãn

$$\sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta} u_0\|_q < C \quad (3.9)$$

thì hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) có nghiệm

$$u \in E_T^q \cap F_T^\alpha \cap BC([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3)).$$

Cụ thể, với giá trị ban đầu $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ bất kỳ tồn tại $T = T(u_0)$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức (3.9) đúng.

Chứng minh. Kết hợp Bổ đề 2.3 với $E = E_T^q$, $F = F_T^\alpha$, Bổ đề 3.6, Bổ đề 3.10 và Bổ đề 3.11, suy ra tồn tại hằng số dương C sao cho nếu bất đẳng thức

$$\|u_0\|_{K_T^q} = \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta} u_0\|_q < C$$

đúng thì hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) có nghiệm $u \in E_T^q \cap F_T^\alpha$. Từ Bổ đề 3.4, ta có $B(u, u) \in \mathcal{K}_T^{\frac{q}{2}}$, từ Bổ đề 3.5 ta có $e^{t\Delta} u_0 \in \mathcal{K}_T^{\frac{q}{2}}$, suy ra:

$$u = e^{\cdot\Delta} u_0 + B(u, u) \in \mathcal{K}_T^{\frac{q}{2}}.$$

Áp dụng Bổ đề 3.4 ta thu được

$$B(u, u) \in \mathcal{K}_T^3 \subseteq BC([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3)).$$

Do đó

$$u \in BC([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3)).$$

Tính duy nhất của u được suy ra từ Định lý 3.4. Giờ ta sẽ chỉ ra rằng điều kiện (3.9) được thỏa mãn khi T đủ nhỏ. Thật vậy, theo định nghĩa của không gian K_T^q , ta thu được về trái của bất đẳng thức (3.9) hội tụ đến 0 khi thời gian T dần đến 0. Vì vậy, ước lượng (3.9) đúng với $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ bất kỳ khi $T = T(u_0)$ đủ nhỏ. $\square$

Ta sẽ sử dụng bổ đề trên để chứng minh tính chất sau đây của nghiệm mạnh toàn cục cho hệ phương trình Navier-Stokes.

Bổ đề 3.13. *Giả sử $u \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$ là một nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) với giá trị ban đầu $u_0 \in G^\alpha$.*

Khi đó, $u(t) \in G^\alpha$ với mọi $t > 0$.

Chứng minh. Từ Bổ đề 3.12 suy ra tồn tại một nghiệm mạnh v của hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) với giá trị ban đầu u_0 trong khoảng $[0, T']$ trong đó $T' > 0$ sao cho $v(t) \in G^\alpha$ với $t \in [0, T']$. Từ Định lý 3.1 ta thu được $u = v$ trên $[0, T']$ và $u(t) \in G^\alpha$ với $t \in [0, T']$. Đặt

$$T^* = \inf\{t > 0 : u(t) \notin G^\alpha\}.$$

Khi đó, $0 < T^* \leq \infty$ và $u(t) \in G^\alpha$ với $t \in [0, T^*)$, ta chỉ cần chứng minh rằng $T^* = \infty$. Giả sử rằng $T^* < \infty$. Lấy C là hằng số trong Bổ đề 3.12, từ tính liên tục ta suy ra tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho

$$\|u(t) - u(T^*)\|_3 \leq \frac{C}{2}, \text{ với mọi } t \in [T^* - \delta_1, T^*].$$

Lấy $6 < q < 12$, ta chọn số dương δ_2 đủ nhỏ sao cho

$$\sup_{0 < t \leq \delta_2} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta} u(T^*)\|_q \leq \frac{C}{2}.$$

Lấy $\delta = \frac{1}{2} \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Từ hai bất đẳng thức trên, suy ra

$$\begin{aligned} & \sup_{0 < t \leq 2\delta} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta} u(T^* - \delta)\|_q \\ & \leq \sup_{0 < t \leq 2\delta} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta} u(T^*)\|_q + \sup_{0 < t \leq 2\delta} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta} (u(T^*) - u(T^* - \delta))\|_q \\ & \leq \sup_{0 < t \leq \delta_2} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta} u(T^*)\|_q + \|u(T^*) - u(T^* - \delta)\|_3 \leq C. \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức trên và áp dụng Bổ đề 3.12, Định lý 3.1, ta thu được $u(t) \in G^\alpha$ với mọi $t \in [T^* - \delta, T^* + \delta]$. Mâu thuẫn với giả thiết. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Ta xác định không gian bổ trợ Q^α , $0 \leq \alpha \leq 1$ gồm tất cả các hàm đo được $u(t, x)$ sao cho

$$\sup_{t \geq 0} t^\alpha \|u(t)\|_3 < \infty$$

và

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|u(t)\|_3 = 0. \quad (3.10)$$

Bổ đề sau chỉ ra tính bị chặn của toán tử B liên quan tới không gian Q^α .

Bổ đề 3.14. *Giả sử $p, \alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$0 \leq \alpha < 1, \max\left\{0, \frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right\} < \frac{1}{q} < \frac{1}{3}.$$

Khi đó, toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $\mathcal{K}_\infty^q \times \mathcal{K}_\infty^q$ đến $\mathcal{K}_\infty^q$, từ $\mathcal{K}_\infty^q \times Q^\alpha$ đến Q^α , từ $Q^\alpha \times \mathcal{K}_\infty^q$ đến Q^α và các ước lượng sau đúng

$$\|B(u, v)(t)\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \|v\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \quad \text{với mọi } u, v \in \mathcal{K}_\infty^q, \quad (3.11)$$

$$\|B(u, v)(t)\|_{Q^\alpha} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \|v\|_{Q^\alpha} \quad \text{với mọi } u \in \mathcal{K}_\infty^q, v \in Q^\alpha, \quad (3.12)$$

$$\|B(u, v)(t)\|_{Q^\alpha} \leq \gamma \|u\|_{Q^\alpha} \|v\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \quad \text{với mọi } u \in Q^\alpha, v \in \mathcal{K}_\infty^q, \quad (3.13)$$

trong đó γ là một hằng số dương.

Chứng minh. Ước lượng (3.11) được suy ra từ Bổ đề 3.4. Ta có

$$\|B(u, v)(t)\|_3 = \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u(s) \otimes v(s)) ds \right\|_3.$$

Áp dụng Bổ đề 3.3, ta được

$$\|B(u, v)(t)\|_3 \leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \|u \otimes v\|_{\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{q}}} ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta được

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \|u \otimes v\|_{\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{q}}} ds \leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \|u\|_q \|v\|_3 ds.$$

Từ cách xác định các không gian $\mathcal{K}_\infty^q$, Q^α và Bổ đề 2.1 a), ta có:

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t)\|_3 &\leq \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} s^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{3}{q}\right) s^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|u(s)\|_q s^\alpha \|v(s)\|_3 ds \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \|v\|_{Q^\alpha} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} s^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{3}{q}\right) ds \\ &= C_1 t^{-\alpha} \|u\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \|v\|_{Q^\alpha}. \end{aligned}$$

Ước lượng (3.12) được suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức trên. Ta kiểm tra điều kiện (3.10) của toán tử song tuyến tính B . Thật vậy, từ ước lượng trên và sử dụng phương pháp đổi biến $s = t\tau$ ta được

$$\begin{aligned} t^\alpha \|B(u, v)(t)\|_3 &\leq t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \|u(s)\|_q \|v(s)\|_3 ds \\ &\leq t^\alpha \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} s^{-\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} s^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|u(s)\|_q \|v(s)\|_3 ds \\ &\leq t^\alpha \|u\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} s^{-\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|v(s)\|_3 ds \\ &= \|u\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \tau^{-\alpha-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{3}{q}\right) (t\tau)^\alpha \|v(t\tau)\|_3 d\tau. \end{aligned}$$

Từ $\lim_{t \rightarrow \infty} (t\tau)^\alpha \|v(t\tau)\|_3 = 0$ với mọi $\tau > 0$, áp dụng định lý hội tụ Lebesgue, ta được

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|B(u, v)(t)\|_3 = 0.$$

Bằng lập luận tương tự, ta có ước lượng (3.13). $\square$

Sử dụng bổ đề trên, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm mạnh toàn cục của hệ phương trình Navier-Stokes khi giá trị ban đầu đủ nhỏ trong G^α như sau.

Bổ đề 3.15. *Giả sử $p, \alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$0 \leq \alpha < 1, \max\left\{0, \frac{2}{3}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right\} < \frac{1}{q} < \frac{1}{3}.$$

Khi đó, nếu tồn tại hằng số dương $C = C(q, \alpha)$ sao cho với mọi $u_0 \in G^\alpha$ thỏa mãn

$$\sup_{0 \leq t \leq \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta} u_0\|_q < C, \quad (3.14)$$

thì hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) có nghiệm

$$u \in K_\infty^q \cap Q^\alpha \cap BC([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3)).$$

Chứng minh. Ta có $e^{t\Delta}u_0 \in K_\infty^q \cap Q^\alpha$. Kết hợp Bổ đề 2.3, Bổ đề 3.14 với $E = K_\infty^q$ và $F = Q^\alpha$ suy ra tồn tại một hằng số dương C sao cho nếu bất đẳng thức

$$\|u_0\|_{K_\infty^q} = \sup_{0 \leq t \leq \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta}u_0\|_q < C$$

thỏa mãn thì hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) có nghiệm $u \in K_\infty^q \cap Q^\alpha$. Áp dụng Bổ đề 3.4, Bổ đề 3.5 và sử dụng lập luận tương tự trong phần chứng minh Bổ đề 3.12 ta thu được $u \in BC([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$.

Tính duy nhất của u được suy trực tiếp từ Định lý 3.1. $\square$

Bổ đề 3.16. *Giả sử rằng $u_0 \in L^{p,r}(\mathbb{R}^3)$ với $1 \leq p \leq \infty$ và $1 \leq r < \infty$.*

Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}_n u_0\|_{L^{p,r}} = 0$, trong đó $\mathcal{X}_n(x) = 0$ với

$$x \in \{x : |x| < n\} \cap \{x : |u_0(x)| < n\}$$

và $\mathcal{X}_n(x) = 1$ trong các trường hợp khác.

Chứng minh. Với $\delta > 0$ cố định, ta có

$$\{x : |\mathcal{X}_n u_0(x)| > \delta\} \supseteq \{x : |\mathcal{X}_{n+1} u_0(x)| > \delta\}, \quad (3.15)$$

và

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \{x : |\mathcal{X}_n u_0(x)| > \delta\} = \{x : |u_0(x)| = \infty\}. \quad (3.16)$$

Ta chứng minh rằng

$$\mathcal{L}^d(\{x : |u_0(x)| = \infty\}) = 0. \quad (3.17)$$

Giả sử rằng

$$\mathcal{L}^d(\{x : |u_0(x)| = \infty\}) > 0.$$

Khi đó, ta có $u_0^*(t) := \inf \{\tau : \mathcal{L}^d(\{x : |u_0(x)| > \tau\}) \leq t\} = \infty$ với mọi t sao cho $0 < t < \mathcal{L}^d(\{x : |u_0(x)| = \infty\})$ và suy ra $\|u_0\|_{L^{q,r}} = \infty$.

Mâu thuẫn với giả thiết.

Chú ý rằng

$$\mathcal{L}^d(\{x : |\mathcal{X}_0 u_0(x)| > \delta\}) = \mathcal{L}^d(\{x : |u_0(x)| > \delta\}).$$

Ta sẽ chứng minh

$$\mathcal{L}^d(\{x : |u_0(x)| > \delta\}) < \infty. \quad (3.18)$$

Giả sử ngược lại

$$\mathcal{L}^d(\{x : |u_0(x)| > \delta\}) = \infty.$$

Khi đó, ta có $u_0^*(t) \geq \delta$ với mọi $t > 0$, từ định nghĩa của không gian Lorentz, ta được

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{L^{q,r}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}} u_0^*(t) \right)^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\geq \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}} \delta \right)^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} = \delta \left(\int_0^\infty t^{\frac{r}{q}-1} dt \right)^{\frac{1}{r}} = \infty. \end{aligned}$$

Mâu thuẫn với giả thiết.

Từ (3.15), (3.16), (3.17), và (3.18), ta thu được:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}^d(\{x : |\mathcal{X}_n u_0(x)| > \delta\}) = \mathcal{L}^d(\{x : |u_0(x)| = \infty\}) = 0. \quad (3.19)$$

Đặt

$$u_n^*(t) = \inf \{ \tau : \mathcal{L}^d(\{x : |\mathcal{X}_n u_0(x)| > \tau\}) \leq t \}.$$

Ta có

$$u_n^*(t) \geq u_{n+1}^*(t). \quad (3.20)$$

Cố định $t > 0$. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, từ (3.19) suy ra tồn tại $n_0 = n_0(t, \varepsilon)$ đủ lớn sao cho

$$\mathcal{L}^d(\{x : |\mathcal{X}_n u_0(x)| > \varepsilon\}) \leq t, \forall n \geq n_0.$$

Suy ra

$$u_n^*(t) \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0,$$

do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^*(t) = 0. \quad (3.21)$$

Từ (3.20), (3.21) và áp dụng Định lý hội tụ đơn điệu Lebesgue ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{X}_n u_0\|_{L^{q,r}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}} u_n^*(t) \right)^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} = 0.$$

Bổ đề được chứng minh. □

3.2. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều

Xét bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) trong cả không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$. Trong phần này, chúng tôi đã mở rộng kết quả về dáng điệu tiệm cận nghiệm của I. Gallagher [34] với $u(t) \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Kết quả của chúng tôi chứng minh rằng nếu $u \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$ là nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu u_0 thì nghiệm u có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm của phương trình truyền nhiệt có giá trị ban đầu $|u_0|$. Trong trường hợp đặc biệt, với $\alpha = 0$ ta thu được kết quả như trong [34].

Kết quả chính trong phần này là định lý về tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) trong toàn bộ không gian $\mathbb{R}^3$.

Định lý 3.4. *Cho $u \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$ là một nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) với giá trị ban đầu u_0 . Khi đó*

- a) *Nếu $\|e^{t\Delta}|u_0|\|_3 = o(t^{-\alpha})$ với $0 \leq \alpha < 1$ thì $\|u(t)\|_3 = o(t^{-\alpha})$.*
- b) *Nếu $\|e^{t\Delta}|u_0|\|_3 = O(t^{-\alpha})$ với $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $\|u(t)\|_3 = O(t^{-\alpha})$.*
- c) *Nếu $u_0 \in L^{p,r}(\mathbb{R}^3)$ với $1 < p < 3$, $1 \leq r < \infty$ thì*

$$\|e^{t\Delta}|u_0|\|_3 = o(t^{-\frac{1}{2}(\frac{3}{p}-1)}).$$

- d) *Nếu $|u_0| \in \dot{B}_3^{-2\alpha, \infty}(\mathbb{R}^3)$ với $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $\|e^{t\Delta}|u_0|\|_3 = O(t^{-\alpha})$.*

Chứng minh. a) Ta có $u_0 \in G^\alpha$. Từ Bổ đề 3.13 suy ra $u(t) \in G^\alpha$ với mọi $t \geq 0$. Gọi q là hằng số thỏa mãn điều kiện của Bổ đề 3.15. Từ Định lý 3.2 và Bổ đề 3.5 suy ra tồn tại hằng số dương t_0 đủ lớn sao cho điều kiện

$$\sup_{0 \leq t \leq \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \|e^{t\Delta}u(t_0)\|_q < C$$

đúng. Áp dụng Bổ đề 3.15, ta thu được nghiệm mạnh v của hệ phương trình Navier-Stokes (1.19) với giá trị ban đầu $u(t_0)$ trong khoảng $[0, \infty)$ thỏa mãn

$$v \in K_\infty^q \cap Q^\alpha \cap BC([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$$

và do đó $\|v(t)\|_3 = o(t^{-\alpha})$.

Sử dụng Định lý 3.1, ta thu được $u(t) = v(t - t_0)$ với mọi $t \in [t_0, \infty)$.

Vậy $\|u(t)\|_3 = o(t^{-\alpha})$.

b) Ta xét hai trường hợp $0 \leq \alpha < 1$ và $\alpha = 1$.

Phần chứng minh của trường hợp $0 \leq \alpha < 1$ tương tự như trong phần a), ta chỉ xét trường hợp $\alpha = 1$. Ta chứng minh rằng tồn tại một số dương t_0 đủ lớn sao cho

$$\nabla u(t) \in L^3(\mathbb{R}^3) \text{ với } t \geq t_0 \text{ và } \|\nabla u(t)\|_3 = O(t^{-\frac{5}{4}}). \quad (3.22)$$

Thật vậy, từ các Định lý 3.2, Định lý 3.3 và Định lý 3.1 suy ra tồn tại giá trị $t_1 > 0$ đủ lớn sao cho

$$\|\nabla u(t)\|_6 \lesssim t^{-\frac{3}{4}} \text{ với } t \geq t_1. \quad (3.23)$$

Áp dụng Định lý 3.4 a) cho trường hợp $0 \leq \alpha < 1$ ta có

$$\|u(t)\|_3 \lesssim (1+t)^{-\frac{3}{4}} \text{ với } t > 0. \quad (3.24)$$

Với $t \geq 2t_1$, ta có

$$\begin{aligned} \|\nabla B(u, u)(t)\|_3 &= \left\| \nabla \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) ds \right\|_3 \\ &\leq \int_0^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)\|_3 ds \\ &= \int_{\frac{t}{2}}^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)\|_3 ds + \int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)\|_3 ds. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ta ước lượng số hạng đầu tiên bên vế phải của phương trình (3.25). Áp dụng Bổ đề 3.3, bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức (3.23), bất đẳng thức (3.24) và Bổ đề 2.1 c), ta có

$$\begin{aligned} \int_{\frac{t}{2}}^t \|\nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)\|_3 ds &\lesssim \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|u \cdot \nabla u\|_2 ds \\ &\leq \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|u\|_3 \|\nabla u\|_6 ds \lesssim \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{3}{2}} ds = C_3 t^{-\frac{5}{4}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Tiếp theo, ta ước lượng số hạng thứ hai bên vế phải của phương trình (3.25). Áp dụng Bổ đề 3.3, bất đẳng thức Hölder và bất đẳng thức (3.24), ta có

$$\int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)\|_3 ds = \int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla^2 e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \otimes u)\|_3 ds$$

$$\begin{aligned}
&\lesssim \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{3}{2}} \|u \otimes u\|_{\frac{3}{2}} ds \leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{3}{2}} \|u\|_3^2 ds \\
&\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \lesssim t^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Kết hợp bất đẳng thức (3.26) và (3.27), ta được

$$\|\nabla B(u, u)(t)\|_3 = \left\| \nabla \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) ds \right\|_3 \lesssim t^{-\frac{5}{4}} \text{ với } t \geq 2t_0. \tag{3.28}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
\|\nabla e^{t\Delta} u_0\|_3 &= \|\nabla e^{\frac{t}{2}\Delta} e^{\frac{t}{2}\Delta} u_0\|_3 \lesssim t^{-\frac{1}{2}} \|e^{\frac{t}{2}\Delta} u_0\|_3 \\
&\leq t^{-\frac{1}{2}} \|e^{\frac{t}{2}\Delta} |u_0|\|_3 \leq t^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Tính chất (3.22) được suy ra từ các bất đẳng thức (3.28) và (3.29) với $t_0 = 2t_1$. Giờ ta sẽ chứng minh Định lý 2.2 b) trong trường hợp $\alpha = 1$, ta có

$$\begin{aligned}
\|B(u, u)\|_3 &= \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) ds \right\|_3 \\
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \otimes u)\|_3 ds + \int_{\frac{t}{2}}^t \|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)\|_3 ds.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Ta ước lượng số hạng đầu tiên bên vế phải của phương trình (3.30). Áp dụng Bổ đề 3.3, bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức (3.24) và Bổ đề 2.1 c), ta thu được

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{t}{2}} \|\nabla e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \otimes u)\|_3 ds &\lesssim \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-1} \|u \otimes u\|_{\frac{3}{2}} ds \\
&\leq \int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-1} \|u\|_3^2 ds \\
&\leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-1} \int_0^{\frac{t}{2}} (1+s)^{-\frac{3}{2}} ds \lesssim t^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Tiếp theo, ta ước lượng số hạng thứ hai bên vế phải của phương trình (3.30). Áp dụng Bổ đề 3.3, bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức (3.22), bất đẳng thức (3.24) và Bổ đề 2.1 c), ta thu được

$$\int_{\frac{t}{2}}^t \|e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u)\|_3 ds \lesssim \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u \cdot \nabla u\|_{\frac{3}{2}} ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_3 \|\nabla u\|_3 ds \\
&\lesssim \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-2} ds \lesssim t^{-\frac{3}{2}} \text{ với } t \geq 2t_0. \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Kết hợp các bất đẳng thức (3.31) và (3.32), ta có

$$\|B(u, u)(t)\|_3 = \left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) ds \right\|_3 \lesssim t^{-1} \text{ với } t \geq 2t_0$$

và do đó $\|u(t)\|_3 = O(t^{-1})$.

c) Để chứng minh phần này, ta cần Bổ đề 3.16. Ta chứng minh rằng

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}(\frac{3}{p}-1)} \|e^{t\Delta}|u_0|\|_3 = 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&t^{\frac{1}{2}(\frac{3}{p}-1)} \|e^{t\Delta}|u_0|\|_3 \\
&\leq t^{\frac{1}{2}(\frac{3}{p}-1)} \|e^{t\Delta}(\mathcal{X}_n|u_0|)\|_3 + t^{\frac{1}{2}(\frac{3}{p}-1)} \|e^{t\Delta}((1-\mathcal{X}_n)|u_0|)\|_3 \\
&\leq \frac{t^{\frac{3}{2p}-2}}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} * (\mathcal{X}_n|u_0|) \right\|_3 + \frac{t^{\frac{3}{2p}-2}}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} * ((1-\mathcal{X}_n)|u_0|) \right\|_3. \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, áp dụng Bổ đề 1.6 và Bổ đề 3.16, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{t^{\frac{3}{2p}-2}}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} * (\mathcal{X}_n|u_0|) \right\|_3 &\leq \frac{t^{\frac{3}{2p}-2}}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} * (\mathcal{X}_n|u_0|) \right\|_{L^{3,1}} \\
&\leq \frac{t^{\frac{3}{2p}-2}}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} \right\|_{L^{\frac{3p}{4p-3}, \frac{r}{r-1}}} \|\mathcal{X}_n|u_0|\|_{L^{p,r}} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} \right\|_{L^{\frac{3p}{4p-3}, \frac{r}{r-1}}} \|\mathcal{X}_n|u_0|\|_{L^{p,r}} \\
&= C \|\mathcal{X}_n|u_0|\|_{L^{p,r}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.34)
\end{aligned}$$

với n đủ lớn. Cố định n , lấy p^* sao cho $1 < p^* < p$, áp dụng Bổ đề 1.6 ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{t^{\frac{3}{2p}-2}}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} * ((1-\mathcal{X}_n)|u_0|) \right\|_3 \\
&\leq \frac{t^{\frac{3}{2p}-2}}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} \right\|_{L^{\frac{3p^*}{4p^*-3}, \frac{p^*}{p^*-1}}} \|(1-\mathcal{X}_n)|u_0|\|_{L^{p^*,r}} \\
&= t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*})} \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \left\| e^{\frac{-|\cdot|^2}{4t}} \right\|_{L^{\frac{3p^*}{4p^*-3}, \frac{p^*}{p^*-1}}} \|(1-\mathcal{X}_n)|u_0|\|_{L^{p^*,r}}
\end{aligned}$$

$$\leq C_1 t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)} \|n(1 - \mathcal{X}_n)\|_{L^{p^*,r}} = C_2(n) t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.35)$$

với mọi $t > t^*$ và $t^* = \left(\frac{\varepsilon}{2C_2(n)}\right)^{\frac{2pp^*}{3(p^*-p)}}$. Từ các bất đẳng thức (3.33), (3.34) và (3.35), ta kết luận rằng

$$t^{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{p}-1\right)} \|e^{t\Delta}|u_0|\|_3 < \varepsilon \text{ với mọi } t > t^*.$$

(d) Từ Bổ đề 1.6 suy ra hai đại lượng $\| |u_0| \|_{\dot{B}_3^{-2\alpha,\infty}(\mathbb{R}^3)}$ và $\sup_{t \geq 0} t^\alpha \|e^{t\Delta}|u_0|\|_3$ tương đương.

Định lý được chứng minh. □

KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Trong chương này, ta nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong $\mathbb{R}^3$. Giả sử $u \in C([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$ là một nghiệm mạnh của bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu u_0 . Ta chứng minh rằng nếu $u \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$ là nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu u_0 thì nghiệm u có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm của phương trình truyền nhiệt có giá trị ban đầu $|u_0|$. Phần chứng minh của kết quả dựa trên lý thuyết về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương và nghiệm mạnh toàn cục, tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh khi giá trị ban đầu đủ nhỏ và tính duy nhất nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ ĐỀ NGHỊ

Luận án đã nghiên cứu về tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát không bị chặn Ω và trong cả không gian $\mathbb{R}^3$. Cụ thể, luận án của chúng tôi đã đạt được ba kết quả chính sau:

1. Tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát: Giả sử u là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ và u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh. Khi đó, ta chứng minh được rằng nghiệm yếu u là chính quy nếu động năng $\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2$ liên tục Hölder trái với số mũ Hölder $\frac{1}{2}$ và nửa chuẩn Hölder đủ nhỏ. Kết quả này mở rộng các kết quả trước trong [22, 24, 25, 28] với Ω là miền bị chặn hoặc $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 . Kết quả thứ hai trong phần này ta chứng minh nếu $u(t) \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|A^{\frac{1}{4}}(u(t-\delta) - u(t))\|_2 < C$ với mọi $t \in [0, T)$ và với C là hằng số dương đủ nhỏ thì u là chính quy trong $[0, T)$. Kết quả này đã được công bố trên bài báo [1] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

2. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát: Giả sử u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes không dừng trong miền tổng quát của $\mathbb{R}^3$. Ta chứng minh rằng tốc độ hội tụ theo thời gian của nghiệm yếu u với chuẩn $L^2(\Omega)$ bằng tốc độ hội tụ của nghiệm trong hệ Stokes thuần nhất với cùng giá trị ban đầu và số mũ hội tụ nhỏ hơn $\frac{3}{4}$. Hơn nữa, ta chỉ ra rằng, khi thêm một số điều kiện của giá trị ban đầu thì nghiệm yếu u dần đến nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với giá trị ban đầu u_0 khi thời gian t dần tới vô cùng. Kết quả này đã được công bố trên bài báo [2] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

3. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong cả không gian $\mathbb{R}^3$: Giả sử $u \in C([0, T); L^3(\mathbb{R}^3))$ là một nghiệm mạnh của bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu u_0 . Ta chứng minh rằng nghiệm u có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với

nghiệm phương trình truyền nhiệt có giá trị ban đầu $|u_0|$.

Phần chứng minh của kết quả dựa trên lý thuyết về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương và nghiệm mạnh toàn cục, tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh khi giá trị ban đầu đủ nhỏ và tính duy nhất nghiệm. Kết quả này đã được công bố trên bài báo [3] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo cho kết quả của luận án như sau:

- Nghiên cứu tính chính quy của nghiệm yếu trong các không gian khác hoặc làm nhẹ điều kiện của giả thiết.
- Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes với các điều kiện khác.
- Nghiên cứu các bài toán về hệ phương trình Navier-Stokes theo cách tiếp cận của giải tích điều hòa.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Duong V. T. T., Khai D. Q., Tri N. M. (2020), “On regularity of weak solutions for the Navier-Stokes equations in general domains ”, *Mathematische Nachrichten*, accepted.

[2] Duong V. T. T., Khai D. Q. (2020), “ L^2 - decay of weak solutions for the Navier-Stokes equations in general domains ”, *Journal of Science and Technology Thai Nguyen University*, 225(02), pp. 45-51.

[3] Duong V.T.T., Khai D.Q., Tri N.M. (2020), “Time decay rates of the L^3 norm for strong solutions to the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$ ”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 485(2), pp. 81-98.

Tài liệu tham khảo

- [1] Bergh J., Löfström J. (1976), *Interpolation Spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin-New York.
- [2] Benameur J. (2015), “Long time decay to the Lei-Lin solution of 3D Navier-Stokes equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 422, pp. 424-434.
- [3] Borchers W., Miyakawa T. (1988), “ L^2 - decay for the Navier-Stokes flows in halfspaces”, *Mathematische Annalen*, 282, pp. 139-155.
- [4] Borchers W., Miyakawa T. (1990), “Algebraic L^2 -decay for Navier-Stokes flows in exterior domains”, *Acta Mathematica*, 165, pp. 189-227.
- [5] Borchers W., Miyakawa T. (1992), “ L^2 -decay for Navier-Stokes flows in unbounded domains, with application to exterior stationary flows”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 118, pp. 273-295.
- [6] Bourdaud G. (1988), “Réalisation des espaces de Besov homogènes”, *Arkiv för Matematik*, 26(1), pp. 41-54.
- [7] Bourdaud G. (1993), *Ce qu’il faut savoir sur les espaces de Besov*, Prépublication de l’Université de Paris 7.
- [8] Browder F.E. (1964), “Non-linear equations of evolution”, *Annals of Mathematics. Second Series*, 80, pp. 485–523.
- [9] Butzer P. L., Berens H. (1967), *Semi-group of Operator and Approximation*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 145 Springer-Verlag, New York.

- [10] Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L. (1982), “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 35, pp. 771-837.
- [11] Cannone M. (1995), *Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes*, With a preface by Yves Meyer, Diderot Editeur, Paris.
- [12] Cannone M. (1997), “A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations”, *Revista Matemática Iberoamericana*, 13(3), pp. 515-541.
- [13] Cannone M., Planchon F. (1999), “On the non stationary Navier-Stokes equations with an external force”, *Advances in Differential Equations*, 4(5), pp. 697-730.
- [14] Cannone M., Karch G. (2002), “Incompressible Navier-Stokes equations in abstract Banach spaces. Tosio Kato’s method and principle for evolution equations in mathematical physics”, *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*, pp. 27-41.
- [15] Cannone M. (2004), “Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations”, *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, Vol. III, North-Holland, Amsterdam*, pp. 161-244.
- [16] Chemin J. Y. (2009), “Remarque sur l’existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 26(2), pp. 599-624.
- [17] Chen Zhi-Min (1991), “A sharp decay result on strong solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space”, *Communications in Partial Differential Equations*, 16, pp. 801-820.
- [18] Constantin P. (1995), “A few results and open problems regarding incompressible fluids”, *Notices of the AMS*, 42(6), pp. 658–663.
- [19] Dubois S. (2003), “Uniqueness for some Leray-Hopf solutions to the Navier-Stokes equations”, *Journal of Differential Equations*, 189, pp. 99-147.

- [20] Farwig R., Kozono H., Sohr H. (2005), “An L^q -approach to Stokes and Navier-Stokes equations in general domains”, *Acta Mathematica*, 195, pp. 21-53.
- [21] Farwig R., Kozono H., Sohr H. (2007), “On the Helmholtz decomposition in general unbounded domains”, *Archiv der Mathematik*, 88, pp. 239-248.
- [22] Farwig R., Kozono H., Sohr H. (2008), “Criteria of local in time regularity of the Navier-Stokes equations beyond Serrin’s condition”, *Banach Center Publications, Warszawa*, 81, pp. 175-184.
- [23] Farwig R., Kozono H., Sohr H. (2009), “On the Stokes operator in general unbounded domains”, *Hokkaido Mathematical Journal*, 38, pp. 111-136.
- [24] Farwig R., Kozono H., Sohr H. (2009), “Energy-based regularity criteria for the Navier-Stokes equations”, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 11, pp. 428-442.
- [25] Farwig R., Kozono H., Sohr H. (2010), “Regularity of weak solutions for the Navier-Stokes equations via energy criteria”, *Rannacher R., Sequeira A. (eds) Advances in Mathematical Fluid Mechanics*, Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 215-227.
- [26] Farwig R., Sohr H. (2010), “On the existence of local strong solutions for the Navier-Stokes equations in completely general domains”, *Nonlinear Analysis*, 73, pp. 1459-1465.
- [27] Farwig R., Sohr H., Varnhorn W. (2012), “Extensions of Serrin’s uniqueness and regularity conditions for the Navier-Stokes equations”, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 14, pp. 529-540.
- [28] Farwig R., Riechwald P. F. (2016), “Regularity criteria for weak solutions of the Navier-Stokes system in general unbounded domains”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S*, 9(1), pp. 157-172.
- [29] Fefferman C. L. (2002), “Existence and uniqueness of the Navier-Stokes equation”, [http : //www.claymath.org/Millenniumprizeproblems/](http://www.claymath.org/Millenniumprizeproblems/).

- [30] Frazier M., Jawerth B., Weiss G. (1991), “Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces”, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 79, AMS, Providence.
- [31] Friedlander S., Pavlović N. (2004), “Remarks concerning a modified Navier-Stokes equation”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 10(1), pp. 269-288.
- [32] Fujigaki Y., Miyakawa T. (2001), “Asymptotic profiles of non stationary incompressible Navier-Stokes flows in the half-space”, *Methods and Applications of Analysis*, 8, pp. 121-158.
- [33] Gallagher I., Iftimie D., Planchon F. (2002), “Non-explosion en temps grand et stabilité de solutions globales des équations de Navier-Stokes”, *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 334(4), pp. 289-292.
- [34] Gallagher I., Iftimie D., Planchon F. (2003), “Asymptotics and stability for global solutions to the Navier-Stokes equations”, *Université de Grenoble. Annales de l’Institut Fourier*, 53, pp. 1387-1424.
- [35] Giga Y. (1981), “Analyticity of the semigroup generated by the Stokes operator in L^r -spaces”, *Mathematische Zeitschrift*, 178, pp. 297-329.
- [36] Giga Y. (1985), “Domains of fractional powers of the Stokes operator in L^r -spaces”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 89, pp. 251-265.
- [37] Grafakos L. (2014), *Modern Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, 250, Springer, New York.
- [38] Han Pigong (2010), “Asymptotic behavior for the Stokes flow and Navier-Stokes equations in half spaces”, *Journal of Differential Equations*, 249, pp. 1817-1852.
- [39] He C., Hsiao L. (2002), “The decay rates of strong solutions for Navier-Stokes equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 268, pp. 417-425.

- [40] Hopf E. (1951), “Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen”, *Mathematische Nachrichten*, 4, pp. 213-231.
- [41] Kajikiya R., Miyakawa T. (1986), “On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ ”, *Mathematische Zeitschrift*, 192, pp. 135-148.
- [42] Kato T., Fujita H. (1962), “On the non-stationary Navier-Stokes system”, *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, 32, pp. 243-260.
- [43] Fujita H., Kato T. (1964), “On the Navier-Stokes initial value problem I”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16, pp. 269-315.
- [44] Kato T. (1984), “Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions”, *Mathematische Zeitschrift*, 187, pp. 471-480.
- [45] Kato T. (1992), “Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces”, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 22, pp. 127-155.
- [46] Khai D. Q., Tri N. M. (2014), “Solutions in mixed-norm Sobolev-Lorentz spaces to the initial value problem for the Navier-Stokes equations”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 417, pp. 819-833.
- [47] Khai D. Q., Tri N. M. (2016), “Well-posedness for the Navier-Stokes equations with datum in Sobolev-Fourier-Lorentz spaces”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 437, pp. 754-781.
- [48] Khai D. Q., Tri N. M. (2017), “Well-posedness for the Navier-Stokes equations with data in homogeneous Sobolev-Lorentz spaces”, *Nonlinear Analysis*, 149, pp. 130-145.
- [49] Khai D. Q., Tri N. M. (2016), “On the initial value problem for the Navier-Stokes equations with the initial datum in critical Sobolev and Besov spaces”, *Journal of Mathematical Sciences University of Tokyo*, 23, pp. 499-528.

- [50] Khai D. Q. (2017), “Well-posedness for the Navier-Stokes Equations with datum in the Sobolev spaces”, *Acta Mathematica Vietnamica*, 42, pp. 431-443.
- [51] Koch H., Tataru D. (2001), “Well-posedness for the Navier-Stokes equations”, *Advances in Mathematics*, 157(1), pp. 22-35.
- [52] Kozono H. , Ogawa T. (1994), “Global strong solution and its decay properties for the Navier-Stokes equations in three dimensional domains with non-compact boundaries”, *Mathematische Zeitschrift*, 216, pp. 1-30.
- [53] Kozono H., Sohr H. (2010), “On the existence of local strong solutions for the Navier-Stokes equations in completely general domains”, *Nonlinear Analysis*, 73, pp. 1459-1465.
- [54] Lemarie-Rieusset P. G. (1999), “Weak infinite-energy solutions for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$ ”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. Série I. Mathématique*, 328, pp. 1133-1138.
- [55] Lemarie-Rieusset P. G. (2002), “Recent Developments in the Navier-Stokes Problem”, *Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL*, 431, pp. 395.
- [56] Leray J. (1933), “Etudes de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique”, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série*, 12, pp. 1-82.
- [57] Leray J. (1934), “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace”, *Acta Mathematica*, 63, pp. 193-248.
- [58] Lin F. H. (1998), “A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 51, pp. 240-257.
- [59] Lions P. L. (1996), *Mathematical Topics in Fluid Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, vol. 1.

- [60] Masuda K. (1984), “Weak solutions of the Navier-Stokes equations”, *The Tohoku Mathematical Journal*, 36, pp. 623-646.
- [61] Monguzzi A., Peloso M., Salvatori M. (2020), “Fractional Laplacian, homogeneous Sobolev spaces and their realizations”, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*.
- [62] Peetre J. (1976), *New Thoughts on Besov Spaces*, Duke University Mathematics Series.
- [63] Sawada O. (2005), “On analyticity rate estimates of the solutions to the Navier-Stokes equations in Bessel-potential spaces”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 312, pp. 1-13.
- [64] Schonbek M.E. (1985), “ L^2 -decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 88, pp. 209-222.
- [65] Schonbek M.E. (1995), “Large time behaviour of solutions to the Navier-Stokes equations in H^m spaces”, *Communications in Partial Differential Equations*, 20, pp. 103-117.
- [66] Serrin J. (1963), *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Problems, Univ. Wisconsin Press, Nonlinear problems, Ed. R. E. Langer, pp. 69–98.
- [67] Smale S. (1998), “Mathematical problems for the next century”, *The Mathematical Intelligencer*, 20(2), pp. 7-15.
- [68] Sohr H. (2001), *The Navier-Stokes Equations, An Elementary Functional Analytic Approach*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Verlag, Basel.
- [69] Temam R. (2001), *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, reprint of the 1984 edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI.
- [70] Triebel H. (1992), *Theory of Function Spaces II*, Monograph in mathematics, Birkhäuser.

- [71] Triebel H. (2010), *Theory of Function Spaces*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel.
- [72] Ukai S. (1987), “A solution formula for the Stokes equation in $\mathbb{R}_+^n$ ”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 40, pp. 611-621.
- [73] Wiegner M. (1987), “Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$ ”, *The Journal of the London Mathematical Society*, 35, pp. 303-313.
- [74] Yosida K. (1980), *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Heidelberg.