ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ THỊ THÙY DƯƠNG

TÍNH CHÍNH QUY VÀ DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH NAVIER-STOKES

Ngành: Toán Giải tích
Mã số: 946 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN

THÁI NGUYÊN - 2021

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Người hướng dẫn khoa học: GS.TSKH. Nguyễn Minh Trí

Phản biện 1: .....
Phản biện 2: .....
Phản biện 3: .....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng bảo vệ luận án cấp Trường họp tại: Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên.

Vào hồi ..... giờ ..... ngày ..... tháng ..... năm 2021

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Trung tâm học liệu Đại học Thái Nguyên
- Thư viện trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên

Mở đầu

1. Lịch sử nghiên cứu và lý do chọn đề tài

Các phương trình đạo hàm riêng cổ điển được xây dựng và nghiên cứu chuyên sâu từ đầu thế kỷ XIX và đại diện cho nền tảng kiến thức về sóng, sự truyền nhiệt, thủy động lực học và các bài toán vật lý khác. Việc nghiên cứu các bài toán thực tế đó đã thúc đẩy các nhà toán học tìm tòi và áp dụng các phương pháp mới trong nghiên cứu toán học thuần túy để giải các bài toán phương trình đạo hàm riêng. Đây là một đề tài lớn có liên quan mật thiết với các ngành khoa học khác như vật lý, cơ học, hóa học, khoa học kỹ thuật và có rất nhiều ứng dụng cho các bài toán công nghiệp. Mặc dù lý thuyết về phương trình đạo hàm riêng đã trải qua một sự phát triển lớn trong thế kỷ XX nhưng vẫn còn một số bài toán đến nay vẫn chưa thể giải quyết, chủ yếu liên quan đến sự tồn tại toàn cục, tính duy nhất nghiệm, độ trơn cũng như dáng điệu tiệm cận của nghiệm.

Một trong những dạng phương trình đạo hàm riêng nổi tiếng và rất được sự quan tâm của các nhà toán học là phương trình Parabolic phi tuyến. Nhắc đến các dạng phương trình Parabolic phi tuyến, chúng ta không thể không nhắc đến một trong bảy bài toán thiên niên kỷ nổi tiếng, đó là hệ phương trình Navier-Stokes. Nó là phương trình mô tả một chuyển động của một chất lỏng, ví dụ như dòng chảy của đại dương, hoặc việc tạo ra một xoáy nước nhỏ bên trong các dòng chảy.

Câu hỏi về tính duy nhất và chính quy cho các phương trình Navier-Stokes cũng vẫn là một trong 18 bài toán mở của thế kỷ này. Cho đến nay vẫn chưa có lời giải về tính duy nhất nghiệm ngoại trừ trong các khoảng thời gian nhỏ và người ta đã đặt câu hỏi liệu các phương trình Navier-Stokes có thực sự mô tả các dòng chảy chung hay không? Tuy nhiên, họ cũng không chứng minh được chúng không duy nhất. Có thể các phương pháp được sử dụng cho đến nay chưa phù hợp và hệ phương trình Navier-Stokes cần một cách tiếp cận khác.

Tính duy nhất nghiệm của các phương trình là nền tảng của việc nghiên cứu các bài toán chuyển động trong phương trình đạo hàm riêng. Nếu có nhiều hơn một nghiệm cùng thỏa mãn một điều kiện ban đầu thì người ta nói rằng không gian của các nghiệm quá lớn. Tính duy nhất nghiệm có thể được khôi phục nếu loại trừ các nghiệm phi vật lý. Chính xác hơn, một kết quả không duy nhất sẽ mâu thuẫn với việc nghiên cứu các bài toán cơ học chất lỏng và việc đưa ra một mô hình phức tạp hơn để nghiên cứu chuyển động của chất lỏng nhớt là thực sự cần thiết. Nếu bài toán về tính duy nhất liên quan đến khía cạnh dự đoán của lý thuyết thì vấn đề tồn tại nghiệm chạm đến câu hỏi về

tính tự nhất quán của mô hình vật lý liên quan đến các phương trình Navier-Stokes, nếu không có sự tồn tại nghiệm thì lý thuyết là không có ý nghĩa.

Trong thế kỷ XX, thay vì các công thức tường minh trong các trường hợp đặc biệt, bài toán về nghiệm của phương trình Navier-Stokes đã được nghiên cứu dưới dạng tổng quát của chúng. Điều này dẫn đến khái niệm về nghiệm yếu. Tuy nhiên, với bài toán nghiệm yếu, chỉ có sự tồn tại của các nghiệm có thể được đảm bảo. Một bài toán khác liên quan đến hệ phương trình Navier-Stokes cũng thu hút sự quan tâm của các nhà khoa học trong những năm gần đây là bài toán về dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian dần đến vô cùng. Bởi vì khi biết dáng điệu tiệm cận của nghiệm, ta có thể dự đoán được xu thế phát triển của hệ trong tương lai và từ đó có những đánh giá, điều chỉnh thích hợp.

Chính vì những lý do nêu trên, chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: ***"Tính chính quy và dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes"***.

2. Mục đích và đối tượng nghiên cứu

• Mục đích nghiên cứu:

a. Nghiên cứu bài toán biên ban đầu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát với các nội dung sau:

- Tính chính quy của nghiệm yếu.
- Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu.

b. Nghiên cứu bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes trong cả không gian ba chiều với nội dung sau:

- Dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh.

• Đối tượng nghiên cứu:

- Đối tượng nghiên cứu của luận án là bài toán biên ban đầu và bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát và trong cả không gian ba chiều.

3. Phương pháp nghiên cứu

- Để nghiên cứu tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát chúng tôi sử dụng lý thuyết về sự tồn tại của nghiệm mạnh địa phương và tính duy nhất của nghiệm mạnh trong miền tổng quát cùng một số ước lượng nửa nhóm.

- Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát chúng tôi sử dụng lý thuyết về tính duy nhất và tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh trong miền tổng quát, định lý nhúng cùng một số ước lượng nửa nhóm.

- Để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều chúng tôi sử dụng định lý về sự tồn tại của nghiệm mạnh địa phương, tính duy nhất của nghiệm mạnh trong $\mathbb{R}^3$, tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh toàn cục khi giá trị ban đầu đủ nhỏ cùng một số công cụ của giải tích điều hòa.

4. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án tập trung vào việc nghiên cứu tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát không bị chặn và trong cả không gian ba chiều. Cụ thể luận án trình bày các kết quả chính sau:

- Kết quả về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát trong không gian ba chiều chứng minh rằng nghiệm yếu u là chính quy tại thời điểm $t \in (0, T)$ nếu u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh và động năng liên tục Hölder trái tại $t \in (0, T)$ với số mũ Hölder $\frac{1}{2}$ và nửa chuẩn Hölder đủ nhỏ.

- Kết quả về dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát chứng minh rằng nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với cùng giá trị ban đầu và số mũ hội tụ nhỏ hơn $\frac{3}{4}$. Hơn nữa, ta cũng chỉ ra rằng, khi thêm một số điều kiện của giá trị ban đầu thì nghiệm yếu u trùng với nghiệm của hệ Stokes thuần nhất khi thời gian t dần tới vô cùng.

- Kết quả về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều chứng minh rằng nghiệm mạnh u của hệ phương trình Navier-Stokes có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm phương trình truyền nhiệt với giá trị ban đầu $|u_0|$.

5. Cấu trúc luận án

Về bố cục, luận án của chúng tôi gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày về một số kiến thức cơ sở.

Chương 2 trình bày hai kết quả về tính chất của nghiệm cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát. Kết quả đầu tiên về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát. Kết quả thứ hai trình bày về dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát.

Chương 3 trình bày về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều.

Các kết quả của chính của luận án đã được công bố trên ba bài báo và được báo cáo tại:

• Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên.

• Seminar của phòng Giải tích, Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

• Hội nghị Quốc tế về Giải tích phức, Phương trình đạo hàm riêng và ứng dụng, 02-09/06/2019 tại Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.

Tổng quan luận án

Các kết quả về tính chất của nghiệm như sự tồn tại, tính duy nhất, tính chính quy và dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes đã được đề cập khá nhiều trong các công trình toán học trong và ngoài nước những năm gần đây.... Tuy nhiên việc phát triển các kết quả trên cho trường hợp miền không bị chặn vẫn còn là một hướng nghiên cứu mới đòi hỏi những cách tiếp cận và công cụ kỹ thuật mới trong chứng minh. Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu hai tính chất của nghiệm là tính chính quy và dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes trong một miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

Bài toán về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes đã thu được các kết quả đầu tiên từ năm 1982 bởi nhóm các tác giả L. Caffarelli, R. Kohn và L. Nirenberg và được mở rộng trong rất nhiều công trình của các nhà toán học trên thế giới trong những năm gần đây như các tác giả H. Sohr, H. Kozono, R. Farwig, W. Varnhorn, P. F. Riechwald .... Tuy nhiên hầu hết các kết quả mới chỉ thu được cho các miền bị chặn trong không gian $\mathbb{R}^3$.

Năm 2008 và 2009, nhóm các tác giả R. Farwig, H. Kozono và H. Sohr đã thu được kết quả về tính chính quy của nghiệm yếu nhưng với Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ và biên $\partial\Omega$ thuộc lớp $C^{2,1}$. Xét nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \text{div } u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0,x) = u_0, \end{cases} \tag{0.1}$$

với $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và nghiệm yếu u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_{t'}^{t} \|\nabla u(\tau)\|_2^2 \mathrm{d}\tau \leq \frac{1}{2}\|u(t')\|_2^2 \tag{0.2}$$

với hầu hết $t' \in [0,T)$ và với mọi $t \in [t',T)$.

Các tác giả đã chứng minh được nghiệm yếu u là chính quy trong khoảng (a,b) nếu

động năng liên tục Hölder trái với số mũ $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, nghĩa là

$$\underline{\lim}_{\delta \to 0^+} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t_0 - \delta)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \right|}{\delta^\alpha} < \infty. \tag{0.3}$$

Năm 2010, các tác giả R. Farwig, H. Kozono và H. Sohr đã tiếp tục phát triển kết quả của họ, trong đó điều kiện (0.3) trên được thay bởi điều kiện yếu hơn

$$\underline{\lim}_{\delta \to 0^+} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t_0 - \delta)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \right|}{\delta^{\frac{1}{2}}} < C$$

với số mũ Hölder $\alpha = \frac{1}{2}$ và miền Ω bị chặn.

Năm 2016, R. Farwig và P. F. Riechwald đã tiếp tục mở rộng kết quả của các tác giả trước từ miền bị chặn sang miền tổng quát. Họ đã chứng minh được tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes với Ω là miền tổng quát trong không gian ba chiều nhưng cần thêm điều kiện trên biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2.

Giả sử u là nghiệm yếu (theo nghĩa Leray) của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát, $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2 và u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh (0.2). Cho $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và $0 < T < \infty$. Khi đó, tồn tại hằng số dương $\eta = \eta(\Omega, T)$ sao cho: Nếu tại thời điểm $t \in (0, T)$ và với $\mu > 0$, động năng liên tục Hölder trái với số mũ $\frac{1}{2}$ theo nghĩa

$$\sup_{0<\delta\leq\mu} \frac{\left| \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(t-\delta)\|_2^2 \right|}{\delta^{\frac{1}{2}}} \leq \eta$$

thì t là điểm chính quy của nghiệm yếu u hay $u \in L^4\left(t-\delta, t+\delta; \tilde{L}^6(\Omega)\right)$.

Từ kết quả trên, ta luôn chứng minh được rằng động năng liên tục Hölder trái với số mũ $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ theo nghĩa

$$\sup_{0<\delta\leq\mu} \frac{\left| \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(t-\delta)\|_2^2 \right|}{\delta^{\alpha}} < \infty$$

với $\eta > 0$ đủ nhỏ, trong đó

$$\bar{L}^q(\Omega) := \begin{cases} L^q(\Omega) + L^2(\Omega) & \text{nếu } 1 \leq q < 2 \\ L^q(\Omega) \cap L^2(\Omega) & \text{nếu } 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Do toán tử Stokes thông thường A_q không xác định trên tất cả các miền không bị chặn nên R. Farwig và P. F. Riechwald phải thay thế không gian $L^q(\Omega), q \geq 2$ bằng không gian

$\tilde{L}^q(\Omega) = L^q(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ để đảm bảo cho các đánh giá của toán tử Stokes trong miền tổng quát.

Chuẩn tương ứng trong không gian $\bar{L}^q$ được xác định bởi

$$\|u\|_{\bar{L}^q} := \max\{\|u\|_q, \|u\|_2\} \text{ nếu } q \geq 2$$

và

$$\|u\|_{\bar{L}^q} := \inf\left\{\|u_1\|_q + \|u_2\|_2 : u = u_1 + u_2\right\} \text{ nếu } 1 \leq q < 2$$

trong đó $u_1 \in L^q(\Omega), u_2 \in L^2(\Omega)$.

Năm 2012, các tác giả R. Farwig, H. Sohr và W. Varnhorn đã thu được kết quả về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes bằng cách phát triển thêm điều kiện mới dựa trên những tính chất của nửa nhóm Stokes. Giả sử $u \in L^\infty_{\text{loc}}\big([0,\infty), D(A^{\frac{1}{4}})\big)$ là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (0.1) trong miền $[0,T) \times \Omega$ với $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh (0.2). Khi đó:
a) Nghiệm yếu u là duy nhất, nghĩa là nếu tồn tại một nghiệm yếu khác $v \in L^\infty_{\text{loc}}\left([0,T); D\left(A^{1/4}\right)\right)$ với $v(0) = u_0$ thì $u = v$.
b) Nghiệm yếu u thỏa mãn điều kiện Serrin địa phương phải $L^s\left(L^q\right)$ trong khoảng $[0,T)$ với $s = 8$ và $q = 4$ nghĩa là $u \in L^8_{\text{loc}}\left(t_0, t_0+\delta; L^4(\Omega)\right)$ với mọi $(t_0, t_0+\delta) \subset [0,T)$ và $\delta = \delta(t_0) > 0$.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi xin giới thiệu một số kết quả đã đạt được với các bài toán về dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes. Bài toán về dáng điệu tiệm cận của nghiệm trong $L^2(\Omega)$ cho hệ phương trình Navier-Stokes được đưa ra lần đầu tiên năm 1934 bởi J. Leray trong không gian $\mathbb{R}^3$. Khẳng định đầu tiên về tốc độ hội tụ nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes được chứng minh bởi T. Kato năm 1984 trong trường hợp $\Omega = \mathbb{R}^d$, $d = 3, 4$. Từ nghiên cứu của ông đã phát triển các nghiên cứu cho nghiệm mạnh trong không gian L^p tổng quát. Kết quả của M. E. Schonbek đã áp dụng cho trường hợp Ω là nửa không gian trong $\mathbb{R}^d,\ d \geq 2$ hoặc một miền của $\mathbb{R}^d,\ d \geq 3$.

Năm 1986, các tác giả R. Kajikiya, T. Miyakawa đã tiếp tục phát triển kết quả về dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong $\mathbb{R}^d,\ d = 3, 4$. Với giá trị ban đầu $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^d)$, các tác giả đã chứng minh rằng tồn tại nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes thỏa mãn các tính chất sau:
(i) $\|u(t)\|_2 \to 0$ khi $t \to \infty$.
(ii) Nếu $u_0 \in L^2_\sigma(\mathbb{R}^d) \cap L^r_\sigma(\mathbb{R}^d)$ với $1 \leqq r < 2$ thì

$$\|u(t)\|_2 \leq Ct^{-\frac{\frac{d}{r} - \frac{d}{2}}{2}} \quad \text{với mọi } t > 0,$$

trong đó C là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào d, r và u_0.

Năm 1992, W. Borchers và T. Miyakawa đã cải tiến kết quả trong cho trường hợp miền không bị chặn bất kỳ, họ đã chỉ ra rằng nếu $\|e^{-tA}u_0\|_2 = O(t^{-\alpha})$ với $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ thì

$\|u(t)\|_2 = O(t^{-\alpha})$. Xét hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0 & (x \in \Omega, t > 0) \\ \text{div } u = 0 & (x \in \Omega, t \geqq 0) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

trong đó $u = (u_1, u_2, u_3)$ và áp suất p là các đại lượng chưa biết. Ta có kết quả chính của W. Borchers và T. Miyakawa như sau.

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ là một miền không bị chặn bất kỳ và $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$. Khi đó, tồn tại một nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes sao cho
(i) $\|u(t)\|_2 \to 0 \quad$ khi $t \to \infty$.
(ii) Nếu $\left\|e^{-tA}u_0\right\|_2 = O\left(t^{-\alpha}\right)$ với $\alpha > 0$ thì

$$\|u(t)\|_2 = \begin{cases} O\left(t^{-\alpha}\right) & \text{nếu } \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ O\left(t^{\varepsilon - \frac{1}{2}}\right) & \text{nếu } \alpha \geq \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

trong đó $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$.

Bài toán thứ hai nghiên cứu trong luận án là bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier- Stokes trong không gian ba chiều. Xét phương trình tích phân sau

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(s)\mathrm{d}s.$$

Sự tồn tại toàn cục của nghiệm yếu đã được nghiên cứu lần dầu tiên bởi J. Leray năm 1934 và E. Hopf năm 1951. Năm 1964, bài toán về sự tồn tại nghiệm mạnh toàn cục của hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu nhỏ trong không gian Sobolev $\dot{H}^{1/2}$ được nghiên cứu bởi H. Fujita và T. Kato, sau đó được phát triển bởi J. Y. Chemin năm 2009.

Những năm gần đây, bài toán về sự tồn tại nghiệm toàn cục tiếp tục được phát triển trong một số không gian khác như không gian Sobolev-Lorentz, không gian Sobolev-Fourier-Lorentz, không gian Sobolev-Lorentz thuần nhất và không gian Besov bởi nhóm các tác giả N. M. Trí và Đ. Q. Khải trong thời gian từ năm 2014 đến năm 2017.

Năm 1984, T. Kato đã nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận của nghiệm trong không gian $L^q(\mathbb{R}^d)$ bằng cách áp dụng ước lượng $L^q - L^p$ cho nửa nhóm được sinh bởi toán tử Stokes. Tác giả đã chỉ ra rằng tồn tại $T > 0$ và một nghiệm duy nhất u thỏa mãn

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{q})}u \in BC([0,T); L^q) \text{ với } d \leq q \leq \infty,$$
$$t^{\frac{1}{2}(2-\frac{d}{q})}\nabla u \in BC([0,T); L^q) \text{ với } d \leq q \leq \infty,$$

khi $u_0 \in L^d(\mathbb{R}^d)$. Hơn nữa, khẳng định trên vẫn đúng với $T = \infty$ nếu $\|u_0\|_{L^d(\mathbb{R}^d)}$ đủ nhỏ.

Năm 1997, M. Cannone đã tổng quát hóa kết quả của T. Kato. Tác giả đã chỉ ra rằng nếu $u_0 \in L^d$ và $\|u_0\|_{\dot{B}_q^{\frac{d}{q}-1,\infty}}, (q > d)$ đủ nhỏ thì tồn tại duy nhất nghiệm u thỏa mãn

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{d}{q})}u \in BC([0,\infty); L^q) \text{ với } q \geq d.$$

Đối với bài toán dáng điệu của nghiệm mạnh trong một khoảng thời gian lớn, nếu $u \in C([0,\infty), X)$ là nghiệm toàn cục với $u_0 \in X$, trong đó X là $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ hoặc $L^3(\mathbb{R}^3)$ thì ta luôn có $\lim\limits_{t\to\infty}\|u(t)\|_X = 0$. Những kết quả này đã được chứng minh bởi I. Gallagher với $X = \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ và với $L^3(\mathbb{R}^3)$. Đối với trường hợp $X = L^3(\mathbb{R}^3)$, I. Gallagher đã chứng minh được kết quả như sau: Giả sử $u \in C_t\left(L^3(\mathbb{R}^3)\right)$ là một nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes. Xét bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian $\mathbb{R}^3$ sau đây

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \text{div } u = 0, \\ u(0,x) = u_0. \end{cases}$$

Khi đó, nghiệm toàn cục u của hệ phương trình Navier-Stokes dần đến 0 khi thời gian t dần đến vô cùng trong $L^3(\mathbb{R}^3)$, nghĩa là

$$\lim_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_3 = 0$$

và nghiệm này ổn định, nghĩa là tồn tại hằng số dương $\varepsilon(u)$ sao cho nếu $\|v_0 - u_0\|_3 < \varepsilon(u)$ thì nghiệm địa phương $v \in C_t\left(L^3(\mathbb{R}^3)\right)$ của hệ phương trình Navier-Stokes là nghiệm toàn cục với

$$\sup_{t\geqslant 0} \|v(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_3 < C(u)\|v_0 - u_0\|_3.$$

Từ các kết quả nghiên cứu trên, chúng ta thấy rằng vẫn còn nhiều vấn đề mở liên quan đến tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát và trong không gian ba chiều. Vì vậy, trong luận án này, chúng tôi sẽ trình bày các vấn đề mở sau:

- Nghiên cứu tính chính quy nghiệm cho bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát trong không gian ba chiều.

- Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm cho bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát trong không gian ba chiều.

- Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm cho bài toán Cauchy của hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 1 là chương có tính chất chuẩn bị trình bày những kiến thức cơ bản nhất và sử dụng cho việc chứng minh các kết quả nghiên cứu đạt được trong các chương sau của luận án. Cụ thể, Mục 1.1 trình bày các không gian hàm cần sử dụng và những bất đẳng thức cần thiết trong các không gian đó. Mục 1.2 trình bày về các toán tử cơ bản trong hệ phương trình Navier-Stokes và các ước lượng liên quan đến toán tử Stokes và nửa nhóm Stokes. Cuối cùng Mục 1.3 giới thiệu hệ phương trình Navier-Stokes và các lớp nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes được nghiên cứu trong luận án bao gồm: nghiệm yếu, nghiệm mạnh và nghiệm mềm.

Chương 2

Tính chính quy và dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát. Ở đây, chúng tôi thu được kết quả là các định lý về tính chính quy, dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Phương pháp chứng minh các định lý dựa trên lý thuyết về sự tồn tại của nghiệm mạnh địa phương và nghiệm mạnh toàn cục, một số tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u, v)$, định lý nhúng và một số ước lượng nửa nhóm Stokes.

Nội dung của chương này dựa trên các bài báo [1], [2] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

2.1. Tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

2.1.1 Đặt bài toán

Trong phần này, ta nghiên cứu bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát như sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \text{div } u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0, x) = u_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát, nghĩa là một tập con mở, liên thông và không bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ là biên của miền Ω, $[0,T), 0 < T \leq \infty$ là khoảng thời gian và u_0 là giá trị ban đầu tại thời điểm $t = 0$.

Định nghĩa 2.1. Một nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes (2.1) được gọi là *chính quy* trong khoảng $(a,b) \subseteq (0,T)$ nếu thỏa mãn điều kiện Serrin

$$u \in L^s_{\text{loc}}\big(a,b\,;L^q(\Omega)\big) \tag{2.2}$$

với $2 < s < \infty$, $3 < q < \infty$, $\dfrac{2}{s} + \dfrac{3}{q} = 1$.

Một thời điểm $t \in (0,T)$ được gọi là một *điểm chính quy* của nghiệm yếu u nếu tồn tại một khoảng $(a,b) \subseteq (0,T)$ sao cho u chính quy trong khoảng (a,b) với $a < t < b$.

Xét công thức nghiệm thỏa mãn phương trình tích phân sau

$$u(t) = e^{-tA}u_0 - A^{\frac{1}{2}}\int_0^t e^{-(t-\tau)A}A^{-\frac{1}{2}}\mathbb{P}(u\cdot\nabla u)\mathrm{d}\tau. \tag{2.3}$$

Ta biết rằng

$$u \in L^\infty\big(0,T;L^2_\sigma(\Omega)\big) \cap L^2_{\text{loc}}([0,T);W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)\big)$$

là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (2.1) với giá trị ban đầu u_0 nếu và chỉ nếu u là nghiệm của phương trình tích phân (2.3).

Nếu Ω là miền bị chặn thì luôn tồn tại nghiệm yếu u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_{t'}^t \|\nabla u(\tau)\|_2^2\mathrm{d}\tau \leq \frac{1}{2}\|u(t')\|_2^2 \tag{2.4}$$

với hầu hết $t' \in [0,T)$ và với mọi $t \in [t',T)$. Kết quả tương tự trong miền không bị chặn cũng được chứng minh bởi nhóm các tác giả R. Farwig, H. Kozono và H. Sohr năm 2005. Kết quả thu được trong miền không bị chặn này sẽ được áp dụng để chứng minh các kết quả chính dưới đây.

2.1.2 Các tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u,v)$ và nửa nhóm Stokes e^{-tA}

Đầu tiên, ta xác định không gian bổ trợ $\mathcal{K}^{\overline{s}}_{\tilde{s},T}$ gồm tất cả các hàm u sao cho

$$t^{\frac{\alpha}{2}}u \in BC\big([0,T);D(A^{\frac{\overline{s}}{2}})\big)$$

và

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{\alpha}{2}}\big\|A^{\frac{\overline{s}}{2}}u(t)\big\|_2 = 0 \tag{2.5}$$

với $-1 < \tilde{s} \leq \overline{s} < \infty$, $\alpha = \overline{s} - \tilde{s}$. Không gian bổ trợ $\mathcal{K}^{\overline{s}}_{\tilde{s},T}$ được xác định bởi chuẩn

$$\big\|u\big\|_{\mathcal{K}^{\overline{s}}_{\tilde{s},T}} := \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}}\big\|A^{\frac{\overline{s}}{2}}u(t)\big\|_2. \tag{2.6}$$

Trong trường hợp $\overline{s} = \tilde{s}$, để thuận tiện ta định nghĩa không gian $\mathcal{K}^{\overline{s}}_{\tilde{s},T}$ như một không gian con $BC\big([0,T); D(A^{\frac{\tilde{s}}{2}})\big)$ với điều kiện $u(t,x)$ thỏa mãn

$$\lim_{t\to 0}\big\|A^{\frac{\tilde{s}}{2}}u(t)\big\|_2 = 0.$$

Ta xác định

$$\mathcal{G}^{\overline{s}}_{\tilde{s},T} := \mathcal{K}^{\overline{s}}_{\tilde{s},T} \cap L^\infty\big(0,T; L^2_\sigma(\Omega)\big) \cap L^4\big([0,T); W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)\big).$$

Bổ đề 2.1. *Cho E và F là hai không gian định chuẩn sao cho $E\cap F$ là không gian Banach với chuẩn $\|x\|_{E\cap F} := \|x\|_E + \|x\|_F$. Giả sử rằng B là toán tử song tuyến tính từ $(E\cap F)\times(E\cap F)$ vào $E\cap F$ sao cho tồn tại một hằng số dương $\gamma > 0$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned}
&\|B(x,y)\|_E \le \gamma\|x\|_E\|y\|_E, \text{ với mọi } x,y\in E\cap F,\\
&\|B(x,y)\|_F \le \gamma\|x\|_E\|y\|_F, \text{ với mọi } x,y\in E\cap F,\\
&\|B(x,y)\|_F \le \gamma\|x\|_F\|y\|_E, \text{ với mọi } x,y\in E\cap F.
\end{aligned}$$

Khi đó, cố định $y \in E\cap F$ bất kỳ sao cho $\|y\|_E < \dfrac{1}{4\gamma}$, phương trình $x = y - B(x,x)$ có duy nhất nghiệm $\overline{x}\in E\cap F$ thỏa mãn $\|\overline{x}\|_E < \dfrac{1}{2\gamma}$.

Các bổ đề dưới đây sẽ nghiên cứu về toán tử song tuyến tính $B(u,v)$ được xác định bởi

$$B(u,v) = A^{\frac12}\int_0^t e^{-(t-\tau)A}A^{-\frac12}\mathbb{P}(u\cdot\nabla v)\mathrm{d}\tau.$$

Bổ đề 2.2. *Cho $s_1, s_2, s_3, \overline{s}$ và $T\in\mathbb{R}$ sao cho*

$$\begin{gathered}
-1 < s_1, s_2 \le 1,\ s_1+s_2 > 0,\ -1 < s_3 \le s_1+s_2-\frac12,\\
\max\big\{s_3, -\frac12\big\} \le \overline{s} < \frac32,\quad T>0.
\end{gathered}$$

Khi đó, toán tử B là song tuyến tính từ $\mathcal{G}^1_{s_1,T}\times\mathcal{G}^1_{s_2,T}$ vào $\mathcal{K}^{\overline{s}}_{s_3,T}$ và thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$\Big\|B(u,v)\Big\|_{\mathcal{K}^{\overline{s}}_{s_3,T}} \lesssim T^{\frac{s_1+s_2-s_3-1/2}{2}}\|u\|_{\mathcal{K}^1_{s_1,T}}\|v\|_{\mathcal{K}^1_{s_2,T}}. \tag{2.7}$$

Bổ đề 2.3. *Cho p và $s\in\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$\frac12 \le s < 1,\ \frac{2}{1+s} < p < \infty.$$

Khi đó, toán tử B là toán tử song tuyến tính từ

$$\Big(\mathcal{G}^1_{s,T}\cap L^p\big([0,T); D(A^{\frac12})\big)\Big)\times\Big(\mathcal{G}^1_{s,T}\cap L^p\big([0,T); D(A^{\frac12})\big)\Big) \text{ đến } L^p([0,T); D(A^{\frac12}))$$

và thỏa mãn bất đẳng thức sau

$$\Big\|B(u,v)\Big\|_{L^p\left([0,T);D(A^{\frac{1}{2}})\right)} \lesssim T^{\frac{s-1/2}{2}}\big\|u\big\|_{\mathcal{K}^1_{s,T}}\big\|v\big\|_{L^p\left([0,T);D(A^{\frac{1}{2}})\right)}$$

và

$$\Big\|B(u,v)\Big\|_{L^p\left([0,T);D(A^{\frac{1}{2}})\right)} \lesssim T^{\frac{s-1/2}{2}}\|v\|_{\mathcal{K}^1_{s,T}}\big\|u\big\|_{L^p\left([0,T);D(A^{\frac{1}{2}})\right)}.$$

Bổ đề 2.4. *Cho*

$$E = \mathcal{K}^1_{\frac{1}{2},T},\ F = \mathcal{G}^1_{\frac{1}{2},T} \cap \mathcal{G}^1_{0,T},$$

trong đó $0 < T \leq \infty$. Không gian F được xác định bởi chuẩn

$$\|u\|_F := \|u\|_{\mathcal{K}^1_{\frac{1}{2},T}} + \|u\|_{\mathcal{K}^1_{0,T}} + \|u\|_{L^4\left([0,T);D(A^{\frac{1}{2}})\right)} + \|u\|_{L^\infty\left([0,T);L^2_\sigma(\Omega)\right)}.$$

Khi đó, toán tử B là song tuyến tính từ $F \times F$ vào F thỏa mãn

$$\|B(u,v)\|_E \ \leq\ \eta\|u\|_E\,\|v\|_E, \quad \forall u,v \in F, \tag{2.8}$$

$$\|B(u,v)\|_F \ \leq\ \eta\|u\|_E\,\|v\|_F, \quad \forall u,v \in F, \tag{2.9}$$

$$\|B(u,v)\|_F \ \leq\ \eta\|u\|_F\,\|v\|_E, \quad \forall u,v \in F, \tag{2.10}$$

trong đó η là hằng số dương không phụ thuộc vào T.

Bổ đề 2.5.
a) *Nếu $u_0 \in D(A^{\frac{s}{2}}),\ 0 \leq s < 1$ thì $e^{-tA}u_0 \in \mathcal{K}^1_{s,\infty}$.*
b) *Nếu $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ thì $e^{-tA}u_0 \in F$.*

2.1.3 Tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

Trong phần này, chúng tôi trình bày hai kết quả về tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Kết quả đầu tiên mở rộng kết quả của nhóm các tác giả R. Farwig, H. Kozono, H. Sohr năm 2010 với Ω là miền bị chặn và mở rộng kết quả của R. Farwig, P. F. Riechwald năm 2016 với miền tổng quát nhưng biên $\partial\Omega$ thuộc lớp C^2. Để chứng minh kết quả chính ta cần định lý về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương và nghiệm mạnh toàn cục trong miền tổng quát sau đây.

Định lí 2.1. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát.*
a) *Khi đó, tồn tại hằng số dương D sao cho với mọi giá trị $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $0 < T \leq \infty$ thỏa mãn*

$$\sup_{0\leq t\leq T} t^{\frac{1}{4}}\big\|A^{\frac{1}{2}}e^{-tA}u_0\big\|_2 < D \tag{2.11}$$

hệ phương trình Navier-Stokes (2.1) có nghiệm mạnh u trong khoảng $[0,T)$ với các tính chất $u \in L^4\big([0,T);D(A^{\frac{1}{2}})\big)$ và $(1+t)^{\frac{1}{4}}u \in BC([0,T);D(A^{\frac{1}{4}}))$.

Đặc biệt, với $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ bất kỳ, luôn tồn tại $T = T(u_0)$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức (2.11) *đúng.*

b) *Cho $u_0 \in D(A^{\frac{s}{2}})$, $\dfrac{1}{2} \le s \le 1$. Khi đó, bất đẳng thức* (2.11) *đúng nếu*

$$T^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \left\| A^{\frac{s}{2}} u_0 \right\|_2 < D. \tag{2.12}$$

Từ điều kiện về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương và nghiệm mạnh toàn cục của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát trên ta thu được kết quả chính sau.

Định lí 2.2. *Giả sử Ω là miền tổng quát trong $\mathbb{R}^3$ và u là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes* (2.1) *thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh* (2.4) *trong khoảng $(0, T)$. Khi đó, nếu tồn tại hằng số dương C sao cho tại $t_0 \in (0, T)$ động năng thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\varliminf_{\delta \to 0^+} \frac{\left| \frac{1}{2} \|u(t_0 - \delta)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|u(t_0)\|_2^2 \right|}{\delta^{\frac{1}{2}}} < C, \tag{2.13}$$

thì u chính quy tại t_0.

Kết quả thứ hai trong phần này của chúng tôi chứng minh rằng nếu $u(t) \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $\varliminf_{\delta \to 0^+} \left\| A^{\frac{1}{4}} \big(u(t-\delta) - u(t)\big) \right\|_2 < C$ với mọi $t \in [0, T)$, với C là hằng số dương đủ nhỏ thì u là chính quy trong $[0, T)$. Phần chứng minh sử dụng lý thuyết về sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương và tính duy nhất nghiệm trong miền tổng quát.

Định lí 2.3. *Cho $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát. Khi đó, tồn tại hằng số dương C sao cho nếu u là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes* (2.1) *trong $(0, T)$ thỏa mãn $u(t) \in D(A^{\frac{1}{4}})$ với mọi $t \in [0, T)$ và*

$$\varliminf_{\delta \to 0^+} \left\| A^{\frac{1}{4}} \big(u(t-\delta) - u(t)\big) \right\|_2 < C \quad \text{với mọi} \quad t \in (0, T) \tag{2.14}$$

thì $u \in L^4_{\text{loc}}([0, T); L^6(\Omega))$.

Nhận xét 2.1. Trong Định lý 2.3, nếu hàm u liên tục trái từ $[0, T)$ đến $D(A^{\frac{1}{4}})$ thì $\varliminf_{\delta \to 0^+} \left\| A^{\frac{1}{4}} \big(u(t-\delta) - u(t)\big) \right\|_2 = 0$ với mọi $t \in [0, T)$. Vì vậy, điều kiện (2.14) là đúng.

2.2. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

Phần thứ hai của chương này, chúng tôi nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát với chuẩn trong $L^2(\Omega)$.

2.2.1 Các tính chất của toán tử Stokes trong miền tổng quát

Xét bài toán biên ban đầu của hệ phương trình Navier-Stokes (2.1) trong miền tổng quát như sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \\ \text{div } u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0,x) = u_0. \end{cases}$$

Ta xây dựng công thức của nghiệm yếu dưới dạng phương trình tích phân

$$u(t) = e^{-tA}u_0 - \int_0^t A^{\frac{1}{2}} e^{-(t-\tau)A} A^{-\frac{1}{2}} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \mathrm{d}\tau. \tag{2.15}$$

Ta thấy $u \in L^\infty\big(0,T; L^2_\sigma(\Omega)) \cap L^2_{\text{loc}}([0,T); W^{1,2}_{0,\sigma}(\Omega)\big)$ là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (2.1) nếu và chỉ nếu u thỏa mãn phương trình tích phân (2.15). Để chứng minh các định lý chính ta cần các bổ đề sau.

Bổ đề 2.6. *Giả sử $u \in L^2(\Omega)$ và $\nabla u \in L^2(\Omega)$. Khi đó*

$$\left\| e^{-tA}\mathbb{P}(u \cdot \nabla u) \right\|_2 \lesssim t^{-\frac{\beta}{2}} \|u\|_2^{\beta - \frac{1}{2}} \|\nabla u\|_2^{\frac{5}{2} - \beta}$$

trong đó β là hằng số dương sao cho $\dfrac{1}{2} \le \beta < \dfrac{3}{2}$.

Bổ đề 2.7. *Tồn tại một hằng số dương δ sao cho nếu $u_0 \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $\|A^{\frac{1}{4}}u_0\|_2 \le \delta$ thì hệ phương trình Navier-Stokes (2.1) có một nghiệm mạnh với giá trị ban đầu u_0 thỏa mãn $\|\nabla u(t)\|_2 \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$ với mọi $t \ge 0$.*

Bổ đề 2.8. *Giả sử u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes (2.1) với giá trị ban đầu $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$. Khi đó, tồn tại giá trị t_0 đủ lớn sao cho $\|\nabla u(t)\|_2 \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$ $\forall t \ge t_0$.*

Bổ đề 2.9. *Giả sử $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$. Khi đó*
a) *$\|e^{-tA}u_0\|_2 \to 0$ khi $t \to \infty$.*
b) *Nếu $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ với $1 < q \le 2$ thì*

$$\left\| e^{-tA}u_0 \right\|_2 = o\Big(t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2}\right)}\Big) \ \text{ khi } \ t \to \infty. \tag{2.16}$$

2.2.2 Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát

Kết quả đầu tiên của chúng tôi chứng minh rằng nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes (2.1) với chuẩn trong $L^2(\Omega)$ có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với cùng giá trị ban đầu và số mũ hội tụ nhỏ hơn $\dfrac{3}{4}$. Kết quả

này mở rộng kết quả của W. Borchers và T. Miyakawa với số mũ hội tụ $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Nội dung kết quả chính như sau.

Định lí 2.4. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là miền tổng quát, $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes* (2.1) *thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh* (2.4). *Khi đó*

a) *Nếu $\|e^{-tA}u_0\|_2 = O(t^{-\alpha})$ với $0 \le \alpha < \frac{3}{4}$ thì $\|u(t)\|_2 = O(t^{-\alpha})$ khi $t \to \infty$.*

b) *Nếu $\|e^{-tA}u_0\|_2 = o(t^{-\alpha})$ với $0 \le \alpha < \frac{3}{4}$ thì $\|u(t)\|_2 = o(t^{-\alpha})$ khi $t \to \infty$.*

Hệ quả 2.1. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là một miền tổng quát, u_0 và u như trong Định lý 2.4. Khi đó, nếu $\|u(t)\|_2 = o(t^{-\gamma})$ với $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ thì $\|u(t) - e^{-tA}u_0\|_2 = o(t^{-(\gamma+\theta)})$ $\forall \theta \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$.*

Kết quả thứ hai chỉ ra rằng, khi thêm một số điều kiện của giá trị ban đầu thì nghiệm yếu u dần đến nghiệm của hệ Stokes thuần nhất khi thời gian t dần đến vô cùng. Kết quả trong các Định lý 2.5 và Định lý 2.6 mạnh hơn kết quả của W. Borchers và T. Miyakawa khi thêm vào điều kiện của giá trị ban đầu. Phần chứng minh sẽ sử dụng lý thuyết về tính duy nhất và tốc độ hội tụ theo thời gian của nghiệm mạnh trong hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát khi giá trị ban đầu đủ nhỏ.

Định lí 2.5. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là một miền tổng quát, $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes* (2.1) *thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh* (2.4). *Khi đó, nếu $u_0 \in L^q(\Omega) \cap L^2_\sigma(\Omega),\ 1 < q \le 2$ thì*

$$\|u(t)\|_2 = o\left(t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\right) \quad khi \ \ t \to \infty.$$

Định lí 2.6. *Giả sử $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ là một miền tổng quát, $u_0 \in L^2_\sigma(\Omega)$ và u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes* (2.1) *thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh* (2.4). *Cho các hằng số t_0, C_1 và C_2 sao cho*

$$C_1 t^{-\alpha_1} \le \|e^{-tA}u_0\|_2 \le C_2 t^{-\alpha_2} \quad với \ \ t \ge t_0,$$

trong đó α_1 và α_2 là các hằng số dương thỏa mãn

$$0 \le \alpha_2 < \frac{1}{2} \quad và \quad \alpha_2 \le \alpha_1 < \alpha_2 + \frac{1}{4}.$$

Khi đó, nghiệm yếu u của hệ phương trình Navier-Stokes dần đến nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với giá trị ban đầu u_0 khi thời gian dần đến vô cùng, theo nghĩa là

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left\|u(t) - e^{-tA}u_0\right\|_2}{\|u(t)\|_2} = 0. \tag{2.17}$$

Chương 3

Dáng điệu tiệm cận nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho bài toán Cauchy của hệ phương trình Navier-Stokes. Ở đây, chúng tôi thu được kết quả là định lý về dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều. Phương pháp chứng minh dựa trên lý thuyết về sự tồn tại của nghiệm mạnh địa phương, tính duy nhất nghiệm, tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh toàn cục khi giá trị ban đầu đủ nhỏ và một số công cụ của giải tích điều hòa.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [3] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

3.1. Một số tính chất của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều

Trong chương này, ta nghiên cứu bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes (3.1) trong cả không gian $\mathbb{R}^3$ như sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \\ \text{div } u = 0, \\ u(0,x) = u_0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Trong phần này, ta sẽ thiết lập các ước lượng trong $L^p - L^q$ cho nửa nhóm truyền nhiệt với vi phân như sau.

Bổ đề 3.1. *Giả sử $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3, t > 0$ và $1 \le p \le q \le \infty$. Khi đó, với mọi*

$f \in L^p$ ta có

$$t^{\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+\frac{|\alpha|}{2}} D^\alpha e^{t\Delta} f \in BC([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)).$$

Điều này tương đương với

$$\big\|D^\alpha e^{t\Delta} f\big\|_q \le C_{p,q,\alpha} t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{|\alpha|}{2}} \|f\|_p$$

trong đó $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\partial_{x_3}^{\alpha_3}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ và $C_{p,q,\alpha}$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào p, q và α.

Bổ đề 3.2. *Giả sử rằng $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{N}^3, t > 0$ và $1 \le p < q \le \infty$. Khi đó, với mọi $f \in L^p$, ta có*

$$t^\beta D^\alpha e^{t\Delta}\mathbb{P} f \in BC([0,\infty); L^q(\mathbb{R}^3)) \text{ và } \big\|D^\alpha e^{t\Delta}\mathbb{P} f\big\|_q \le C_{p,q,\alpha} t^{-\beta}\|f\|_p,$$

trong đó $\beta = \dfrac{3}{2}(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}) + \dfrac{|\alpha|}{2}$ và $C_{p,q,\alpha}$ là hằng số dương chỉ phụ thuộc vào p, q và α.

Các bổ đề dưới đây sẽ nghiên cứu tính bị chặn của toán tử $B(u,v)(t)$ xác định bởi

$$B(u,v)(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla\cdot\big(u(s)\otimes v(s)\big)\mathrm{d}s$$

trên các không gian bổ trợ $\mathcal{K}_T^q,\ 3 \le q \le \infty$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u(t,x)$ sao cho

$$t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} u(t) \in BC\big([0,T); L^q(\mathbb{R}^3)\big)$$

và

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})}\big\|u(t)\big\|_q = 0. \tag{3.2}$$

Trong trường hợp $q = 3$, không gian $\mathcal{K}_T^3$ được xác định như không gian con của $C([0,T); L^3(\mathbb{R}^3))$. Không gian $\mathcal{K}_T^q$ được xác định bởi chuẩn

$$\big\|u\big\|_{\mathcal{K}_T^q} := \sup_{0\le t\le T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})}\big\|u(t,x)\big\|_q < \infty. \tag{3.3}$$

Bổ đề dưới đây chỉ ra tính chất của toán tử song tuyến tính $B(u,v)$ trong không gian $\mathcal{K}_T^q$ trên.

Bổ đề 3.3. *Toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $\mathcal{K}_T^q \times \mathcal{K}_T^q$ đến $\mathcal{K}_T^p$ với $3 \le p < \dfrac{3q}{6-q}$ nếu $3 < q < 6$; với $3 \le p < \infty$ nếu $q = 6$; $\dfrac{q}{2} \le p \le \infty$ nếu $6 < q < \infty$ và bất đẳng thức sau đúng*

$$\|B(u,v)\|_{\mathcal{K}_T^p} \le C\|u\|_{\mathcal{K}_T^q}\|v\|_{\mathcal{K}_T^q} \text{ với mọi } u, v \in \mathcal{K}_T^q,$$

trong đó C là hằng số dương không phụ thuộc vào T.

Ký hiệu $E_T^q := \mathcal{K}_T^q \cap \mathcal{K}_T^\infty$ với $3 < q < \infty$, ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3.4. *Giả sử $6 < q < \infty$, $T > 0$. Khi đó, toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $E_T^q \times E_T^q$ vào E_T^q và bất đẳng thức sau đúng*

$$\|B(u,v)\|_{E_T^q} \le C \, \|u\|_{E_T^q} \|v\|_{E_T^q} \ \text{ với mọi } u, v \in E_T^q, \tag{3.4}$$

trong đó C là một hằng số không phụ thuộc vào T.

Ta thiết lập không gian bổ trợ G^α, $0 \le \alpha \le 1$ gồm tất cả các hàm $w(x) = (w_1(x), w_2(x), w_3(x)) \in L^3(\mathbb{R}^3)$ sao cho $\sup\limits_{t\ge 0} t^\alpha \big\| e^{t\Delta}|w| \big\|_3 < \infty$ và

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \big\| e^{t\Delta}|w| \big\|_3 = 0. \tag{3.5}$$

Chuẩn trong không gian G^α được xác định bởi

$$\big\|w\big\|_{G^\alpha} := \|w\|_3 + \sup_{t\ge 0} t^\alpha \big\| e^{t\Delta}|w| \big\|_3.$$

Sau đây, ta sẽ phát biểu một số tính chất của không gian G^α.

Bổ đề 3.5. *Không gian G^α là một không gian Banach bất biến với phép tịnh tiến, nghĩa là*

$$\big\|w(\cdot - x_0)\big\|_{G^\alpha} = \big\|w\big\|_{G^\alpha} \ \text{ với mọi } \ x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Bổ đề 3.6. *Giả sử $h \in L^1(\mathbb{R}^3)$ và $w \in G^\alpha$. Khi đó, $h * w \in G^\alpha$ và*

$$\big\|h * w\big\|_{G^\alpha} \le \big\|h\big\|_1 \big\|w\big\|_{G^\alpha}.$$

Bổ đề 3.7. *Giả sử $h \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ và $w \in G^\alpha$. Khi đó, $hw \in G^\alpha$ và*

$$\big\|hw\big\|_{G^\alpha} \le \big\|h\big\|_\infty \big\|w\big\|_{G^\alpha}.$$

Các tính chất trên được sử dụng để chứng minh bổ đề sau về bị chặn của toán tử B trên không gian F_T^α, trong đó F_T^α với $0 \le \alpha < 1$ là không gian gồm tất cả các hàm đo được $u(t,x)$ sao cho

$$u(t) \in G^\alpha \text{ với mọi } t \in [0,T] \text{ và } \sup_{0\le t\le T} \big\|u(t)\big\|_{G^\alpha} < \infty.$$

Bổ đề 3.8. *Giả sử $p, \alpha, T \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$0 \le \alpha \le 1, 3 < q < \infty, T > 0.$$

Khi đó, toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $E_T^q \times F_T^\alpha$ đến F_T^α và từ $F_T^\alpha \times E_T^q$ đến F_T^α và các bất đẳng thức sau đúng

$$\big\|B(u,v)(t)\big\|_{F_T^\alpha} \lesssim \ \big\|u\big\|_{E_T^q} \big\|v\big\|_{F_T^\alpha} \ \text{ với mọi } u \in E_T^q, \ v \in F_T^\alpha \tag{3.6}$$

và

$$\big\|B(u,v)(t)\big\|_{F_T^\alpha} \lesssim \ \big\|u\big\|_{F_T^\alpha} \big\|v\big\|_{E_T^q} \ \text{ với mọi } u \in F_T^\alpha, \ v \in E_T^q. \tag{3.7}$$

Bổ đề sau thiết lập các đánh giá của nửa nhóm $e^{t\Delta}$ trên các không gian bổ trợ E_T^q và F_T^α đã được định nghĩa ở trên.

Bổ đề 3.9. *Giả sử $3 \le q < \infty$, $T > 0$ và $0 \le \alpha \le 1$. Khi đó*
a) *Nếu $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ thì $e^{t\Delta}u_0 \in E_T^q$ và $\|e^{t\Delta}u_0\|_{E_T^q} \lesssim \|e^{t\Delta}u_0\|_{K_T^q}$.*
b) *Nếu $u_0 \in G^\alpha$ thì $e^{t\Delta}u_0 \in F_T^\alpha$ và $\big\|e^{t\Delta}u_0\big\|_{F_T^\alpha} \le \|u_0\|_{G^\alpha}$.*

Bổ đề sau chỉ ra sự tồn tại nghiệm mạnh địa phương của hệ phương trình Navier-Stokes khi giá trị ban đầu thuộc $L^3(\mathbb{R}^3)$.

Bổ đề 3.10. *Giả sử $p, \alpha, T \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$6 < q < 12, 0 \le \alpha \le 1 \text{ và } T > 0.$$

Khi đó, tồn tại một số dương $C = C(q, \alpha)$ sao cho với mọi $u_0 \in G^\alpha$ với div $u_0 = 0$ *thỏa mãn*

$$\sup_{0\le t\le T} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})}\big\|e^{t\Delta}u_0\big\|_q < C \tag{3.8}$$

thì hệ phương trình Navier-Stokes (3.1) *có nghiệm*

$$u \in E_T^q \cap F_T^\alpha \cap BC\big([0,T); L^3(\mathbb{R}^3)\big).$$

Cụ thể, với giá trị ban đầu $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ bất kỳ tồn tại $T = T(u_0)$ đủ nhỏ sao cho bất đẳng thức (3.8) *đúng.*

Bổ đề 3.11. *Giả sử $u \in C\big([0,\infty); L^3(\mathbb{R}^3)\big)$ là một nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes* (3.1) *với giá trị ban đầu $u_0 \in G^\alpha$.*

Khi đó, $u(t) \in G^\alpha$ với mọi $t > 0$.

Ta xác định không gian bổ trợ Q^α, $0 \le \alpha \le 1$ gồm tất cả các hàm đo được $u(t,x)$ sao cho $\sup\limits_{t\ge 0} t^\alpha \|u(t)\|_3 < \infty$ và

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \|u(t)\big\|_3 = 0. \tag{3.9}$$

Bổ đề sau chỉ ra tính bị chặn của toán tử B liên quan tới không gian Q^α.

Bổ đề 3.12. *Giả sử $p, \alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$0 \le \alpha < 1, \max\Big\{0, \frac{2}{3}\big(\alpha - \frac{1}{2}\big)\Big\} < \frac{1}{q} < \frac{1}{3}.$$

Khi đó, toán tử song tuyến tính B là song liên tục từ $\mathcal{K}_\infty^q \times \mathcal{K}_\infty^q$ đến $\mathcal{K}_\infty^q$, từ $\mathcal{K}_\infty^q \times Q^\alpha$ đến Q^α, từ $Q^\alpha \times \mathcal{K}_\infty^q$ đến Q^α và các ước lượng sau đúng

$$\big\|B(u,v)(t)\big\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \le \gamma \big\|u\big\|_{\mathcal{K}_\infty^q}\big\|v\big\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \text{ với mọi } u,\ v \in \mathcal{K}_\infty^q, \tag{3.10}$$

$$\big\|B(u,v)(t)\big\|_{Q^\alpha} \le \gamma \big\|u\big\|_{\mathcal{K}_\infty^q}\big\|v\big\|_{Q^\alpha} \text{ với mọi } u \in \mathcal{K}_\infty^q,\ v \in Q^\alpha, \tag{3.11}$$

$$\big\|B(u,v)(t)\big\|_{Q^\alpha} \le \gamma \big\|u\big\|_{Q^\alpha}\big\|v\big\|_{\mathcal{K}_\infty^q} \text{ với mọi } u \in Q^\alpha,\ v \in \mathcal{K}_\infty^q, \tag{3.12}$$

trong đó γ là một hằng số dương.

Bổ đề 3.13. *Giả sử $p, \alpha \in \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$0 \leq \alpha < 1, \max\Big\{0, \frac{2}{3}\big(\alpha - \frac{1}{2}\big)\Big\} < \frac{1}{q} < \frac{1}{3}.$$

Khi đó, nếu tồn tại hằng số dương $C = C(q, \alpha)$ sao cho với mọi $u_0 \in G^\alpha$ thỏa mãn

$$\sup_{0 \leq t \leq \infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{q})} \big\| e^{t\Delta} u_0 \big\|_q < C \tag{3.13}$$

thì hệ phương trình Navier-Stokes (3.1) *có nghiệm*

$$u \in K^q_\infty \cap Q^\alpha \cap BC\big([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3)\big).$$

3.2. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong không gian ba chiều

Xét bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes (3.1) trong cả không gian ba chiều $\mathbb{R}^3$. Trong phần này, chúng tôi đã mở rộng kết quả về dáng điệu tiệm cận nghiệm của I. Gallagher với $u(t) \in L^3(\mathbb{R}^3)$. Kết quả của chúng tôi chứng minh rằng nếu $u \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$ là nghiệm mạnh của hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu u_0 thì nghiệm u có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm của phương trình truyền nhiệt có giá trị ban đầu $|u_0|$. Trong trường hợp đặc biệt, với $\alpha = 0$ ta thu được kết quả như I. Gallagher.

Kết quả chính trong phần này là định lý về tốc độ hội tụ của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes (3.1) trong toàn bộ không gian $\mathbb{R}^3$.

Định lí 3.1. *Cho $u \in C([0, \infty); L^3(\mathbb{R}^3))$ là một nghiệm mềm của hệ phương trình Navier-Stokes* (3.1) *với giá trị ban đầu u_0. Khi đó*

a) *Nếu $\big\| e^{t\Delta} |u_0| \big\|_3 = o(t^{-\alpha})$ với $0 \leq \alpha < 1$ thì $\big\| u(t) \big\|_3 = o(t^{-\alpha})$.*

b) *Nếu $\big\| e^{t\Delta} |u_0| \big\|_3 = O(t^{-\alpha})$ với $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $\big\| u(t) \big\|_3 = O(t^{-\alpha})$.*

c) *Nếu $u_0 \in L^{p,r}(\mathbb{R}^3)$ với $1 < p < 3,\ 1 \leq r < \infty$ thì*

$$\big\| e^{t\Delta} |u_0| \big\|_3 = o\big(t^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{p} - 1\right)}\big).$$

d) *Nếu $|u_0| \in \dot{B}_3^{-2\alpha, \infty}(\mathbb{R}^3)$ với $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $\big\| e^{t\Delta} |u_0| \big\|_3 = O\big(t^{-\alpha}\big)$.*

KẾT LUẬN CHUNG VÀ ĐỀ NGHỊ

Luận án đã nghiên cứu về tính chính quy và dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát không bị chặn Ω và trong cả không gian $\mathbb{R}^3$. Cụ thể, luận án của chúng tôi đã đạt được ba kết quả chính sau:

1. Tính chính quy của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát: Giả sử u là nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ và u thỏa mãn bất đẳng thức năng lượng mạnh. Khi đó, ta chứng minh được rằng nghiệm yếu u là chính quy nếu động năng $\frac{1}{2}\big\|u(t)\big\|_2^2$ liên tục Hölder trái với số mũ Hölder $\frac{1}{2}$ và nửa chuẩn Hölder đủ nhỏ. Kết quả thứ hai trong phần này ta chứng minh nếu $u(t) \in D(A^{\frac{1}{4}})$ và $\varlimsup_{\delta \to 0^+} \big\|A^{\frac{1}{4}}\big(u(t-\delta) - u(t)\big)\big\|_2 < C$ với mọi $t \in [0, T)$ và với C là hằng số dương đủ nhỏ thì u là chính quy trong $[0, T)$. Kết quả này đã được công bố trên bài báo [1] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

2. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu cho hệ phương trình Navier-Stokes trong miền tổng quát: Giả sử u là một nghiệm yếu của hệ phương trình Navier-Stokes không dừng trong miền tổng quát của $\mathbb{R}^3$. Ta chứng minh rằng tốc độ hội tụ theo thời gian của nghiệm yếu u với chuẩn $L^2(\Omega)$ bằng tốc độ hội tụ của nghiệm trong hệ Stokes thuần nhất với cùng giá trị ban đầu và số mũ hội tụ nhỏ hơn $\frac{3}{4}$. Hơn nữa, khi thêm một số điều kiện của giá trị ban đầu thì nghiệm yếu u dần đến nghiệm của hệ Stokes thuần nhất với giá trị ban đầu u_0 khi thời gian t dần tới vô cùng. Kết quả này đã được công bố trên bài báo [2] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

3. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm mạnh cho hệ phương trình Navier-Stokes trong cả không gian $\mathbb{R}^3$: Giả sử $u \in C([0, T); L^3(\mathbb{R}^3))$ là một nghiệm mạnh của bài toán Cauchy cho hệ phương trình Navier-Stokes với giá trị ban đầu u_0. Ta chứng minh rằng nghiệm u có cùng tốc độ hội tụ theo thời gian với nghiệm phương trình truyền nhiệt có giá trị ban đầu $|u_0|$. Kết quả này đã được công bố trên bài báo [3] trong Danh mục các công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

Chúng tôi đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo cho kết quả của luận án như sau:

- Nghiên cứu tính chính quy của nghiệm yếu trong các không gian khác hoặc làm nhẹ điều kiện của giả thiết.
- Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm của hệ phương trình Navier-Stokes với các điều kiện khác.
- Nghiên cứu các bài toán về hệ phương trình Navier-Stokes theo cách tiếp cận của giải tích điều hòa.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Duong V. T. T., Khai D. Q., Tri N. M. (2020), " On regularity of weak solutions for the Navier-Stokes equations in general domains ", *Mathematische Nachrichten*, accepted.

[2] Duong V. T. T., Khai D. Q. (2020), "L^2 Decay of weak solutions for the Navier-Stokes equations in general domains ", *Journal of Science and Technology Thai Nguyen University*, 225(02), pp. 45-51.

[3] Duong V.T.T., Khai D.Q., Tri N.M. (2020), "Time decay rates of the L^3 norm for strong solutions to the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$ ", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 485(2), pp. 81-98.